RIEMANNIN GEOMETRIAA 2015

JOUNI PARKKONEN

Sisältö

Merkintöjä 2
ja sopimuksia 2
0. Johdanto 2
1. Vektorikentistä, 1-muodoista ja tensoreista 3
1.1. Modulit 3
1.2. Vektorikentät 3
1.3. 1-muodot 4
1.4. Tensorit 4
1.5. Tensorin arvo pisteessä 5
1.6. Kovariantin tensorikentän pullback 6
Harjoitustehtäviä 6
2. Riemannin metriikka 7
2.1. Etäisyysfunktio Riemannin monistolla 9
Harjoitustehtäviä 11
3. Riemannin isometriat 12
Harjoitustehtäviä 14
4. Levi-Civitan konnektio 16
Harjoitustehtäviä 19
5. Yhdensuuntaissiirto käyrää pitkin 20
Harjoitustehtäviä 23
6. Geodeesit 24
6.1. Eksponenttikuvaus 26
6.2. Normaalikoordinaatti 27
Harjoitustehtäviä 28
7. Riemannin monisto metrisenä avaruutena. 29
Harjoitustehtäviä 33
8. Kaarevuus 34
Harjoitustehtäviä 37
9. Lisää alimonistoista 38
9.1. Alimoniston konnektio 38
9.2. Toinen perusmuoto 39
9.3. Hyperpinnat 40
9.4. Geodeesit alimonistolla 41
Harjoitustehtäviä 43
10. Kehykset ja tilavuusmuoto 44
Harjoitustehtäviä 45
11. Projekteja 46
Viitteet 47

Päivitetty 10. joulukuuta 2015.

Merkintöjä

$T_p(M)$	Moniston M tangenttiavaruus pisteessä $p \in M$.
$T_p^*(M)$	Moniston M kotangenttiavaruus pisteessä $p \in M$.
$T(M)$	Moniston M tangenttikimppu.
$T^*(M)$	Moniston M kotangenttikimppu.
$\mathscr{F}(M)$	$C^\infty(M, \mathbb{R})$
$\mathscr{X}(M)$	Vektorikentät monistolla M.
$\mathscr{X}^*(M)$	1-muodot monistolla M.
$\mathscr{T}_s^r(M)$	Differentioituvan moniston M (r, s)-tensorikenttien $\mathscr{F}(M)$-moduli.
$\pi\colon B \to M$	Vektorikimpun B kantapistekuvaus.
$\Gamma(B)$	Vektorikimpun B leikkaukset.
I, J	välejä reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$.
δ_{ij}	$= \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$ Diracin delta.
dF	Kuvauksen F differentiaali eli tangenttikuvaus.
∂_i	Lokaalin koordinaatin i. komponenttifunktiota vastaava vektorikenttä.
dx^i	Vektorikentän ∂_i duaalinen 1-muoto.

ja sopimuksia

Oletamme, että differentioituvan moniston topologialla on numeroituva kanta.

Jos muuta ei mainita, monistot ovat yhtenäisiä.

Jos muuta ei mainita, kuvaukset ovat sileitä.

Numeroidut alaviitteet ovat vihjeitä käsiteltävän luvun tehtäviin.

DG on viittaus kurssiin Differentiaaligeometria, joka luennoitiin syksyn 2015 ensimmäisessä jaksossa.

0. Johdanto

Kun differentiaaligeometrian perusteet ovat hallinnassa, voidaan erikoistua tarkastelemaan monistoja, joilla on runsaammin rakennetta kuin pelkkä differentioituvan moniston rakenne. Lisää rakennetta saadaan esimerkiksi varustamalla monisto jollain tensorikentällä.

Tällä kurssilla tarkastelemme Riemannin geometriaa, jossa moniston jokaisen pisteen tangenttiavaruudessa on määritelty (positiividefiniitti) sisätulo siten, että eri pisteiden päällä olevien tangenttiavaruuksien sisätulot muuttuvat sileällä tavalla pisteen siirtyessä. Täsmällisemmin ilmaistuna monistolla siis kiinnitetään jokin $(0, 2)$-tensorikenttä.

Riemannin geometriasta on kirjoitettu monia ansiokkaita kirjoja. Omia suosikkejani, jotka ovat vaikuttaneet tämän kurssin muotoutumiseen ovat [GHL], [Hel], [Lee1] ja erityisesti [O'N].

Kurssilla Differentiaaligeometria määritellään sileiden monistojen käsittelyssä tarvittavaa kalustoa. Tässä ensimmäisessä luvussa palautamme mieleemme vektorikenttien, 1–muotojen, tensorien (vektoriavaruudessa) ja tensorikenttien (sileällä monistolla) käsitteet ja tutustumme tensorikenttien karakterisointiin yleisemmän lineaarialgebran avulla.

1.1. **Modulit.** Olkoon R kommutatiivinen* rengas ja olkoon $(V, +)$ kommutatiivinen ryhmä. Olkoon $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ kuvaus $R \times V \to V$ (renkaan R alkiolla kertominen), joka toteuttaa ehdot

(1) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ kaikille $\lambda \in R$ ja $v, w \in V$,
(2) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ kaikille $\lambda, \mu \in R$ ja $v \in V$,
(3) $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ kaikille $\lambda, \mu \in R$ ja $v \in V$ ja
(4) $1\,v = v$ kaikille $v \in V$.

Ryhmä V varustettuna tällä rakenteella on *R–moduli.* Modulin määritelmä on vektoriavaruuden määritelmän suoraviivainen yleistys ja valtaosa tavanomaisesta lineaarialgebrasta yleistyy moduleille, katso esimerkiksi [DF, Luku III]. On vain huomioitava, että kaikilla kertoimilla ei ole käänteisalkioita. Tällä kurssilla esiintyvissä moduleissa kerroinrengas R on joko $\mathbb{R}$ tai funktiorengas $\mathscr{F}(M)$.

1.2. **Vektorikentät.** Vektorikenttä sileällä monistolla M on tangenttikimpun leikkaus, siis kuvaus $X \colon M \to TM$, jolle pätee $\pi \circ X = \mathrm{id}$. Vektorikenttä X on *sileä*, jos $Xf \in \mathscr{F}(M)$ kaikille $f \in \mathscr{F}(M)$. Sileiden vektorikenttien joukolla $\mathscr{X}(M)$ on luonnollinen $\mathscr{F}(M)$–modulin rakenne: Määritellään $(fX)|_p = f(p)X|_p$ ja $(X + Y)|_p = X|_p + Y|_p$ kaikilla $p \in M$.

Muistamme differentiaaligeometriasta, että tangenttivektori $v \in T_pM$ on derivaatio pisteessä p: se on $\mathbb{R}$-lineaarikuvaus $v \colon \mathscr{F}(M) \to \mathbb{R}$, jolle pätee *Leibnitzin sääntö pisteessä* p: kaikille $f, g \in \mathscr{F}(M)$ pätee

$$v(fg) = (vf)g(p) + f(p)vg\,.$$

Vektorikenttä $X \in \mathscr{X}(M)$ on siis kuvaus $X \colon \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(M)$, joka on $\mathbb{R}$–lineaarinen ja jolle pätee *Leibnitzin sääntö*: kaikille $f, g \in \mathscr{F}(M)$ pätee

$$X(fg) = (XF)g + fXg\,,$$

se on siis funktioavaruuden $\mathscr{F}(M)$ *derivaatio.*

On helppo tarkastaa, että jokainen derivaatio on vektorikentän määräämä: Olkoon D derivaatio. Määritellään jokaiselle $p \in M$ tangenttivektori $X_p \in T_pM$ asettamalla jokaiselle $f \in \mathscr{F}(M)$ $X_pf = D(f)(p)$. Selvästi derivaation lineaarisuudesta ja Leibnitzin säännöstä seuraa, että kuvaus X_p on derivaatio pisteessä p, joten määritelmä on hyvin asetettu. Näin saadaan vektorikenttä X, joka on sileä, koska $Xf = D(f) \in \mathscr{F}(M)$ kaikilla $f \in \mathscr{F}(M)$.

Olkoon $U \subset M$ avoin joukko ja $x = (x_1, \ldots, x_n) \colon U \to \mathbb{R}^n$ lokaali koordinaatti. Komponenttifunktioiden x_i avulla saadaan *koordinaattivektorikentät* ∂_i asettamalla jokaiselle $f \in \mathscr{F}(M)$ ja jokaiselle $p \in M$

$$\partial_i f(p) = \frac{f \circ x^{-1}}{\partial u^i}(x(p))\,,$$

missä $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ kanonisissa koordinaateissa. Jokainen vektorikenttä X voidaan kirjoittaa lokaaleissa koordinaateissa koordinaattivektorikenttien avulla

$$X = \sum_i V x^i \partial_i\,.$$

*Jos rengas R ei ole kommutatiivinen, määritelmämme antaa *vasemman* R-modulin.

1.3. **1-muodot.** Sileän moniston M 1-muoto θ on kuvaus $\theta\colon M \to T^*(M)$, jolle $\pi\circ\theta = \mathrm{id}$. Se on *sileä*, jos kuvaus $\theta X\colon p \mapsto \theta|_p X|_p$ on sileä. Sileät 1-muodot muodostavat $\mathscr{F}(M)$–modulin $\mathscr{X}^*(M)$, jossa operaatiot ovat tavanomaiset lineaarikuvausten yhteenlasku jokaisessa tangenttiavaruudessa T_pM ja renkaan $\mathscr{F}(M)$ alkiolla kertominen: Määritellään $(f\theta)|_p = f(p)\theta|_p$ ja $(\theta_1+\theta_2)|_p = \theta_1|_p + \theta_2|_p$ kaikilla $p \in M$.

Funktion $f \in \mathscr{F}(M)$ *differentiaali* on 1-muoto df, joka määritellään asettamalla

$$df(v) = vf$$

kaikille $v \in T_pM$ kaikille $p \in M$. Erityisesti, jos $U \subset M$ avoin joukko ja $x\colon U \to \mathbb{R}^n$ on lokaali koordinaatti, niin komponenttifunktioiden $x_i \in \mathscr{F}(M)$ differentiaalit dx^i ovat *koordinaatti*-1-*muotoja*. Jokainen 1-muoto θ voidaan kirjoittaa lokaaleissa koordinaateissa koordinaatti-1-muotojen avulla

$$\theta = \sum_i \theta\partial_i\, dx^i.$$

1.4. **Tensorit.** Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja olkoon V^* sen duaali, joka on lineaarikuvausten $L\colon V \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus. Multilineaarikuvaus $A\colon (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$ on (r,s)–*tensori vektoriavaruudessa* V. Erityisesti, jos M on differentioituva monisto ja $p \in M$, niin multilineaarikuvaus $A_p\colon (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$ on (r,s)-tensori tangenttiavaruudessa T_pM ja sanotaan, että sillä on r *kontravarianttia* ja s *kovarianttia* muuttujaa.

Tangenttiavaruuden T_pM (r,s)-tensorit muodostavat vektoriavaruuden $T_s^r(T_pM)$ ja näistä vektoriavaruuksista muodostetaan *tensorikimppu* $\pi\colon T_s^rM \to M$, jolla on differentioituvan moniston rakenne samaan tapaan kuin tangenttikimpulla. Tensorikimpun T_s^rM sileä leikkaus $A\colon M \to T_s^rM$ on (r,s)-*tensorikenttä*, pätee siis $\pi\circ A = \mathrm{id}$. Kaikkien (r,s)-tensorikenttien joukkoa merkitään $\Gamma(T_s^rM)$.

Tensorit voidaan määritellä yleisemmässäkin kontekstissa. Olkoot V ja W R-moduleja. Kuvaus $L\colon V \to W$ on R–*lineaarikuvaus*, jos

$$L(ru+sv) = rL(u) + sL(v)$$

kaikille $r,s \in R$ ja $u,v \in V$. Multilineaarikuvaukset määritellään samaan tapaan: Olkoot $V_1,\dots,V_n$ ja W R-moduleja. Kuvaus $A\colon \prod V_i \to W$ on R-*multilineaarinen*, jos kuvaus

$$v \mapsto A(v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v, v_{s+1}, \dots, v_n)$$

on lineaarinen kaikille $1 \le s \le n$ ja kaikille $v_i \in V_i$, $i \ne s$. R-modulin V *duaali* V^* on R-lineaarikuvausten $L\colon V \to R$ R-moduli. Multilineaarikuvaus $A\colon (V^*)^r \times V^s \to R$ on (r,s)–*tensori* modulilla V. On tapana sanoa, että $(0,m)$-tensorit ovat *kovariantteja* tensoreita ja $(k,0)$-tensorit ovat *kontravariantteja* tensoreita. (r,s)-tensorit vektorikenttien modulilla $\mathscr{X}(M)$ muodostavat $\mathscr{F}(M)$-modulin $\mathscr{T}_s^r(M)$.

Kun osoitetaan kuvaus $A\colon (\mathscr{X}^*(M))^r \times \mathscr{X}(M)^s \to \mathscr{F}(M)$ tensoriksi, tulee näyttää, että A on $\mathscr{F}(M)$-lineaarinen jokaisessa muuttujassaan. Yleensä käyttäytyminen yhteenlaskun suhteen on selvää, joten tarkastettavaksi jää vain se, “voidaanko funktiot siirtää tensorista ulos“ eli päteekö esimerkiksi kuvaukselle $B\colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{F}(M)$

$$B(f_1X_1, f_2X_2) = f_1f_2B(X_1,X_2)$$

kaikille $f_1, f_2 \in \mathscr{F}(M)$ ja kaikille $X_1, X_2 \in \mathscr{X}(M)$.

Esimerkki 1.1. (1) Evaluaatiokuvaus $E\colon \mathscr{X}^*(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{F}(M)$, joka määritellään asettamalla

$$E(\omega, V) = \omega(V)$$

on $(1,1)$-tensori.

