

Sarjat ja approksimointi
Harjoitus 4, 4.10.2016

1. Olkoot $f_k, g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita siten, että funktiojonot $(f_k)_{k=1}^\infty$ ja $(g_k)_{k=1}^\infty$ suppenevat tasaisesti. Suppeneeko funktiojono $(f_k + g_k)_{k=1}^\infty$ tasaisesti?

2. Olkoot $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$,

$$f_k(x) = \frac{\cos(kx)}{\sqrt{k}}.$$

(a) Osoita, että funktiojono $(f_k)_{k=1}^\infty$ suppenee tasaisesti.

(b) Osoita, että funktiojono $(f'_k)_{k=1}^\infty$ ei suppene edes pisteittäin.

Piirrä kuva.

3. Osoita, että sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$$

suppenee ja laske sen summa.

4. Suppenevatko seuraavat sarjat?

$$(a) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1}, \quad (b) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{j}{j+1}.$$

5. Olkoot $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevia sarjoja ja olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (ax_k + by_k)$ suppenee ja että summille pätee

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ax_k + by_k) = a \sum_{k=1}^{\infty} x_k + b \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

6. Olkoot $(a_k)_{k=1}^\infty$ ja $(b_k)_{k=1}^\infty$ lukujonoja, joille joukko

$$\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k\}$$

on äärellinen. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee jos ja vain jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee.

7. Olkoot $(a_k)_{k=1}^\infty$, $(b_k)_{k=1}^\infty$ ja $(c_k)_{k=1}^\infty$ lukujonoja.

(a) Oletetaan, että $|a_j| \leq b_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenee. Osoita, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee (itseisesti).

(b) Oletetaan, että $a_j \geq c_j \geq 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ hajaantuu. Osoita, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

8. Suppenevatko seuraavat sarjat?

$$(a) \quad \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j \log j}, \quad (b) \quad \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j^2 \log j}.$$

³Vihje: Osasumman voi laskea muokkaamalla termiä $1/j(j+1)$. Voit myös laskea osasummia S_n ja päätellä (ja todistaa induktiolla), mikä on yleinen osasumma S_n .

⁸Vihje: Mikä on oikea suppenemistesti?