Sarjat ja approksimointi
Harjoitus 3, 27.9.2016

1. Olkoot $f_n\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{nx}\,.$$

(a) Suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?
(b) Suppeneeko funktiojono $(f_n|_{[1/2,1]})_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?
Piirrä kuva.

2. Olkoot $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = x^k(1-x).$$

Suppeneeko funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ pisteittäin tai tasaisesti? Entä se funktiojono, joka saadaan rajoittamalla funktiot f_k välille $[0,1]$? Piirrä kuva.

3. Olkoot $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k(x) = \frac{x^{2k}}{1+x^{2k}}.$$

Suppeneeko funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti? Piirrä kuva.

4. Keksi esimerkki funktiojonosta $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle pätee:
(a) f_k on epäjatkuva kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja
(b) $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
Piirrä kuva.

5. Olkoot $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

(a) Näytä, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee pisteittäin.
(b) Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tasaisesti?
(c) Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,?$$

Piirrä kuva.

6. Keksi esimerkki funktiojonosta $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, $f_k\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, joka suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota f ja jolle pätee

$$A_k = \int_0^{\infty} f_k < \infty,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A = \int_0^{\infty} f < \infty,$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} A_k \neq A.$$

7. Olkoon $g\colon]-\infty,1[\to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \log(1-x)$$

Olkoot $g_k\colon [-1,\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, funktioita, joka määritellään asettamalla

$$g_k(x) = T_{k,0}\,g(x)$$

jokaisella $x \in [-1,\frac{1}{2}]$. Osoita, että funktiojono $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti.

[2]Vihje: Seuraava havainto voi olla hyödyllinen jossain vaiheessa laskuja: Jos jono (a_k) on rajoitettu ja $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, niin $\lim_{k\to\infty} a_k b_k = 0$.
[6]Vihje: Funktioiden f_k ei tarvitse olla jatkuvia.
[7]Vihje: Tarkastele jäännöstermiä. Luentojen esimerkki auttaa.

8. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Olkoot $f_k\colon A \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, funktioita. Todista väite:
Jos funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ kaikilla $x \in A$, jos $m \geq N$ ja $n \geq N$.