(2) Olkoon $\omega \in \mathscr{X}^*(M)$. Kuvaus $B\colon \mathscr{X}(M)^2 \to \mathscr{F}(M)$, joka määritellään asettamalla $B(V,W) = V\omega(W)$ ei ole tensori. Tarkastellaan jälkimmäistä muuttujaa. Olkoon $f \in \mathscr{F}(M)$. Tällöin muodon ω lineaarisuuden ja Leibnitzin säännön nojalla

$$X\,\omega(fY) = X\,(f\omega Y) = (Xf)\omega Y + fX\,\omega Y\,.$$

Funktio $(Xf)\omega Y$ ei kuitenkaan yleensä ole nollafunktio, joten B ei ole tensori.

Huomautus 1.2. Jos $A\colon \mathscr{X}(M)^s \to \mathscr{X}(M)$ on $\mathscr{F}(M)$-multilineaarikuvaus, niin kuvaus $\bar{A}\colon \mathscr{X}^*(M) \times \mathscr{X}(M)^s \to \mathscr{F}(M)$, joka määritellään asettamalla

$$\bar{A}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_s) = \theta A(X_1, X_2, \dots, X_s)$$

on $(1,s)$-tensori. Tämän yhteyden vuoksi kutsumme joskus myös kuvausta A tensoriksi.

Esimerkki 1.3. Kaikki tällä kurssilla tarkasteltavat vektorikenttien keskeiset operaatiot eivät ole tensoreita edes tässä yleistetyssä mielessä. Lien tulo (DG luento 6) määrää kuvauksen $[\cdot,\cdot]\colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$, joka ei ole tensori yleistetyssä mielessä: Jos $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ ja $g \in \mathscr{F}(M)$, niin

$$[X, gY] = (Xg)Y + gXY - gYX = g[X,Y] + (Xg)Y,$$

joten kuvaus ei ole $\mathscr{F}(M)$-bilineaarinen.

1.5. **Tensorin arvo pisteessä.** Kurssilla DG määriteltiin tensorikentät tensorikimpun leikkauksina. Osoitamme nyt, että tällä kurssilla käytettävä määritelmä on itse asiassa ekvivalentti.

Olkoon $U \subset M$ avoin joukko ja olkoon $p \in M$. Funktio $f \in \mathscr{F}(M)$ on *töyssyfunktio* pisteessä p, jos on avoin $V \subset U$ siten, että $p \in V$, $f \geq 0$, $f|_V \equiv 1$ ja $f|_{M-U} \equiv 0$.

Lemma 1.4. *Olkoon $A \in \mathscr{T}^r_s(M)$. Jos p on 1-muodon θ^i tai vektorikentän X_j nollakohta jollain $1 \leq i \leq r$ tai $1 \leq j \leq s$, niin $A(\theta^1, \theta^2, \dots \theta_r, X_1, X_2, \dots, X_s)(p) = 0$.*

Todistus. Tarkastellaan tilannetta, jossa A on $(1,1)$–tensori, yleisessä tapauksessa ei ole mitään oleellisesti erilaista. Olkoon $p \in M$ ja olkoon $(U,x) \ni p$ lokaali koordinaatti. Tällöin on funktiot $X_i \in \mathscr{F}(U)$, joille $X = \sum X^i \partial_i$ ympäristössä U. Olkoon $f \in \mathscr{F}(M)$ töyssyfunktio pisteessä p. Tällöin saadaan luonnollisella tavalla määriteltyä $fX^i \in \mathscr{F}(M)$ ja $f\partial_i \in \mathscr{X}(M)$[†]. Käyttämällä tensorin A $\mathscr{F}(M)$-lineaarisuutta muuttujan X suhteen saadaan

$$f^2 A(\theta, X) = A(\theta, f^2 X) = A(\theta, \sum_i fX^i f\partial_i) = \sum_i fX^i A\big(\theta, f\partial_i\big)\,.$$

Jos $X^i(p) = 0$ kaikilla i, niin $A(\theta, X)(p) = 0$. Tapaus, jossa p on 1-muodon nollakohta käsitellään samaan tapaan. ☐

Propositio 1.5. *Olkoon $A \in \mathscr{T}^r_s(M)$. Olkoot θ^i, ω_i 1-muotoja ja olkoot X_j, Y_j vektorikenttiä siten, että $\theta^i|_p = \omega^i|_p$ ja $X_j|_p = Y_j|_p$. Tällöin*

$$A(\theta^1, \theta^2, \dots \theta^r, X_1, X_2, \dots, X_s) = A(\omega^1, \omega^2, \dots \omega^r, X_1, X_2, \dots, X_s)\,.$$

Todistus. Kun A on $(1,1)$–tensori, saadaan Lemman 1.4 nojalla

$$A(\theta, X)(p) - A(\omega, Y)(p) = A(\theta - \omega, X)(p) + A(\omega, X - Y)(p) = 0 + 0 = 0\,.$$

Yleinen tapaus todistetaan samaan tapaan. ☐

Proposition 1.5 nojalla jokaisella tensorilla $A \in \mathscr{T}^r_s(M)$ on *arvo* $A_p \in T^r_s M$ jokaisessa pisteessä $p \in M$. Tämän havainnon avulla saadaan tulos, joka osoittaa, että modulien avulla määritelty tensorien käsite on todellakin sama kuin tensorikimpun leikkausten avulla annettu määritelmä.

[†]Funktio f otetaan käyttöön, jotta koordinaattien avulla saatu vektorikentän lauseke laajenee koko monistolle.

Propositio 1.6. *Jokainen tensori $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ määrää kanonisesti yksikäsitteisen tensorikentän $A \in \Gamma(T_s^r M)$. Jokainen vektorikenttä $A \in \Gamma(T_s^r M)$ määrää kanonisesti yksikäsitteisen tensorin $A \in \mathscr{T}_s^r M$.* $\square$

Propositio 1.7. *(1) $\mathscr{X}^*(M) = \mathscr{T}_1^0(M) = \mathscr{X}(M)^*$.*
(2) $\mathscr{X}(M) = \mathscr{T}_0^1(M)$.

Todistus. (1) Jokainen vektorikenttä 1-muoto $\theta \in \mathscr{X}^*(M)$ määrää jokaisen pisteen $p \in M$ tangenttiavaruudessa T_pM lineaarikuvauksen $\theta_p \colon T_pM \to \mathbb{R}$. Kuvaus $p \mapsto \theta_p$ on kotangenttikimpun sileä leikkaus koska jokaiselle $X \in \mathscr{X}(M)$ kuvaus $p \mapsto \theta_p X_p = (\theta X)(p)$ on sileä. Siis θ on $(0,1)$–tensori.

Olkoon $A \in \mathscr{T}_1^0(M)$. Tensorin A arvo pisteessä p on lineaarikuvaus $A_p \colon T_pM \to \mathbb{R}$, siis $A_p \in T_p^*M$. Saadaan 1-muoto $p \mapsto A_p$, joka on sileä, koska jokaiselle $X \in \mathscr{X}(M)$ pätee $AX \in \mathscr{F}(M)$.

(2) Vektorikenttä X määrää $\mathscr{F}(M)$–lineaarikuvauksen $\mathscr{X}^*(M) \ni \theta \mapsto \theta X \in \mathscr{F}(M)$. Loput väitteestä todistetaan samaan tapaan kuin kohta (1). $\square$

1.6. **Kovariantin tensorikentän pullback.** Olkoot M_1 ja M_2 sileitä monistoja ja olkoon $A \in \mathscr{T}_m^0(M_2)$. Olkoon $F \colon M_1 \to M_2$ sileä. Kovariantin tensorin A *pullback* on kuvaus $F^*A \colon \mathscr{X}(M_1)^m \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\phi^*A(v,w) = A(dFv, dFw)$$

kaikille $v, w \in T_pM_1$ kaikille $p \in M_1$.

Lemma 1.8. *Tällöin ϕ^*A on $(0,m)$-tensori.*

Todistus. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi tarkastellaan tapausta $m = 2$, yleisessä tapauksessa ei ole mitään oleellisesti erilaista. Olkoot $(U_1 \subset M_1, x)$ ja $(U_2 \subset M_2, y)$, avoimia koordinaattiympäristöjä siten, että $F(U_1)$ sisältyy joukkoon U_2. Tällöin

$$\begin{aligned}
F^*A_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p\Big) &= A_{F(p)}\Big(dF\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, dF\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\Big) \\
&= A_{F(p)}\Big(\sum_k \frac{\partial(y^k \circ F)}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}|_{F(p)}, \sum_m \frac{\partial(y^m \circ F)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^m}|_{F(p)}\Big) \\
&= \sum_{k,m} \frac{\partial(y^k \circ F)}{\partial x^i} \sum_m \frac{\partial(y^m \circ F)}{\partial x^j} A_{F(p)}\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}|_{F(p)}, \frac{\partial}{\partial y^m}|_{F(p)}\Big).
\end{aligned}$$

Tästä lausekkeesta näkee helposti, että $p \mapsto F^*A(X_1, X_2)$ on sileä kuvaus, joten kuvaus $F^*A \colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{F}(M)$ on hyvin määritelty. Samoin nähdään, että se on $\mathscr{F}(M)$-bilineaarinen. $\square$

Harjoitustehtäviä.

1.1. Osoita, että jokainen modulin $\mathscr{F}(M)$ derivaatio on sileän vektorikentän määräämä.

1.2. Osoita, että jokainen 1-muoto θ voidaan kirjoittaa lokaaleissa koordinaateissa koordinaatti -1-muotojen avulla

$$\theta = \sum_i \theta\partial_i \, dx^i.$$

1.3. Todista Proposition 1.5 väite $(1,2)$-tensoreille.

1.4. 1-muodon $\theta \in \mathscr{X}^*(M)$ *ulkoinen derivaatta* $d\theta$ määritellään asettamalla

$$d\theta(X,Y) = X\theta Y - Y\theta X - \theta[X,Y]$$

kaikille $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. Osoita, että $d\theta$ on tensori.

Olkoon M differentioituva monisto. Positiividefiniittiä symmetristä $(0,2)$-tensoria (tai oikeastaan tensorikenttää) $g \in \mathscr{T}_2^0 M$ kutsutaan *Riemannin metriikaksi* tai *metriseksi tensoriksi*. Tällä kurssilla tutkimme *Riemannin monistoja*, jotka ovat pareja (M, g).

Perinteisesti Riemannin metriikka on tapana kirjoittaa koordinaateissa kertoimien

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$$

avulla

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j\,.$$

Koska metrinen tensori on symmetrinen, tensoritulon merkki voidaan turvallisesti jättää merkitsemättä.[‡]

Matriisi $G(p) = \big(g_{ij}(p)\big)$ on kääntyvä koska se on positiividefiniitti. Sen käänteismatriisin kertoimille käytetään merkintää $g^{ij}(p)$. Noudattelemme kurssilla tätä perinteistä merkintätapaa siinä määrin kuin se on käytännöllistä.

Usein (erityisesti fysiikassa) käytetään *Einsteinin summaussopimusta*. Tällöin, sama symboli esiintyy lausekkeessa ylä- ja alaindeksinä, niin sen yli summataan aina. Esimerkiksi Riemannin metriikan koordinaattiesitys kirjoitettaisiin $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$. Tällä kurssilla emme käytä Einsteinin summausta. Sen sijaan summauksissa indeksi saa jatkossa usein arvot $1, 2, \ldots, \dim M$, joten jätämme yleensä rajat merkitsemättä

$$\sum_i a_i = \sum_{i=1}^n a_i\,.$$

Esimerkki 2.1. Olkoot $x_1, x_2, \ldots x_n$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnolliset koordinaattifunktiot.

(1) Varustamalla sileä monisto $\mathbb{R}^n$ *euklidisella* Riemannin metriikalla

$$g_{\mathrm{E}} = \sum_{I=1}^n dx^i \otimes dx^i = \sum_{I=1}^n (dx^i)^2$$

saadaan *euklidinen avaruus*

$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{E}}).$$

Näissä koordinaateissa Riemannin metriikkaa pisteessä $p \in \mathbb{R}^n$ vastaava matriisi on $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ on identtinen matriisi I_i jokaisella p.

(2) Varustamalla ylempi puoliavaruus $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ *hyperbolisella* Riemannin metriikalla

$$g_{\mathrm{H}} = \frac{1}{x_n^2} g_{\mathrm{E}}|_{U^n} = \frac{1}{x_n^2} \sum_{I=1}^n (dx^i)^2$$

saadaan *hyperbolinen avaruus*

$$\mathbb{H}^n = (\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, g_{\mathrm{H}}),$$

tai tarkemmin *hyperbolisen avaruuden puolitasomalli.*

(3) Yleistetään edellinen esimerkki: Olkoon (M, g) Riemannin monisto ja olkoon $f \in \mathscr{F}(M)$. Tällöin (M, fg) on Riemannin monisto, joka on saatu Riemannin monistosta (M, g) *metriikan konformisella muunnoksella.*

[‡]Täsmällisemmin: $dx^i dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$ on $(0,1)$-tensorien dx^i ja dx^j *symmetrinen tulo.*

Esimerkki 2.2. (1) Varustamalla pallonpinta

$$\mathbb{S}^n(0,1) = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

Riemannin metriikalla, joka saadaan rajoittamalla ympäröivän avaruuden $\mathbb{E}^{n+1}$ euklidinen Riemannin metriikka jokaiseen pallonpinnan $\mathbb{S}^n(0,1)$ tangenttiavaruuteen $T_p\mathbb{S}^n = p^\perp$ saadaan *pallon Riemannin metriikka* $g_{\mathbb{S}}$ ja Riemannin monisto

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n(0,1), g_{\mathbb{S}}) .$$

(2) Palautetaan mieleen $(0,2)$-tensorien pullback metristen tensorien tapauksessa: Olkoon M_1 sileä monisto ja olkoon (M_2, g_2) Riemannin monisto. Olkoon $\phi\colon M_1 \to M_2$ sileä. Metrisen tensorin g_2 *pullback* on $(0,2)$-tensori $\phi^* g_2$, jolle pätee

$$\phi^* g_2(v,w) = g_2(d\phi v, d\phi w)$$

kaikille $v, w \in T_pM_1$ kaikille $p \in M_1$. Lemman 1.8 nojalla $\phi^* g_2$ on $(0,2)$-tensori.

