

Sarjat ja approksimointi

Harjoitus 2, 20.9.2016

1. Määritä funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ja arkustangentin arctan: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ päähaaran n . Taylorin polynomit pisteessä $0 \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

2. Määritä funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

kolmas Taylorin polynomi $T_{3,0}f(x)$.

3. Olkoon $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Määritä Taylorin polynomi $T_{2,0}f(x)$ kosinin ja funktion $g:]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

Taylorin polynomien avulla.

4. Arvioi Taylorin polynomien $T_{n,0} \cos(x)$ avulla lukua $\cos 1$ niin, että virhe on pienempi kuin $\frac{1}{1000}$.

5. Olkoon $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Olkoon $x_0 \in]a, b[$. Oletetaan, että

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ja

$$f^{(n)}(x_0) > 0.$$

Osoita, että funktiolla f on lokaali minimi pisteessä x_0 , jos $n \geq 2$ on parillinen. Osoita että piste x_0 ei ole funktion f ääriarvokohta jos $n \geq 1$ on pariton.

6. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$. Piirrä polynomien $T_{1,0}f(x)$, $T_{2,0}f(x)$, $T_{3,0}f(x)$ ja funktion f kuvaajat välillä $] -1, 1[$.

7. Olkoon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ funktiojono, joka suppenee tasaisesti kohti funktiota f . Osoita, että se suppenee pisteittäin kohti funktiota f .

¹Vihje: Käytä yksikäsitteisyyslauseita ja muistele arkustangentin ominaisuuksia.

²Vihje: Yksikäsitteisyyslause.

⁴Vihje: Lagrangen muoto jäännöstermille.

⁶Vihje: Kannattaa miettiä, mitä tehtävän 5 tulos sanoo funktiosta $x \mapsto f(x) - T_{n-1,0}f(x)$.

8. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Määritellään jokaisella $k \geq 1$ funktiot $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_k(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{k}}.$$

Suppeneeko funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ pisteittäin tai tasaisesti? Piirrä kuva.