Sarjat ja approksimointi
Harjoitus 1, 13.9.2016

1. Muodosta funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log(1 + e^x),$$

kolmas Taylorin polynomi pisteessä $0 \in \mathbb{R}$.

2. Muodosta funktion $f\colon]-1, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (1 + x)^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kolmas Taylorin polynomi pisteessä $0 \in \mathbb{R}$.

3. Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita, joille jollain $c \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$g(x) = f(cx) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Näytä, että

$$T_{n,x_0} g(x) = T_{n,cx_0} f(cx) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

4. Muodosta funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin^2(x),$$

n. Taylorin polynomi pisteessä $0 \in \mathbb{R}$ kaikilla n.

5. Laske raja-arvo käyttämällä Taylorin polynomeja

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

6. Olkoot $a, b > 0$. Laske raja-arvo käyttämällä Taylorin polynomeja

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - a^x}{1 - b^x}.$$

7. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio.
(a) Osoita, että $T_{n-1,x_0} f'(x) = (T_{n,x_0} f)'(x)$.
(b) Olkoon

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\,.$$

Osoita, että

$$T_{n+1,x_0} g(x) = \int_{x_0}^{x} T_{n,x_0} f(t)\, dt\,.$$

8. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Osoita, että $f(x) = O(x)$, kun $x \to 0$. Onko $f(x) = o(x)$, kun $x \to 0$?

[4] Vihje: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
[5] Vihje: Muuta yhdeksi murtolausekkeeksi.