Harjoituksissa osoitamme, että $\phi^* g_2$ on positiividefiniitti (siis metrinen tensori), jos ja vain jos kuvaus ϕ on immersio. Tämän tuloksen avulla saamme (1)-kohdan yleistyksen:

Propositio 2.3. *Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $\phi\colon S \hookrightarrow M$ (immersoitu) alimonisto. Tällöin $\phi^* g$ on Riemannin metriikka monistolla S.* □

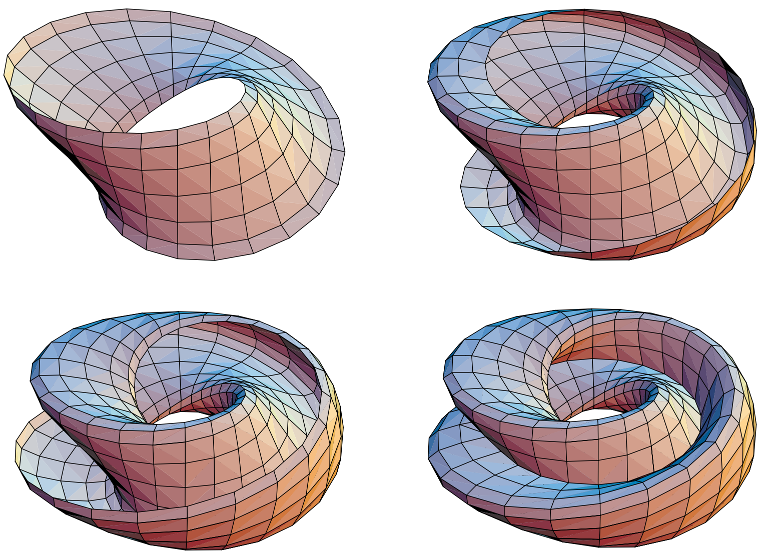
Tämän kohdan merkinnöillä kohdassa (1) $M = \mathbb{E}^{n+1}$, $S = \mathbb{S}^n$ ja ϕ on inkluusiokuvaus.

(3) Torus $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ voidaan tunnetusti upottaa avaruuteen $M = \mathbb{E}^3$ sileällä kuvauksella $F = F_{Rr}\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{E}^3$,

$$F(\theta,\phi) = ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta) .$$

Kohdan (2) nojalla jokainen upotus määrittelee Riemannin metriikan torukselle.

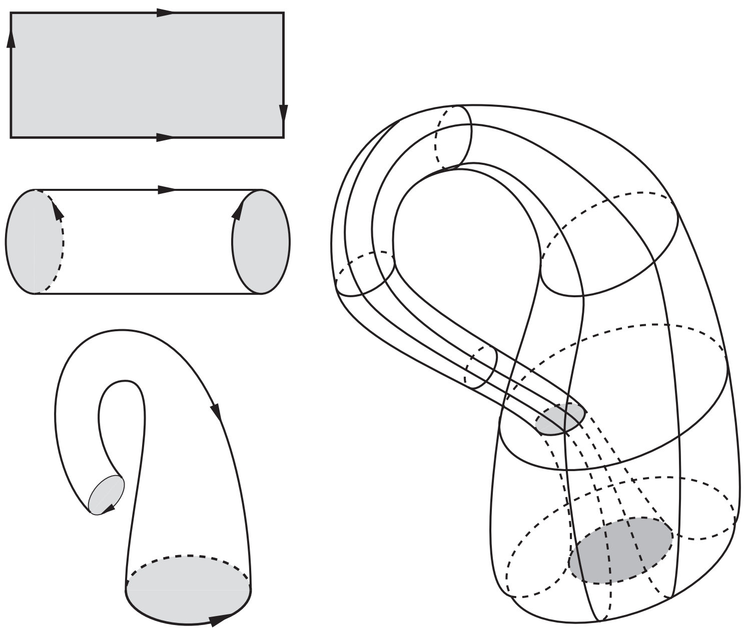
(4) Kleinin pulloa K ei voi upottaa avaruuteen $\mathbb{E}^3$, sen sijaan on immersioita $\iota\colon K \to \mathbb{E}^3$, esimerkiksi Dieudonnén immersio, joka antaa tällaisen kuvan[§]



ja seuraavalla sivulla esitettävä perinteinen “leikkaa ja liimaa neliöstä Kleinin pullo“-immersio

Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ sileän moniston M lokaalisti äärellinen peite. *Peitteelle $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ alisteinen ykkösen ositus* on kokoelma $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ funktioita $\rho_\alpha \in \mathscr{F}(M)$, joille pätee $0 \le \rho_\alpha \le 1$, funktion ρ_α kantaja sisältyy joukkoon U_α ja $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$. Jokaisella sileän moniston peitteellä lokaalisti äärellinen hienonnus ja sille alisteinen ykkösen ositus, katso esimerkiksi [Lee2, Thm. 2.25]

[§]Kiitokset Ari Lehtoselle tästä ja seuraavasta kuvasta.



Propositio 2.4. *Jokaisella differentioituvalla monistolla on Riemannin metriikka.*

Todistus. Olkoon $\big((\phi_\alpha, U_\alpha)\big)_{\alpha\in A}$ lokaalisti äärellinen kartasto differentioituvalla monistolla M, $\phi_\alpha = (x^1_\alpha, x^2_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$. Olkoon $\big(\rho_\alpha : U_\alpha \to [0,1]\big)_{\alpha\in A}$ peitteelle (U_α) alisteinen ykkösen ositus.

Jokaisella joukolla $\phi_\alpha(U_\alpha)$ on Riemannin metriikka $g_\alpha = \sum_i dx^i \otimes dx^i$. Määritellään $h \in \mathscr{T}^0_2(M)$ asettamalla $h = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha g_\alpha$. On selvää, että jokaisessa pisteessä p äärellisenä summana saatava neliömuoto h_p on positiividefiniitti, joten h on Riemannin metriikka. $\square$

Seuraus 2.5. *Jokaisella differentioituvalla monistolla on ylinumeroituvan monta Riemannin metriikkaa.*

Todistus. Seuraa Propositiosta 2.4 ja Esimerkistä 2.1(3). $\square$

Pullback antaa toisen tavan järjestää Proposition 2.4 todistuksen loppuosa: Jokaisella kuvajoukolla $\phi_\alpha(U_\alpha)$ on euklidisesta avaruudesta indusoituva Riemannin metriikka $\bar g_\alpha = g_E|_{\phi_\alpha(U_\alpha)}$. Määritellään Riemannin metriikka g_α joukossa U_α asettamalla $g_\alpha = \phi^*_\alpha \bar g_\alpha$ ja asettamalla $h = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha g_\alpha$ kuten edellä tehtiin.

2.1. **Etäisyysfunktio Riemannin monistolla.** Riemannin metriikka antaa mahdollisuuden määritellä tavanomaisia geometrisia käsitteitä Riemannin monistolla: Tangenttivektorin $v \in T_pM$ *pituus* tai *normi* on

$$|v| = |v|^g = \sqrt{g(v,v)}\,.$$

Kahden tangenttivektorin $v, w \in T_pM$ välinen (suuntaamaton) kulma on

$$\measuredangle(v,w) = \measuredangle^g(v,w) = \arccos \frac{g(v,w)}{|v|\,|w|}\,.$$

Sileän polun $\gamma\colon [a,b] \to M$ *pituus* on

$$\ell(\gamma) = \ell_g(\gamma) = \int_{[a,b]} |\dot\gamma| = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt\,,$$

missä $\dot\gamma(t)$ on polun γ tangenttivektori pisteessä $\gamma(t)$.

Lemma 2.6. *Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $f \in \mathscr{F}(M)$ positiivinen funktio. Tällöin $\measuredangle^{fg}(v,w) = \measuredangle^{g}(v,w)$ kaikille $v,w \in T_pM$.* □

Olkoon M yhtenäinen Riemannin monisto. Määritellään kaikille $x,y \in M$

$$d(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \in J_{x,y}\} \tag{1}$$

missä $J_{x,y}$ on kaikkien pisteitä x ja y yhdistävien paloittain sileiden polkujen joukko.

Propositio 2.7. *Lauseke* (1) *määrittelee metriikan (siis etäisyysfunktion) monistolla M. Tämän metriikan määräämä topologia on alkuperäinen monistotopologia.*

Todistus. Harjoitus. □

Lausekkeella (1) määritelty metriikka on Riemannin moniston (M,g) *Riemannin etäisyysfunktio*. Kun Riemannin monistoa ajatellaan metrisenä avaruutena, käytetään tätä etäisyyttä.

Esimerkki 2.8. Myöhemmin kurssilla tarkastelemme esimerkiksi lyhimpiä käyriä tarkemmin. Huomataan kuitenkin nyt, että joskus kahden pisteen välillä on lyhin käyrä ja joskus ei:

(1) Euklidisessa avaruudessa Riemannin etäisyys on tavallinen euklidinen etäisyys. Euklidinen avaruus on täydellinen metrinen avaruus ja euklidisesta geometriasta tiedämme, että euklidinen jana $[x,y]$ on kahden pisteen $x,y \in \mathbb{E}^n$ välinen lyhin polku. Sille pätee siis $d(x,y) = \ell([x,y])$.

(2) Riemannin monisto $(\mathbb{R}^n - \{0\}, g_E)$ ei ole täydellinen metrinen avaruus ja esimerkiksi pisteiden x ja $-x$, $x \neq 0$ välillä ei ole lyhintä käyrää.

Esimerkki 2.9. Olkoon $\gamma\colon]0,\infty[\to \mathbb{H}^2$, $\gamma(t) = (0,t)$ polku hyperbolisen tason ylemmässä puolitasomallissa. Tällöin

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log\frac{b}{a}$$

kaikille $0 < a < b < \infty$. Erityisesti polun γ pituus on ääretön.

Olkoon $\eta = (\eta_1,\eta_2)\colon [c,d] \to \mathbb{H}^2$ paloittain sileä polku, jolle $\eta(c) = (0,a)$ ja $\eta(d) = (0,b)$, $a < b$. Tällöin

$$\ell(\eta) = \int_c^d \frac{\sqrt{g_E(\dot\eta(t),\dot\eta(t))}}{\eta_2(t)}dt \geq \int_c^d \frac{|\dot\eta_2(t)|}{\eta_2(t)}dt \geq \int_c^d \frac{\dot\eta_2(t)}{\eta_2(t)}dt \geq \log\frac{\eta_2(d)}{\eta_2(c)} = \ell(\gamma|_{[a,b]})\,.$$

Siis

$$d((0,s),(0,t)) = \log\frac{t}{s}$$

ja pisteitä $(0,s)$ ja $(0,t)$ yhdistää lyhin polku $\gamma|_{[s,t]}$. Lyhin polku ei ole yksikäsitteinen koska polun uudelleenparametrisointi riittävän siistillä kuvauksella ei muuta pituutta.

Polku γ ei parametrisoi käyrää $[(0,a),(0,b)]$ vakionopeudella, koska $|\dot\gamma(t)| = \frac{1}{t}$. On helppo tarkastaa, että polulle $\gamma_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$, $\gamma_0(t) = (0,e^t)$ pätee $|\dot\gamma_0(t)| = 1$ kaikilla t ja se on polun γ uudelleenparametrisointi. Myöhemmin kurssilla tarkastelemme lyhimpiä käyriä muidenkin pisteiden välillä.

Harjoitustehtäviä.

2.1. Olkoon M_1 differentioituva monisto, olkoon (M_2, g_2) Riemannin monisto ja olkoon $\phi\colon M_1 \to M_2$ immersio. Osoita, että $\phi^* g_2$ on Riemannin metriikka.

2.2. Olkoon (M, g) Riemannin monisto, olkoon $\gamma\colon [a, b] \to X$ sileä polku ja olkoon ϕ : $[a', b'] \to [a, b]$ diffeomorfismi. Osoita, että polun $\gamma \circ \phi$ pituus on sama kuin polun γ pituus.

2.3. Olkoon $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{H}^2$ jono siten, että toisten koordinaattien jono y_k ei ole rajoitettu. Osoita, että jono z_k ei ole Cauchyn jono.

2.4. Olkoon (M, g) Riemannin monisto. Määritellään kuvaus $\phi\colon \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}^*(M)$ asettamalla $\Phi(V) = V^*$, missä

$$V^*(X) = g(V, X)$$

kaikille $X \in \mathscr{X}(M)$. Osoita, että Φ on $\mathscr{F}(M)$-lineaarinen isomorfismi.

2.5. Todista Propositio 2.7.

[4]Vihje: Surjektiivisuutta osoitettaessa esitä 1-muoto θ koordinaatti-1-muotojen avulla koordinaattiympäristössä U ja etsi lauseke sellaiselle vektorikentälle Y, jolle $\Phi(Y|_U) = \theta|_U$.

Olkoot (M_1, g_1) ja (M_2, g_2) Riemannin monistoja. Diffeomorfismi $\phi\colon M_1 \to M_2$ on *(Riemannin) isometria*, jos $\phi^* g_2 = g_1$, toisin sanoen

$$g_2(d\phi u, d\phi v) = g_1(u, v)$$

kaikille $u, v \in T_p M_1$ kaikille $p \in M_1$. Jos jokaisella pisteellä $p \in M$ on ympäristo U, jolle $\phi|_U\colon U \to \phi(U)$ on isomorfismi, niin ϕ on *lokaali isomorfismi.*

Jos (M_1, g_1) ja (M_2, g_2) ovat Riemannin monistoja, joiden välillä on (Riemannin) isometria $\Phi\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$, niin Riemannin monistot (M_1, g_1) ja (M_2, g_2) ovat *isometrisiä.* Isometriset monistot ovat Riemannin geometrian kannalta saman objektin erilaisia esitystapoja.

Propositio 3.1. *Riemannin isometria* $\phi\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ *on isometria metristen avaruuksien* (M_1, d_{g_1}) *ja* (M_2, d_{g_2}) *välillä.*

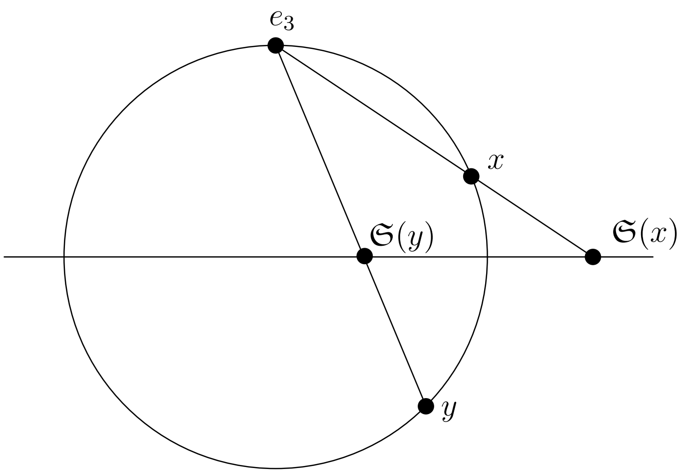
Todistus. Koska ϕ on diffeomorfismi, se antaa bijektion monistojen M_1 ja M_2 sileiden polkujen joukkojen välille. Selvästi $\ell(\phi \circ \gamma) = \ell(\gamma)$ kaikille poluille $\gamma\colon [a, b] \to M_1$, joten väite seuraa helposti Riemannin etäisyysfunktion määritelmästä. $\square$

Esimerkki 3.2 (Pallometriikka)**.** *Stereograafinen projektio* $\mathfrak{S}\colon \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pohjoisnavalta päiväntasaajan tasolle on kuvaus, joka määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{S}^2 - \{e_3\}$

$$\mathfrak{S}(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right).$$

Kuvaus S on diffeomorfismi, joka liittää jokaiseen pisteeseen $x \in \mathbb{S}^2 - \{e^3\}$ sen yksikäsitteisen pisteen tasossa $\mathbb{R}^2$ (ajateltuna hypertasona $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ avaruudessa $\mathbb{R}^3$), joka on pisteiden e_3 ja x kautta kulkevalla suoralla. Stereograafisen projektion käänteiskuvauksen lauseke on

$$\mathfrak{S}^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(2y_1, 2y_2, \|y\|^2 - 1)\,.$$



Olkoon $G_2(p)$ positiividefiniitti matriisi, jolle pätee

$$(\mathfrak{S}^{-1})^* g(X, Y)|_p = X_p^T G_2(p) Y_p\,.$$

Pullback-operaation määritelmän mukaan jokaisessa pisteessä $p \in \mathbb{R}^2$ pätee kaikille $X, Y \in T_q\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} X^T G_2(p) Y &= (\mathfrak{S}^{-1})^* g_{\mathrm{S}}(X, Y) \\ &= g_{\mathrm{S}}((\mathfrak{S}^{-1})_* X, (\mathfrak{S}^{-1})_* Y) \\ &= g_{\mathrm{S}}(D\mathfrak{S}^{-1}(p)X, D\mathfrak{S}^{-1}(p)Y) \\ &= (D\mathfrak{S}^{-1}(p)X)^T D\mathfrak{S}^{-1}(p)Y \\ &= X^T (D\mathfrak{S}^{-1}(p))^T D\mathfrak{S}^{-1}(p)Y \,. \end{aligned}$$

Siis $G_2(p) = (D\mathfrak{S}^{-1}(p))^T D\mathfrak{S}^{-1}(p)$ ja

$$(\mathfrak{S}^{-1})^* g_{\mathrm{S}} = \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}\, g_{\mathrm{E}} = \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}\, ((dx^1)^2 + (dx^2)^2) \,.$$

Stereograafinen projektio on isometria Riemannin monistojen $\mathbb{S}^2 - \{e_3\}$ ja $(\mathbb{R}^2, (\mathfrak{S}^{-1})^* g_S)$ välillä. Sen vuoksi monia pallon pinnan geometrisia tarkasteluja voidaan halutessa tehdä tasossa, joka on varustettu metriikalla $(\mathfrak{S}^{-1})^* g_S$, jota voimme kutsua vaikka *tason pallometriikaksi*. Esimerkiksi 0-keskisten ympyröiden pituudet on helppo laskea metriikassa $(\mathfrak{S}^{-1})^* g_{\mathrm{S}}$: Euklidisella yksikköympyrällä tason pallometriikka yhtyy euklidisen Riemannin metriikan kanssa ja muilla säteillä kerroinfunktio $x \mapsto \frac{4}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}$ on vakio. Saamme siis

$$\ell_{(\mathfrak{S}^{-1})^* g_S}(\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = r\}) = \frac{2\pi}{1 + r^2} \,.$$

Säteiden pituuksien laskeminen on myös suoraviivaista: Koska kierrot ovat ortogonaalikuvauksia ja siis euklidisen avaruuden isometrioita ja pallometriikan kerroinfunktio on invariantti kierroilla, kaikki säteet $t \mapsto t\, x$, $t \geq 0$ ovat yhtä pitkiä. Niiden pituus saadaan tutulla integraalilla

$$\ell = \int_0^\infty \frac{2}{1 + t^2}\, dt = 2 \lim_{t \to \infty} \arctan(t) = \pi \,.$$

Käyrä $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ pallometriikalla varustetussa tasossa voidaan *parametrisoida käyrän pituudella* kuvauksella $\gamma_0 \colon]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2$, joka määritellään $\gamma_0(t) = (\tan(t/2), 0)$. Nythän

$$\dot\gamma_0(t) = \left(\frac{1}{2\cos^2(t/2)}, 0\right)$$

ja on helppo tarkastaa, että $|\dot\gamma(t)| = 1$ kaikilla t. Tällöin kaikille $\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$ pätee $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = b - a$.

Propositio 3.3. *Olkoon (M, g) Riemannin monisto. Riemannin isometriat $f \colon (M, g) \to (M, g)$ muodostavat ryhmän* $\mathrm{Isom}(M, g)$*, jonka laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Kun V on äärellisulotteinen vektoriavaruus (siis lineaarisesti isomorfinen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa) on kätevää samastaa tangenttiavaruus T_pM vektoriavaruuden V kanssa merkitsemällä polun $\alpha_v \colon t \mapsto p + vt$ tangenttivektoria $v_p = \dot\alpha_v(0)$. Käytämme tätä merkintätapaa seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 3.4. Euklidinen avaruus $\mathbb{E}^n$, pallo $\mathbb{S}^n$ ja hyperbolinen avaruus $\mathbb{H}^n$ ovat tärkeitä esimerkkejä Riemannin monistoista. On helppo tarkastaa, että

(1) Ortogonaaliryhmä

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : (Ax|Ay) = (x|x) \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{E}^n\} \\ &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : {}^T\!AA = I_n\} \,. \end{aligned}$$

toimii Riemannin isometrioilla avaruudessa $\mathbb{S}^{n-1}$: Ajatellaan $\mathbb{S}^{n-1}$ euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ upotettuna Riemannin alimonistona kuten esimerkissä 2.2. Ortogonaalikuvauksen A differentiaali on kuvaus $dA\colon T\mathbb{S}^{n-1} \to T\mathbb{S}^{n-1}$,

$$dA(v_p) = (Av)_{Ap} .$$

joten kaikille $u, v \in T_p\mathbb{S}^{n-1}$ pätee

$$g_S(u_p, v_p) = g_S((Au)_{Ap}, (Av)_{Ap}) = g_S(dAu, dAv) .$$

Isometriaryhmä toimii transitiivisesti Riemannin monistolla $\mathbb{S}^n$: Mikä tahansa yksikkövektori $w \in \mathbb{S}^n$ voidaan valita ortonormaalin kannan ensimmäiseksi kantavektoriksi. Tällainen kanta määrää ryhmän $\mathrm{O}(n)$ alkion, joka kuvaa standardikantavektorin e_1 vektoriksi w. Toistamalla sama argumentti dimensiossa $n-2$ saadaan, että isometriaryhmä toimii transitiivisesti differentiaalin kautta yksikkötangenttikimpulla

$$T^1\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in T^1\mathbb{S}^{n-1} : g(v, v) = 1\} .$$

(2) Euklidinen ryhmä

$$\mathrm{E}(n) = \{x \mapsto Ax + b : A \in \mathrm{O}(n), b \in \mathbb{R}^n\}$$

toimii Riemannin isometrioilla avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Jälleen on helppo tarkastaa, että isometriaryhmä toimii transitiivisesti yksikötangenttikimpulla: Olkoon $v_p \in T\mathbb{E}^n$. Tällöin, kuten edellä nähtiin, on ortogonaalikuvaus A_v, jolle $A_v e_1 = v$. Olkoon $C_v(x) = A_v x + b$. Tällöin $C_v e_1 = v$.

(3) Olkoot $b \in \mathbb{R}$ ja $\lambda > 0$. On helppo tarkastaa, että siirto $x \mapsto x + (b, 0)$ ja venytys $x \mapsto \lambda x$ ovat hyperbolisen tason isometrioita. Hyperbolisen tason isometriaryhmä toimii transitiivisesti hyperbolisella tasolla: Olkoon $p \in \mathbb{H}^2$ ja olkoon $D_p(x) = p_2 x + p_1$. Tällöin $D_p(0, 1) = p$.

Tarkastelemalla esimerkiksi pisteen $(0, 1)$ kiinnittävien isometrioiden ryhmää voi näyttää, että hyperbolisen tason isometriaryhmä toimii transitiivisesti differentiaalin kautta yksikkötangenttikimpulla $T^1\mathbb{H}^2$.

Esimerkki 3.5 (Torus)**.** Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio avaruudessa $\mathbb{R}^d$, joka määritellään asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathbb{Z}^d$. Tekijäavaruus $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ on d-ulotteinen *torus*. Torus perii Riemannin moniston rakenteen euklidisesta avaruudesta seuraavalla tavalla: Luonnollinen projektio $\mathrm{pr}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ on lokaali injektio, sen rajoittuma esimerkiksi jokaiseen 1-säteisen avoimeen palloon on injektio.

Olkoon $U_\alpha = \mathrm{pr}(B(\alpha, 1))$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\phi_\alpha = (\mathrm{pr}\,|_{i(B(x,1)})^{-1}$. Kokoelma $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}^n}$, on kartasto toruksella $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Asetetaan jokaisessa lokaalissa koordinaatissa (U_α, ϕ_α) $g = \sum_i dx^i_\alpha \otimes dx^i_\alpha$. Olkoot ϕ_α ja ϕ_β kaksi lokaalia koordinaattia, joiden määrittelyjoukot leikkaavat. Tällöin koordinaatinvaihtokuvaus on siirto $w \mapsto T_k(w) = w + k$ jollain $k \in \mathbb{Z}$, joten metriikoiden g_α ja g_β rajoittumat joukkoon $U_\alpha \cap U_\beta$ yhtyvät. Näin torukselle $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ saadaan Riemannin metriikka g siten, että peitekuvaus pr on lokaali Riemannin isometria.

Harjoitustehtäviä.

3.1. Todista Propositio 3.3.

3.2. Määritä tason euklidisen Riemannin metriikan lauseke napakoordinaateissa.

3.3. Täydennä Esimerkissä 3.2 aloitettu pallonpinnan $\mathbb{S}^2$ kartasto lisäämällä toiseksi kartaksi stereograafinen projektio $\hat{\mathfrak{S}}$ etelänavalta. Määritä kartanvaihtokuvauksen lauseke ja tarkasta laskemalla, että se on isometria Riemannin monistojen $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, (\mathfrak{S}^{-1})^* g_{\mathrm{S}})$ ja $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, (\hat{\mathfrak{S}}^{-1})^* g_{\mathrm{S}})$ välillä.

3.4. Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to (M,g)$ sileä polku, jolle pätee $\dot\gamma(t) \neq 0$ kaikilla $t \in]a,b[$. Osoita, että on sileä aidosti kasvava kuvaus $h\colon [0,\ell(\gamma)]$, jolle $|\frac{d}{dt}(\gamma \circ h)(t)| = 1$ kaikille t. Polku $\gamma \circ h$ on polun γ *parametrisointi kaaren pituudella*

3.5. Osoita, että 1-ulotteisessa Riemannin geometriassa ei ole juurikaan tutkittavaa: Olkoot (M_1,g_1) ja (M_2,g_2) 1-ulotteisia Riemannin monistoja ja olkoot $p \in M_1$, $q \in M_2$. Osoita, että pisteillä p ja q on avoimet ympäristöt $U \ni p$ ja $V \ni q$, joiden välillä on Riemannin isometria.

3.6. Osoita, että kuvaukset $x \mapsto (-x_1, x_2)$ ja $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ ovat hyperbolisen tason Riemannin isometrioita.

3.7. Sanotaan, että Riemannin monisto (M,g) on *symmetrinen avaruus*, jos jokaisella $p \in M$ on Riemannin moniston (M,g) Riemannin isometria ι_p, jolle pätee $\iota_p(p) = p$ ja $d\iota_p|_{T_pM} = -\,\mathrm{id}$. Osoita, että Riemannin monistot $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2$ ja $\mathbb{H}^2$ ovat symmetrisiä avaruuksia.

3.8. Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoot (U,x) ja (V,y) kaksi lokaalia koordinaattia, joille $p \in U \cap V$. Miten Riemannin metriikan g lausekkeet näissä kahdessa koordinaatissa liittyvät toisiinsa?

4. Levi-Civitan konnektio

Ajatellaan vektorikenttä $X \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$ kuvaukseksi $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tällöin differentiaalilaskennasta tuttu suuntaisderivaatta $DY\,X$ antaa jokaisessa pisteessä $p \in \mathbb{E}^n$ vektorikentän Y muutoksen toisen vektorikentän X antamaan suuntaan X_p. Tutustumme nyt konnektioihin, jotka antavat suuntaisderivaatan yleistyksen sileille monistoille.

Olkoon M sileä monisto. Kuvaus $\nabla\colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, on *affiini konnektio*, jos

($\nabla 1$) Kuvaus $W \mapsto \nabla_V W$ on $\mathbb{R}$-lineaarinen kaikilla V,
($\nabla 2$) Kuvaus $V \mapsto \nabla_V W$ on $\mathscr{F}(M)$-lineaarinen kaikilla W,
($\nabla 3$) Pätee Leibnitzin sääntö $\nabla_X(fY) = (X\,f)Y + f\nabla_X Y$ kaikille $f \in \mathscr{F}(M)$.
($\nabla 4$) Kuvauksella ∇ *ei ole torsiota*: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Vektorikenttä $\nabla_X Y$ on vektorikentän Y *kovariantti differentiaali* vektorikentän X *suuntaan*

Esimerkki 4.1. Suuntaisderivaatta

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y = DY\,X = XY = \sum_i X(Y^i)\partial_i = \sum_{i,j} X^j \partial_j Y^i \partial_i$$

on affiini konnektio Riemannin monistolla $\mathbb{E}^n$. Huomaa vektorikenttien X ja Y järjestys lausekkeessa - yleensä $DY\,X \neq DX\,Y$. Ominaisuudet ($\nabla 1$)-($\nabla 3$) ovat suoraan tuttuja differentiaalilaskennan kurssilta.

Tällä kurssilla emme tarkastele konnektioita yleisessä tapauksessa vaan keskitymme Riemannin geometrian kannalta keskeisen Levi-Civitan konnektion tarkasteluun.[¶] Sanotaan, että konnektio ∇ on *yhteensopiva metriikan kanssa*, jos kaikille $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ pätee

$$X\,g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\,.$$

Lause 4.2. *Jokaisella Riemannin monistolla on täsmälleen yksi konnektio, joka on yhteensopiva Riemannin metriikan kanssa.*

Todistus. Todistus on havainnollisinta tehdä osoittamalla ensin, että väitteen mukaisia konnektioita on korkeintaan yksi. Yksikäsitteisyystodistus antaa niin paljon tietoa väitteen mukaisesta konnektiosta, että voidaan osoittaa, että haluttu konnektio todellakin on.

Käyttämällä määritelmän ehtoa ($\nabla 4$) yhteensopivuusehdon viimeiseen termiin, ehto saadaan muotoon

$$X\,g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z])\,.$$

Soveltamalla tätä yhtälöä vektorikenttien X, Y, Z kaikkiin syklisiin permutaatioihin ja käyttämällä Riemannin metriikan g symmetrisyttä saadaan

$$\begin{aligned}
&X\,g(Y, Z) + Y\,g(Z, X) - Z\,g(X, Y)\\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y, X])\\
&\qquad\qquad - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Y Z) - g(X, [Z, Y])\\
&= 2\,g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(Z, [Y, X]) - g(X, [Z, Y])\,.
\end{aligned}$$

Järjestämällä tämän yhtälön termit toisella tavalla saadaan tärkeä

[¶]Konnektiot voidaan määritellä myös yleisemmässä vektorikimppujen tilanteessa. Katso esimerkiksi [Lee1, Luku 4].

$$\text{(Koszulin kaava)}\quad 2g(\nabla_X Y, Z) = X\,g(Y,Z) + Y\,g(Z,X) - Z\,g(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])\,.$$

Koska konnektio esiintyy vain yhtälön vasemmalla puolella ja tämä yhtälö pätee kaikilla vektorikentillä, niin ehdon toteuttavia konnektioita voi olla korkeintaan yksi.

Harjoitustehtävässä 2.4 osoitimme, että kuvaus $\Phi\colon \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}^*(M)$, joka liittää vektorikenttään $W \in \mathscr{X}(M)$ 1-muodon L_W, joka määritellään

$$L_W Z = g(W,Z),$$

on isomorfismi. Harjoituksissa osoitetaan, että Koszulin kaavan oikean puolen antama kuvaus $L_{X,Y}\colon \mathscr{X}(M) \to \mathscr{F}(M)$

$$L_{X,Y}(Z) = X\,g(Y,Z) + Y\,g(Z,X) - Z\,g(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])$$

on $\mathscr{F}(M)$-lineaarinen, siis 1-muoto. Asetetaan $\nabla^g_X Y = \Phi^{-1}(L_{X,Y})$. Vektorikenttä $\nabla^g_X Y$ siis toteuttaa ainoana vektorikenttänä Koszulin kaavan.

Tarkastetaan, että ∇ on todellakin konnektio: Ehto ($\nabla 1$) on ilmeinen. Ehdon ($\nabla 2$) tarkastamiseksi olkoon $f \in \mathscr{F}(M)$. Koszulin kaavan mukaan kaikille $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ pätee (käyttämällä Riemannin metriikan $\mathscr{F}(M)$-lineaarisuutta, Leibnitzin sääntöä ja Lien tulon ominaisuuksia)

$$\begin{aligned}
&2g(\nabla_{fX} Y, Z)\\
&= fX\,g(Y,Z) + Y\,g(Z,fX) - Z\,g(fX,Y)\\
&\qquad\qquad - g(Y,[fX,Z]) - g(Z,[Y,fX]) + g(fX,[Z,Y])\\
&= fX\,g(Y,Z) + Yf\,g(Z,X) + fY\,g(Z,X) - Zf\,g(X,Y) - fZ\,g(X,Y)\\
&\qquad - g(Y, f[X,Z] - ZfX) - g(Z,[Y,X] + YfX) + g(fX,[Z,Y])\\
&= fX\,g(Y,Z) + Yf\,g(Z,X) + fY\,g(Z,X) - Zf\,g(X,Y) - fZ\,g(X,Y)\\
&\qquad - g(Y, f[X,Z]) + Zfg(Y,X) - g(Z,[Y,X]) - Yfg(Z,X) + g(fX,[Z,Y])\\
&= f\big(X\,g(Y,Z) + Y\,g(Z,X) - Z\,g(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])\big)\\
&= 2fg(\nabla_X Y, Z) = 2g(f\nabla_X Y, Z)\,,
\end{aligned}$$

mistä väite ($\nabla 2$) seuraa. Loput ominaisuudet tarkastetaan harjoituksissa. □

Seuraus 4.3. *Jokaisella sileällä monistolla on konnektio.*

Todistus. Proposition 2.4 nojalla jokaisella sileällä monistolla on Riemannin metriikka ja Lauseen 4.2 nojalla sillä on siis Levi-Civitan konnektio. □

Lauseen 4.2 yksilöimää konnektiota $\nabla = \nabla^g$ kutsutaan *Levi-Civitan konnektioksi* tai *kanoniseksi konnektioksi.*

Esimerkki 4.4. Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ Levi-Civitan konnektio on tavallinen suuntaisderivaatta:

$$\nabla_X Y = DY\,X\,.$$

Koordinaateilla laskemista varten määrittelemme *Christoffelin symbolit* Γ^k_{ij} konnektion koordinaattivektoreilla saamien arvojen kertoimina:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}\,\partial_k\,.$$

Sanotaan, että vektorikenttä Y on yhdensuuntainen (paralleeli), jos $\nabla_X Y = 0$ kaikille $X \in \mathscr{X}(M)$. Christoffelin symbolit mittaavat, kuinka paljon koordinaattivektorikentät poikkeavat yhdensuuntaisesta.

Lemma 4.5. $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\big(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\big)$.

Todistus. Koska koordinaattivektorikentät kommutoivat, Koszulin kaava antaa

$$2\sum_{\ell=1}^n \Gamma^\ell_{ij}\, g_{\ell m} = 2\, g\big(\sum_{k=1}^n \Gamma^\ell_{ij}\, \partial_\ell, \partial_m\big) = 2\, g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_m) = \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m},$$

josta kertomalla metrisen tensorin käänteisellä saadaan väite. □

Lemman 4.5 perusteella saadaan Levi-Civitan konnektion lauseke koordinaateissa:

Propositio 4.6. *Kaikille $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ pätee*

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_i XY^i\partial_i + \sum_k Y^k \nabla_X \partial_k \\ &= \sum_i \Big(\sum_j X^j\partial_j Y^i + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}X^jY^k\Big)\partial_i\,.\end{aligned}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 4.7. (1) Riemannin monistolla $\mathbb{E}^n$ Christoffelin symbolit ovat kaikki nollia koska metrinen tensori $g_{ij} = \delta_{ij}$ on vakio. Saman näkee myös vertaamalla Proposition 4.6 ja Esimerkin 4.1 lausekkeita.

(2) Hyperbolisen tason puolitasomallin Riemannin metriikalla

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_2^2}$$

ja helppo lasku osoittaa, että Christoffelin symbolit ovat

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0\,,\\ \Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{x_2}\\ \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{x_2}\,.\end{aligned}$$

Esimerkiksi (käyttämällä heti sitä, että vain diagonaaliset alkiot ovat nollasta poikkeavia)

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{1m}\big(\frac{\partial g_{2m}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1m}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^m}\big)\\ &= \frac{1}{2} g^{11}\big(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}\big)\\ &= \frac{1}{2} g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -\frac{1}{x_2}\,.\end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä.

4.1. Osoita, että suuntaisderivaatta $(X, Y) \mapsto DY\,X$ on Levi-Civitan konnektio Riemannin monistolla $\mathbb{E}^n$. Riittää tarkastaa, että se on torsioton ja yhteensopiva euklidisen Riemannin metriikan kanssa.

4.2. Olkoot $X, Y \in \mathscr{F}(M)$. Osoita, että kuvaus $L_{X,Y} \colon \mathscr{X}(M) \to \mathscr{F}(M)$,

$$L_{X,Y}(Z) = X\,g(Y,Z) + Y\,g(Z,X) - Z\,g(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])$$

on $\mathscr{F}(M)$-lineaarinen.

4.3. Tarkasta affiinin konnektion ominaisuudet ($\nabla 3$) ja ($\nabla 4$) ja konnektion yhteensopivuus metriikan kanssa Lauseen 4.2 todistuksessa.

4.4. Todista Propositio 4.6.

4.5. Tarkasta, että Proposition 4.6 antama lauseke määrittelee affiinin konnektion.

4.6. Määritä Levi-Civitan konnektio euklidisen tason napakoordinaateissa Christoffelin symbolien avulla.

4.7. Olkoon $\bar{\nabla} \colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ kuvaus, jolla on affiinin konnektion määritelmän ominaisuudet (1)–(3). Olkoon $T \colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ kuvaus, joka määritellään

$$T(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y]\,.$$

Osoita, että T on tensori (yleistetyssä mielessä). Tätä kuvausta kutsutaan konnektion $\bar{\nabla}$ *torsiotensoriksi.*

Luvussa 3 samastimme vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ jokaisen tangenttiavaruuden $T_p\mathbb{R}^n$ euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ kanssa "luonnollisella tavalla", joka vastaa affiinien suorien $t \mapsto x_0 + t\,v_0$ yhdensuuntaisuuden käsitettä. Differentioituvalla monistolla, jolle ei ole annettu lisärakennetta ei ole tällaista luonnollista eri pisteiden tangenttiavaruuksien identifiointia. Luvussa 4 tarkastellun Levi-Civitan konnektion avulla saamme samastuksen, joka tosin riippuu käytettävästä polusta.

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $\gamma\colon I \to M$ sileä polku. Kuvaus $X\colon I \to TM$, jolle pätee $\pi \circ X = \gamma$ on *vektorikenttä polkua γ pitkin.* Vektorikentät polkua γ pitkin muodostavat $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathscr{X}(\gamma)$.

Esimerkki 5.1. (1) Olkoon M sileä monisto. Polun $\gamma\colon I \to M$ tangenttivektorit määräävät vektorikentän $\dot\gamma\colon I \to M$ polkua γ pitkin.

(2) Olkoon $\gamma\colon I \to M$ polku ja olkoon $X \in \mathscr{X}(M)$. Tällöin vektorikentän X *rajoittuma* polulle γ on $X|_\gamma = X \circ \gamma \in \mathscr{X}(\gamma)$.

Seuraavan tuloksen avulla voimme määritellä mielekkäällä tavalla derivaatan vektorikentille käyrää pitkin. Proposition kohdan (2) ehto on ilmaistu affiinin konnektion avulla. Tässä on hyvä huomata, että ehdon (∇1) nojalla kuvaus $V \mapsto \nabla_V W$ on tensori yleistetyssä mielessä. Tällä tensorilla on arvo jokaisessa pisteessä $p \in M$ samaan tapaan kuin luvussa 1.5. Erityisesti jokaiselle $v \in T_pM$ on yksikäsitteinen hyvin määritelty tangenttivektori $\nabla_v W \in T_pM$.

Sovellusten kannalta on riittävää rajoittua polkuihin, joiden derivaatta on nollasta poikkeava kaikkialla. Sanomme tällaista polkua *säännölliseksi.* Jatkossa tarkastelemamme polut ovat säännöllisiä tai vakiopolkuja.

Propositio 5.2 (Kovariantti derivaatta käyrää pitkin)**.** *Olkoon M Riemannin monisto ja olkoon $\gamma\colon I \to M$ säännöllinen polku. On täsmälleen yksi $\mathbb{R}$-lineaarikuvaus*

$$\frac{D}{dt}\colon \mathscr{X}(\gamma) \to \mathscr{X}(\gamma)\,,$$

jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) kaikille $f \in \mathscr{F}(I)$ ja kaikille $Y \in \mathscr{X}(\gamma)$ pätee Leibnitzin sääntö

$$\frac{D}{dt}(fY) = f'\,Y + f\,\frac{D}{dt}Y$$

(ii) kaikille $X \in \mathscr{X}(M)$ pätee

$$\frac{D}{dt}X|_{\gamma(t)} = \nabla_{\dot\gamma(t)}X\,.$$

Todistus. Osoitetaan ensin yksikäsitteisyys: Tarkastellaan tilannetta, jossa polun γ kuva sisältyy yhteen lokaaliin koordinaattiympäristöön. Tällöin käyttämällä tangenttiavaruuden esitystä lokaaleissa koordinaateissa saadaan jokaisella $t \in I$

$$Y(t) = \sum_i Y^i(t)\partial_i|_{\gamma(t)}.$$

Vektorikenttä polkua pitkin on nyt siis esitetty lineaarikombinaationa koko koordinaattiympäristössä määriteltyjen vektorikenttien rajoittumista.

Kuvauksen $\frac{D}{dt}$ $\mathbb{R}$-lineaarisuuden ja Leibnitzin säännön nojalla saamme

$$\frac{D}{dt}Y = \frac{D}{dt}\sum_i Y^i\partial_i = \sum_i \frac{D}{dt}Y^i\partial_i = \sum_i (Y^i)'\partial_i + \sum_i Y^i\frac{D}{dt}\partial_i\,.$$

Koska koordinaattivektorikentät on määritelty koko ympäristössä ja voidaan ajatella koko monistolla määritellyiksi töyssyfunktion avulla kuten Lemmassa 1.4 tehtiin, ominaisuus (ii) antaa

$$\boxed{(2) \qquad \frac{D}{dt}Y = \sum_i (Y^i)'\partial_i + \sum_i Y^i \nabla_{\gamma'}\partial_i \,.}$$

Siis Levi-Civitan konnektio määrää $\mathbb{R}$-lineaarikuvauksen $\frac{D}{dt}$ yksikäsitteisesti, jos tällainen kuvaus on.

Määritellään $\frac{D}{dt}$ lausekkeella (2) ja osoitetaan, että se on haluttu kuvaus. Operaation $\mathbb{R}$-lineaarisuus on selvä. Olkoot sitten $X \in \mathscr{X}(\gamma)$ ja $f \in \mathscr{F}(\gamma)$. Funktioiden Leibnitzin säännöllä saamme

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}(fX) &= \sum_i (f\,X^i)'\partial_i + \sum_i f\,X^i \nabla_{\gamma'}\partial_i \\ &= f' \sum_i X^i \partial_i + f\,\sum_i (X^i)'\partial_i + \sum_i f\,X^i \nabla_{\gamma'}\partial_i \\ &= f'X + f\frac{D}{dt}X \,,\end{aligned}$$

joten ehto (i) pätee. Olkoon Y vektorikentän $X = \sum X^i \partial_i$ rajoittuma polulle γ. Tällöin käyttämällä Proposition 4.6 ensimmäistä yhtälöä kolmannen yhtälön päättelemiseksi alla saamme

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}Y(t) &= \sum_i \frac{d}{dt}X^i(\gamma(t))\partial_i + \sum_i X^i(\gamma(t))\nabla_{\dot\gamma(t)}\partial_i \\ &= \sum_i \dot\gamma(t) X^i \partial_i + \sum_i X^i(\gamma(t))\nabla_{\dot\gamma(t)}\partial_i \\ &= \nabla_{\dot\gamma(t)} X \,,\end{aligned}$$

joten myös (ii) pätee. □

Edellisessä tuloksessa määriteltyä $\mathbb{R}$-lineaarista operaattoria $\frac{D}{dt}$ sanotaan *indusoiduksi kovariantiksi derivaataksi*. Sanomme, että vektorikenttä X pitkin polkua γ on *yhdensuuntainen*, jos $\frac{D}{dt}X = 0$.

Propositio 5.3. *Olkoon M Riemannin monisto ja olkoon $\gamma\colon I \to M$ säännöllinen polku. Olkoon $t_0 \in I$ ja olkoon $v \in T_{\gamma(t_0)}M$. On täsmälleen yksi yhdensuuntainen sileä vektorikenttä $X \in \mathscr{X}(\gamma)$, jolle $X(t_0) = v$.*

Todistus. Lokaaleissa koordinaateissa Christoffelin symbolien avulla kirjoitettuna yhdensuuntaisuusehto on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä

$$(3) \qquad 0 = \frac{D}{dt}X = \sum_i (X^i)'\partial_i + \sum_{i,j,k} \Gamma^i_{jk}\circ\gamma\, X^k \frac{d}{dt}(x^j\circ\gamma)\partial_i \,.$$

Tällä yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu koko määrittelyvälillään, katso esimerkiksi [Par, Lause 8.1] tai [Har, Cor. III.5.1]. □

Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to M$ säännöllinen polku. Proposition 5.3 nojalla määritellään *yhdensuuntaissiirto polkua γ pitkin* $\mathrm{P}_\gamma\colon T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$ asettamalla jokaiselle $v \in T_{\gamma(a)}M$ tangenttivektoriksi $\mathrm{P}_\gamma(v) \in T_{\gamma(b)}M$ tangenttivektorin v määräämän yksikäsitteisen yhdensuuntaisen vektorikentän (polkua γ pitkin) arvo pisteessä b.

Seuraava ominaisuus on helppo tarkastaa ketjusäännön avulla:

Propositio 5.4. *Yhdensuuntaissiirto polkua pitkin on riippumaton polun parametrisoinnista.* □

Seuraava ominaisuus helpottaa säännöllisten polkujen tarkastelua:

Lemma 5.5. *Olkoon $\gamma\colon [a,b]$ säännöllinen polku. Olkoot $a < a_0 < b_0 < b$ siten, että $\gamma|_{[a,b]}$ sisältyy yhteen koordinaattiympäristöön ja polku ei leikkaa itseään. Olkoon $f \in \mathscr{F}(]a,b[)$. Tällöin on $F \in \mathscr{F}(M)$, jolle $F(\gamma(t)) = f(t)$ kaikilla $t \in [a_0, b_0]$.*

Todistus. Katso esimerkiksi [Hel, Lemma I.5.1]. □

Säännöllisiä polkuja tarkastellessa rajoittumalla riittävän lyhyelle määrittelyvälille on jatkuvat funktiot $\widetilde{Y}^i \in \mathscr{F}(M)$, joille $\widetilde{Y}^i(\gamma(t)) = Y^i(t)$.

Lemma 5.6. *Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $\gamma\colon I \to M$ säännöllinen polku. Olkoot $Z_1, Z_2 \in \mathscr{X}(\gamma)$. Tällöin*

$$\frac{d}{dt} g(Z_1, Z_2) = g(\frac{D}{dt} Z_1, Z_2) + g(Z_1, \frac{D}{dt} Z_2)\,.$$

Todistus. Lemman 5.5 nojalla voimme olettaa, että $Z_1 = \widetilde{Z}_1|_\gamma$ ja $Z_1 = \widetilde{Z}_1|_\gamma$ joillain $\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2 \in \mathscr{X}(M)$. Muistamme kurssilta DG, että

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} g(Z_1(t), Z_2(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} g(\widetilde{Z}_1(\gamma(t)), \widetilde{Z}_2(\gamma(t))) = \dot\gamma(t_0) g(Z_1, Z_2)\,.$$

Olkoon X vektorikenttä, jolle $X(\gamma(t_0)) = \dot\gamma(t_0)$. Levi-Civitan konnektion yhteensopivuuden ja indusoidun kovariantin derivaatan ominaisuuden (ii) nojalla

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} g(Z_1, Z_2) &= X|_{\gamma(t_0)}\, g(Z_1, Z_2) \\
&= g(\nabla_{\dot\gamma(t_0)} Z_1, Z_2)(\gamma(t_0)) + g(z_1, \nabla_{\dot\gamma(t_0)} Z_2)(\gamma(t_0)) \\
&= g(\frac{D}{dt} Z_1, Z_2)(\gamma(t_0)) + g(Z_1, \frac{D}{dt} Z_2)(\gamma(t_0))\,.
\end{aligned}$$ □

Propositio 5.7. *Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $\gamma\colon [a,b] \to M$ säännöllinen polku. Yhdensuuntaissiirto $P\colon (T_{\gamma(a)}M, g|_{\gamma(a)}) \to (T_{\gamma(b)}M, g|_{\gamma(b)})$ on lineaarinen isometria.*

Todistus. Kuvaus P_γ on lineaarinen isomorfismi koska se määräytyy lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisusta. Se on isomorfismi Lemman 5.6 nojalla, koska yhdensuuntaisten vektorikenttien $Z_1, Z_2 \in \mathscr{X}(\gamma)$ indusoidut kovariantit derivaatat ovat määritelmän mukaan nollia. □

Proposition 5.7 nojalla siis suuntaissiirto säilyttää tangenttivektorien pituudet ja niiden väliset kulmat.

Esimerkki 5.8. (1) Euklidisessa avaruudessa *indusoitu kovariantti derivaatta* $\frac{D}{dt}$ on polusta riippumaton: Kaikille vektorikentille polkua γ pitkin pätee $\frac{D}{dt}X(t) = \dot X(t)$. Yhdensuuntaisuusehdon

$$\begin{cases} \dot X(t) = 0 \\ X(t_0) = v \end{cases}$$

ratkaisu on vakiokenttä $X(t) = v$, joten yhdensuuntaissiirto on identtinen kuvaus luonnollisissa koordinaateissa.

(2) Tarkastellaan yhdensuuntaissiirtoa hyperbolisessa tasossa $\mathbb{H}^2$ imaginaariakselia pitkin. Olkoon $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ polku $\gamma(t) = e^t$. Etsitään yhdensuuntainen vektorikenttä $X \in \mathscr{X}(\gamma)$,

jolle $X(0) = X_0 \in T_{(0,1)}$ on mikä tahansa tangenttivektori. Esimerkissä 4.7 määritimme hyperbolisen tason Christoffelin symbolit, joiden avulla saamme differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{cases} \dot{X}^1 + \sum_{jk} \Gamma^1_{jk} \circ \gamma \, X^k \dot{\gamma}^j = 0 \\ \dot{X}^2 + \sum_{jk} \Gamma^2_{jk} \circ \gamma \, X^k \dot{\gamma}^j = 0 \end{cases} .$$

Yhtälöparin summat yksinkertaistuvat huomattavasti, koska $\gamma^2 \equiv 0$ ja monet Christoffelin symboleista ovat myös nollia. Sievennysten jälkeen jää yhtälöpari $\dot{X} - X = 0$, jonka ratkaisu alkuarvolla $X(0) = X_0$ on $X(t) = e^t X_0$.

Suuntaissiirretyt tangenttivektorit ovat siis samastuksen $T_pM = \mathbb{R}^2$ jälkeen yhdensuuntaisia alkuperäisten kanssa mutta niiden euklidinen pituus saadaan kertomalla alkuperäinen pituus kertoimella e^t. Mutta huomaa, että $\gamma(t)_2 = e^t$, joten hyperbolinen pituus säilyy kuten pitääkin.

Harjoitustehtäviä.

5.1. Määritä yhdensuuntaissiirto hyperbolisessa tasossa polkua $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$, $\gamma(t) = (t, 1)$ pitkin. Tarkastele erityisesti, miten polun γ tangenttivektori $\dot{\gamma}(0)$ kuvautuu suuntaissiirrossa.

5.2. Vertaa yhdensuuntaissiirtoa pitkin polkuja $\gamma_0\colon]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_0(t) = (\tan(t/2), 0)$$

and $\gamma_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$$

tasossa $\mathbb{R}^2$, joka on varustettu euklidisella Riemannin metriikalla ja toisaalta Esimerkissä 3.2 tarkastellulla pallometriikalla $g_S = \frac{4}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}\, g_{\mathrm{E}}$.

5.3. Määritä suuntaissiirto seuraavia pallon $\mathbb{S}^2$ kolmioita pitkin. Aloita etelänavalta. Kulje päiväntasaajalle sitä isoympyrää pitkin, joka kulkee Greenwichin kautta. Kulje päiväntasaajaa pitkin itään ϕ pituusastetta. Siirry sitten takaisin etelänavalle isoympyrää pitkin.

Riemannin moniston (M, g) *geodeesi* on polku $\gamma\colon I \to M$, jonka tangenttivektorikenttä $\dot\gamma \in \mathscr{X}(\gamma)$ on yhdensuuntainen polkua γ pitkin. Geodeesit ovat siis *geodeesisen differentiaaliyhtälön* $\frac{D}{dt}\dot\gamma = 0$ ratkaisuja. Erityisesti, jos γ on geodeesi, niin sen *nopeus* $|\dot\gamma|$ on vakio Proposition 5.7 nojalla.

Tarkastellaksemme kysymystä geodeesien olemassaolosta on hyvä kirjoittaa geodeesin määrittelevä differentiaaliyhtälö koordinaateissa, jolloin differentiaaliyhtälöiden teoria on käytettävissä. Lokaaleissa koordinaateissa kirjoitettuna geodeesinen differentiaaliyhtälö on yhtälön (3) perusteella

$$\sum_i (x^i \circ \gamma)'\partial_i + \sum_{i,j,k} \Gamma^i_{jk}\circ\gamma \,\frac{d}{dt}(x^k \circ \gamma)\frac{d}{dt}(x^j \circ \gamma)\partial_i = 0\,. \tag{4}$$

Yhtälö (4) on tapana kirjoittaa lyhyemmin jättämällä polku γ merkitsemättä. Tällöin etsitään kuvausta $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $I \subset \mathbb{R}$, joka toteuttaa

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{jk} \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0\,, 1 \le i \le n\,.$$

Tämä yksinkertaistaa merkintöjä ja vastaa differentiaaliyhtälöiden tavallista käytäntöä. Geodeesinen differentiaaliyhtälö on toisen kertaluvun epälineaarinen differentiaaliyhtälö. Picardin ja Lindelöfin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen ja sileystarkastelujen avulla saadaan tärkeä tulos.

Lause 6.1. *Olkoon M Riemannin monisto ja olkoon $p \in M$. Tällöin on pisteen p avoin ympäristö $U \subset M$ ja $\delta > 0$ siten, että jokaisella $q \in U$ ja jokaisella $v \in T_qM$, $|v| < \delta$, on yksikäsitteinen geodeesi γ_v, joka on määritelty välillä $[-1, 1]$, jolle $\gamma_v(0) = q = \pi(v)$ ja $\dot\gamma_v(0) = v$.*

Todistus. Jokaisella alkuarvotehtävällä, jossa kiinnitetään tangenttivektori $v_0 \in T_{p_0}M$ (siis paikka ja suunta, koordinaattiesityksessä piste x_0 koordinaattikuvauksen kuvajoukossa ja ensimmäisen derivaatan arvo $y_0 \in \mathbb{R}^n$) jollain ajanhetkellä t_0, on yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, $\delta > 0$. Lisäksi alkuarvotehtävän ratkaisut riippuvat jatkuvasti alkuarvoista. Katso esimerkiksi [Par, Luku 4.2] tai [Har, Luvut II ja V]. □

Geodeesisella alkuarvotehtävällä on maksimaalinen määrittelyväli. Tällä välillä määriteltyä ratkaisua kutsutaan *maksimaaliseksi geodeesiksi*. Riemannin monisto, jonka jokaisen maksimaalisen geodeesin määrittelyväli on $\mathbb{R}$, on *geodeesisesti täydellinen*.

Lemma 6.2. *Olkoon γ_v tangenttivektorin $v \in T(M)$ määräämä maksimaalinen geodeesi ja olkoon $c \in \mathbb{R}$. Tällöin $\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$ kaikille t geodeesin γ määrittelyjoukossa.*

Todistus. Olkoon $\bar\gamma(t) = \gamma_v(ct)$. Tällöin $\dot{\bar\gamma}(t) = c\dot\gamma_v(t)$ kaikilla t, joten erityisesti pätee $\dot{\bar\gamma}(0) = c\dot\gamma_v(0) = cv$. Lisäksi on helppo tarkastaa sijoittamalla, että $\bar\gamma$ on geodeesisen differentiaaliyhtälön ratkaisu. Väite seuraa nyt ratkaisun yksikäsitteisyydestä. □

Esimerkki 6.3. (1) Euklidiset suorat ovat euklidisen avaruuden geodeesit. Geodeesinen differentiaaliyhtälö on nyt $\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$, ja sen ratkaisut ovat täsmälleen kuvaukset $t \mapsto at + b$ joillain $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) Millä tahansa Riemannin monistolla M ja millä tahansa pisteellä p tangenttivektoriangenttivektori $0_p \in T_pM$ määrää vakiokuvauksen $t \mapsto p$, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

Määritelmänsä nojalla geodeesit ovat *suoria* polkuja. Esimerkin 6.3 nojalla ne ovat euklidisen avaruuden suorien (lokaaleja) vastineita.

Propositio 6.4 (Levi-Civitan konnektion luonnollisuus)**.** *Olkoon $\phi\colon (M,g)\to(N,h)$ lokaali Riemannin isometria. Tällöin*

$$\nabla^h_{\phi_* X}\phi_* Y = \phi_*(\nabla^g_X Y)$$

kaikille $X, Y \in \mathscr{X}(M)$

Todistus. Käytetään Koszulin kaavaa, pullbackin määritelmää ja toisiinsa liittyvien vektorikenttien määritelmää ja niiden yhteensopivuutta Lien tulon kanssa:

$$\begin{aligned}
&2h(\nabla^h_{d\phi X} d\phi Y, d\phi Z)(\phi(p))\\
&\quad= d\phi X|_{\phi(p)}\, h(d\phi Y, d\phi Z) + d\phi Y|_{\phi(p)}\, h(d\phi Z, d\phi X) - d\phi Z|_{\phi(p)}\, h(d\phi X, d\phi Y)\\
&\qquad -h(d\phi Y, [d\phi X, d\phi Z])(\phi(p)) - h(d\phi Z, [d\phi Y, d\phi X])(\phi(p)) + h(d\phi X, [d\phi Z, d\phi Y])(\phi(p))\\
&\quad= X|_p\, g(Y,Z) + Y|_p\, g(Z,X) - Z|_p\, g(X,Y)\\
&\qquad\qquad -g(Y,[X,Z])(p) - g(Z,[Y,X])(p) + g(X,[Z,Y])(p)\\
&\quad= 2g(\nabla^g_X Y, Z) = 2h(d\phi \nabla^g_X Y, d\phi Z)\,.
\end{aligned}$$

Koska ϕ on isometria, väite seuraa Levi-Civitan konnektion yksikäsitteisyydestä. □

Propositio 6.5. *Olkoon $\phi\colon M\to N$ lokaali isometria. Olkoon γ geodeesi monistolla M. Tällöin $\phi\circ\gamma$ on geodeesi monistolla N.*

Todistus. Seuraa Levi-Civitan konnektion luonnollisuudesta, Propositio 6.4. □

Esimerkki 6.6. Olkoon $\sim_1$ ekvivalenssirelaatio tasossa $\mathbb{R}^2$, joka määritellään asettamalla $x\sim_1 y$, jos ja vain jos $x-y\in\mathbb{Z}\times\{0\}$. Kuvaus $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^2\sim_1$ on lokaali isometria euklidisesta tasosta euklidiselle sylinterille $C_1=\mathbb{E}^2/\sim_1$, jonka Riemannin metriikka määritellään kuten Esimerkissä 3.5.

Jos $L_{a,b}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{E}^2$, $a,b\in\mathbb{R}^2$ on geodeesi

$$L_{a,b}(t) = a + b\,t$$

euklidisessa tasossa $\mathbb{E}^2$, niin Proposition 6.5 nojalla $\mathrm{pr}_1\circ L$ on geodeesi Riemannin monistolla C_1. Huomaa, että $\mathrm{pr}_1\circ L_{a,b}$ on *jaksollinen* eli *suljettu* geodeesi täsmälleen silloin, kun $b\in\mathbb{R}\times\{0\}$:

$$\mathrm{pr}_1\circ L_{a,b}(t+\frac{k}{b}) = \mathrm{pr}_1(a+bt+k) = \mathrm{pr}_1\circ L_{a,b}(t)$$

kaikille $k\in\mathbb{Z}$. Muilla parametrin b arvoilla geodeesit eivät ole suljettuja.

Vastaavasti, jos $\mathrm{pr}_2\colon \mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ on esimerkissä 3.5 tarkasteltu lokaali peitekuvaus nähdään, että geodeesi $\mathrm{pr}_2\circ L_{a,b}$ on suljettu, jos ja vain jos $\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Muutoin geodeesi(n) $\mathrm{pr}_2\circ L_{a,b}$ (kuvajoukko) on tiheä.

Esimerkki 6.7 (Geodeesit pallolla)**.** Pallon $\mathbb{S}^2$ isoympyrät parametrisoituna kaaren pituudella ovat täsmälleen Riemannin moniston $\mathbb{S}^2$ geodeesit, joiden nopeus on 1. Yksityiskohdat tehdään harjoituksissa.

Esimerkki 6.8 (Geodeesit hyperbolisessa tasossa)**.** Polku $\gamma_0\colon\mathbb{R}\to\mathbb{H}^2$, $\gamma_0(t)=(0,e^t)$ on geodeesi, jonka nopeus on 1 ja sille pätee $\gamma_0(0)=(0,1)$ ja $\gamma_0'(0)=(0,1)_{(0,1)}$.

Olkoon $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ja olkoon ι_α inversio ympyrässä, jonka keskipiste on $(\cot\alpha,0)$. On helppo tarkastaa, että ι_α on isometria, joka kiinnittää pisteen $(0,1)\in\mathbb{H}^2$. Sen differentiaali $d\iota_\alpha(0,1)$ on peilaus suoran suhteen, joka muodostaa kulman α vektorin $(0,1)_{(0,1)}$ kanssa. Siis jokaiselle $v\in T_{(0,1)}\mathbb{H}^2$, jolle $|v|=1$, on isometria ι siten, että $\iota(0,1)=(0,1)$ ja $d\iota((0,1)_{(0,1)})=v$.

Olkoon $v\in TM$, $|v|=1$. Tällöin Esimerkin 3.4(3) ja edellä tehdyn huomion nojalla on isometria $F_v=D_p\circ\iota_\alpha$ sopivilla $p\in\mathbb{H}^2$ ja $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ siten, että $dF_v(\dot\gamma_0(0))$. Proposition

6.5 nojalla $\gamma_v = F_v \circ \gamma_0$ on geodeesi, jolle $\dot\gamma_v(0) = v$. Lauseen 6.1 nojalla nämä ovat kaikki hyperbolisen tason geodeesit, joiden nopeus on 1.

Geometriasta saatamme muistaa, että inversiot ovat konformikuvauksia, jotka kuvaavat euklidiset suorat suorille tai ympyröille, jotka ovat kohtisuorassa suoraa $\mathbb{R} \times \{0\}$ vastaan. Hyperbolisen tason geodeesit ovat siis täsmälleen kaikkien tällaisten käyrien joukko parametrisoituna vakionopeudella.

Tarkastelemamme esimerkit osoittavat, että euklidinen taso, pallon pinta $\mathbb{S}^2$ ja hyperbolinen taso $\mathbb{H}^2$ ovat geodeesisesti täydellisiä avaruuksia.

6.1. **Eksponenttikuvaus.** Olkoon γ_v tangenttivektorin $v \in T(M)$ määräämä maksimaalinen geodeesi. Olkoon $\mathscr{E}(M)$ tangenttikimpun $T(M)$ osajoukko, joka koostuu niistä tangenttivektoreista $v \in T(M)$, joille γ_v on määritelty ainakin välillä $[0, 1]$ ja olkoon $\mathscr{E}_p = \mathscr{E}(M) \cap T_p(M)$. Riemannin moniston (M, g) *eksponenttikuvaus* on kuvaus $\exp\colon \mathscr{E} \to M$, joka määritellään asettamalla jokaiselle $v \in TM$

$$\exp(v) = \gamma_v(1)\,.$$

Olkoon $\exp_p$ eksponenttikuvauksen rajoittuma joukkoon $\mathscr{E}_p$.

Propositio 6.9. *Eksponenttifunktio on sileä kuvaus ja $\mathscr{E}(M)$ on avoin.*

Todistus. Väite seuraa siitä, että geodeesisen differentiaaliyhtälön ratkaisut riippuvat sileästi alkuarvoista, katso esimerkiksi [Har, §V.4]. □

Lemman 6.2 nojalla

$$\exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),$$

joten eksponenttifunktio kuvaa janan $\mathbb{R}\, v \cap \mathscr{E}_p$ maksimaaliseksi geodeesiksi $|\gamma_v|$. Tästä seuraa, että $\mathscr{E}_p$ on *tähtimäinen* jokaisella $p \in M$: jos $w \in \mathscr{E}_p$, niin $tw \in \mathscr{E}_p$ jokaisella $t \in [0, 1]$.

Esimerkki 6.10. (1) Tarkastellaan Euklidisen avaruuden eksponenttikuvausta. Samastetaan $T_p\mathbb{E}^n$ avaruuden $\mathbb{E}^n$ kanssa. Tällöin $\exp_p(v) = p + v$ kaikilla $v \in T_p\mathbb{E}^n$.

(2) Olkoon $p \in \mathbb{S}^2$ ja tarkastellaan eksponenttikuvausta $\exp_p\colon T_p\mathbb{S}^2 = p^\perp \to \mathbb{S}^2$. Osoitetaan, että

$$\exp_p(u) = p\cos(|u|) + \frac{u}{|u|}\sin(|u|)\,,$$

kun $u \neq 0$.

Pisteen p kautta kulkevat isoympyrät ovat joukkoina muotoa $\mathbb{S}^2 \cap P$, missä P on origon kautta kulkeva lineaarinen taso. Olkoon $u \in T_p\mathbb{S}^2 = p^\perp$. Harjoituksissa tarkastetaan, että kuvaus

$$\gamma_u\colon t \mapsto p\cos(|u|\,t) + \frac{u}{|u|}\sin(|u|\,t)$$

on geodeesi, kun $|u| = 1$ ja sama pätee yleisesti Lemman 6.2 nojalla.

Propositio 6.11. *Jokaisella $p \in M$ on pisteen $0_p \in T_pM$ avoin ympäristö $\widetilde{U}$ siten, että $\exp_p|_U$ on diffeomorfismi kuvalleen.*

Todistus. Tangenttiavaruus T_p on vektoriavaruus, joten sen tangenttiavaruuden alkiot ovat muotoa $\dot\rho(0)$, missä $\rho\colon I \to T_p$ on kuvaus $\rho(t) = tv$ jollain $v \in T_pM$. Käyttämällä eksponenttifunktion määritelmää saadaan

$$d\exp_p(v_0) = d\exp_p \dot\rho(0) = (\exp_p \circ \rho)'(0) = \dot\gamma_v(0) = v\,.$$

Siis eksponenttikuvauksen $\exp_p$ differentiaali on kanoninen isomorfismi $T_0T_pM \to T_pM$, erityisesti se on siis lineaarinen isomorfismi. Väite seuraa käänteiskuvauslauseesta. □

Proposition 6.11 antamaa pisteen p avointa ympäristöä $\exp_p(\widetilde{U})$ sanotaan *normaaliympäristöksi.*

Seuraus 6.12. *Olkoon U pisteen $p \in M$ normaaliympäristö. Jokaiselle $q \in U$ on yksikäsitteinen geodeesi γ, jolle $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ ja $\gamma([0,1])$ sisältyy joukkoon U.* □

6.2. **Normaalikoordinaatti.** Eksponenttikuvauksen $\exp_p$ avulla saadaan jokaisen pisteen $p \in M$ normaaliympäristöön koordinaattijärjestelmä, joka käyttäytyy erityisen hyvin pisteen p lähellä. Olkoon U pisteen $p \in M$ normaaliympäristö ja olkoon $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tangenttiavaruuden T_pM ortonormaali kanta. Pisteen $q \in U$ *normaalikoordinaatit (kannan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ suhteen)* $x^i(q)$ ovat pisteen $\exp_p^{-1}(q)$ koordinaatit kannan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ suhteen:
$$\exp_p^{-1}(q) = \sum_i x^i(q)\, e_i\,.$$
Eksponenttifunktion määritelmä antaa suoraan seuraavan havainnon:

Lemma 6.13. *Pisteen p kautta kulkevat geodeesit ovat normaalikoordinaateissa lineaaristen suorien janoja.* □

Nnormaalikoordinaattien nimi tulee epäilemättä siitä, että koordinaatilla on seuraavat erityisomonaisuudet:

Propositio 6.14. *Olkoon x normaalikoordinaatti pisteessä $p \in M$. Tällöin $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ ja $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$.*

Todistus. Riemannin metriikan lauseketta koskevan väitteen osoittamiseksi riitää tarkastaa, että $e_i = \partial_i(p)$ kaikilla p. Tämä on uskottavaa konstruktiosta ja helppo tarkastaa: Jos $v = \sum_i a^i e_i \in T_pM$, saadaan $v = \dot\gamma_v(0) = \sum_i a^i \partial_i|_p$.

Koska pisteen p kautta kulkevan geodeesin γ_v lauseke on lineaarinen
$$\gamma_v(t) = t\sum_i a^i e_i\,,$$
sijoittamalla se geodeesiseen differentiaaliyhtälöön saadaan
$$\sum_{ij} \Gamma^k_{ij}(p) a^i a^j = 0 \tag{5}$$
kaikille k. Ajatellaan lauseketta (5) kiinteällä k neliömuodon lausekkeena. Polarisaatiolemman (Harjoitus 6.9) nojalla $\Gamma^k_{ij} = 0$ kaikilla i, j, k. □

Riemannin metriikan lauseke normaalikoordinaateissa antaa mielenkiintoisen analogian pallon $\mathbb{S}^2$ ja hyperbolisen tason välille:

Propositio 6.15. *Olkoon (M, g) yksi Riemannin monistoista $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{E}^2$ tai $\mathbb{H}^2$ ja olkoon $p \in M$. Samastetaan tangenttitaso T_pM avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa. Olkoon $\bar g$ Riemannin metriikan $(\exp_p)^* g$ esitys tason $\mathbb{E}^2$ napakoordinaateissa (r, θ). Tällöin*
(1) $\bar g = dr^2 + \sin^2(r)\, d\theta^2$, *jos* $M = \mathbb{S}^2$
(2) $\bar g = dr^2 + r^2\, d\theta^2$, *jos* $M = \mathbb{E}^2$
(3) $\bar g = dr^2 + \sinh^2(r)\, d\theta^2$, *jos* $M = \mathbb{H}^2$

Todistus. Euklidista tasoa koskeva väite on selvä. Tarkastellaan Riemannin monistoa $\mathbb{S}^2$. Eksponenttikuvaus $\exp_p$ on diffeomorfismi pallossa $B(0, \pi)$, differentioituvuuden voi tarkastaa esimerkiksi potenssisarjaesityksen avulla.

On helppo nähdä, että säteittäiset geodeesit $t \mapsto \exp_p(tv)$ ovat kohtisuorassa ympyröitä $\{x \in \mathbb{S}^2 : d(p, x) = r\}$ vastaan. Metriikan lauseke saadaan siis selville symmetrioihin vetoamalla, kun laskemme ympyröiden piirit. Mutta tämä on helppo lasku euklidisella geometrialla: Oletetaan, että $p = (0, 0, -1)$. Tällöin r-säteinen p-keskinen ympyrä on

$\{x \in \mathbb{S}^2 : x_3 = -\cos r\}$ ja sen pituus on $2\pi \sin r$. [‖] Siis napakoordinaateissa metriikan kulmakomponentin kerroin on $\sin^2 r$.

Hyperbolisen tason tapaus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Harjoitustehtäviä.

6.1. Todista Propositio 6.5.

6.2. Osoita, että polku $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$ on geodeesi Riemannin monistolla $\mathbb{S}^2$.

6.3. Määritä kaikki Riemannin moniston $\mathbb{S}^2$ maksimaaliset geodeesit, joiden nopeus on 1.

6.4. Kuvaus $F\colon B(0,1) \to \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$,

$$F(x) = \frac{(2x_1, 1 - \|x\|^2)}{x_1^2 + (x_2 + 1)^2}$$

on diffeomorfismi. Osoita, että se on isometria Riemannin monistolta $(B(0,1), \frac{4\,g_E}{(1-\|x\|^2)^2})$ hyperbolisen tason puolitasomallille. Riemannin monisto $(B(0,1), \frac{4\,g_E}{(1-\|x\|^2)^2})$ on *hyperbolisen tason Poincarén kiekkomalli.*

6.5. Määritä hyperbolisen tason Poincarén kiekkomallin maksimaaliset geodeesit, joiden nopeus on 1.

6.6. Määritä hyperbolisen tason Poincarén kiekkomallin eksponenttikuvaus origossa $0 \in B(0,1)$.

6.7. Määritä hyperbolisen tason p-keskisen r-säteisen ympyrän piiri ja metriikan lauseke pisteen p normaalikoordinaateissa napakoordinaatin avulla.

6.8. Osoita, että Riemannin monisto on yhtenäinen, jos ja vain jos mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää paloittain geodeesisella polulla.

6.9. [Polarisaatio] Olkoon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sisätulo reaalisessa vektoriavaruudessa V. Olkoon q sisätulon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ määräämä neliömuoto $q(x) = \langle x, x \rangle$. Osoita, että sisätulo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ määräytyy yksikäsitteisesti, jos neliömuoto tunnetaan.

[‖] On selvää, että säteittäisen geodeesin pituus antaa etäisyyden pisteestä p.

[2] Vihje: Käytä stereograafista projektiota.
[7] Vihje: Käytä Poincarén mallia.

Olkoot $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $v_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Affiini suora $t \mapsto x_0 + t\,v_0$ antaa lyhimmän reitin minkä tahansa kahden sille kuuluvan pisteen välille. Tässä luvussa tarkastelemme, missä määrin vastaava tulos pätee muille Riemannin monistoille.

Olkoon $I = [a,b]$ suljettu väli. Sanomme, että paloittain sileä polku $\gamma\colon I \to M$ on *minimoiva käyrä*, jos $\ell(\gamma) \geq \ell(\eta)$ kaikille paloittain sileille poluille η, joille pätee $\eta(a) = \gamma(a)$ ja $\eta(b) = \gamma(b)$.

Todistamme ensin tuloksen, joka yleistää Proposition 6.15 todistuksessa tehdyn kohtisuoruushavainnon:

Propositio 7.1 (Gaussin lemma). *Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon $U \ni p$ normaaliympäristö ja olkoon $\epsilon > 0$ siten, että $\exp_p(B(0,\epsilon)) \subset U$. Radiaalinen geodeesi γ_v on kohtisuorassa pallonkuorten kuvia*

$$S(p,r) = \exp_p(\{x \in T_pM : |x| = R\})$$

vastaan kaikilla $v \in T_pM$ ja kaikilla $0 < R < \epsilon$.

Koska eksponenttifunktio on diffeomorfismi normaaliympäristössä, niin pallonkuoren kuva $S(p,R) = \exp_p(\{x \in T_pM : |x| = R\})$ on Riemannin moniston M alimonisto, jota kutsutaan *geodeesiseksi pallonkuoreksiksi* tai *normaaliksi pallonkuoreksi*. Osoittautuu, että se todellakin on niiden pisteiden joukko, jotka ovat etäisyydellä r pisteestä p.

Olkoot I_1 ja I_2 avoimia epätyhjiä välejä. Kuvaus $\Phi\colon I_1 \times I_2 \to M$ on *polkuperhe*. Polkuperhe Φ voidaan ajatella koostuvaksi kahdesta polkuperheestä $\Phi_{1,v_0}\colon u \mapsto \Phi(u,v_0)$ ja $\Phi_{2,u_0}\colon v \mapsto \Phi(u_0,v)$. Jos x on lokaali koordinaatti monistolla M, käytämme jatkossa merkintää $\Phi^i = x^i \circ \Phi$.

Kuvaus $X\colon I_1 \times I_2 \to T(M)$ on *vektorikenttä polkuperhettä Φ pitkin*, jos $\pi \circ X = \phi$. Tällaiselle kuvaukselle määritellään kovariantit osittaisderivaatat:

- $\frac{D}{ds}X(s_0,t_0)$ on vektorikentän X kovariantti derivaatta polulla $s \mapsto \Phi(s,t_0)$ pisteessä s_0 ja
- $\frac{D}{dt}X(s_0,t_0)$ on vektorikentän X kovariantti derivaatta polulla $t \mapsto \Phi(s_0,t)$ pisteessä t_0.

Olkoon $\partial_t\Phi(s,t)$ polun $t \mapsto \Phi(s,t)$ tangenttivektori pisteessä $\Phi(s,t)$ ja olkoon $\partial_t\Phi(s,t)$ polun $t \mapsto \Phi(s,t)$ tangenttivektori pisteessä $\Phi(s,t)$.

Lemma 7.2. *Olkoon X vektorikenttä pitkin kahden parametrin kuvausta Φ. Tällöin lokaaleissa koordinaateissa*

$$\frac{D}{ds}\partial_t\Phi = \sum_i \left(\frac{d^2\Phi^i}{ds\,dt} + \sum_{jk} \Gamma^i_{jk}\frac{d\Phi^j}{ds}\frac{d\Phi^k}{dt} \right) = \frac{D}{dt}\partial_s\Phi\,.$$

Todistus. Seuraa soveltamalla kovariantin derivaatan kaavaa koordinaateissa kahdesti, toisten derivaattojen vaihdannaisuudesta ja Christoffelin symbolin symmetrisyydestä alaindeksien vaihdon suhteen. □

Gaussin lemman todistus. Olkoon $q = \exp_p(v) \in \exp_p(B(0,\epsilon))$. Olkoon w geodeesisen pallon $\exp_p(\{x \in T_pM : |x| = R\})$ tangenttivektori pisteessä q. Tällöin $w = d\exp_p \bar{w}$ jollain $\bar{w} \in T_v(T_pM)$.

Olkoon $\sigma\colon I_2 \to T_pM$ polku, jolle $\dot\sigma(0) = \bar{w}$ ja $|\sigma| \equiv |\bar{w}| = R$. Tarkastellaan kahden parametrin kuvausta

$$\Gamma(s,t) = \exp_p(t\sigma(s))\,.$$

Nyt

$$\partial_s\Gamma(0,0) = 0\,, \qquad \partial_t\Gamma(0,0) = v$$

ja
$$\partial_s\Gamma(0,1) = d\exp_p(\dot\sigma(0)) = w\,, \qquad \dot\Gamma_t(0,1) = \dot\gamma_v(1)\,,$$
joten
$$g(\partial_s\Gamma(0,0), \partial_t\Gamma(0,0)) = 0$$
ja
$$g(\partial_s\Gamma(0,0), \partial_t\Gamma(0,0)) = g(\dot\gamma(1), w)\,.$$
Väitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että kuvaus $t \mapsto g(\partial_s\Gamma(0,t), \partial_t\Gamma(0,t))$ on vakio.

Kiinteällä s polku $t \mapsto \Gamma(s,t)$ on geodeesi $\gamma_{\sigma(s)}$, joten $\frac{D}{dt}\partial_t\Gamma = 0$. Lemman 7.2 nojalla
$$\begin{aligned}\partial_t g(\partial_s\Gamma, \partial_t\Gamma) &= g(\frac{D}{dt}\partial_s\Gamma, \partial_t\Gamma) + g(\partial_s\Gamma, \frac{D}{dt}\partial_t\Gamma)\\ &= g(\frac{D}{dt}\partial_s\Gamma, \partial_t\Gamma) = g(\frac{D}{ds}\partial_t\Gamma, \partial_t\Gamma) = \frac{1}{2}\partial_s g(\partial_t\Gamma, \partial_t\Gamma)\,.\end{aligned}$$
Mutta kuvaus $t \mapsto \Gamma(s,t)$ on geodeesi , kun s kiinnitetään ja $\partial_t\Gamma(s,t) = \dot\gamma_{\sigma(s)}(t)$. Koska geodeesin tangenttivektorikenttä on yhdensuuntainen,
$$|\partial_t\Gamma(s,t)| = |\partial_t\Gamma(s,0)| = |\sigma(s)| = R$$
on vakio Proposition 5.7 nojalla. □

Seuraus 7.3. *Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon $U \ni p$ normaaliympäristö ja olkoon $\epsilon > 0$ siten, että $\exp_p(B(0,\epsilon)) \subset U$. Olkoon $h_{(r,v)}$ indusoitu Riemannin metriikka alimonistolla $\exp_p(\{x \in T_pM : |x| = s\})$ Joukossa $\exp_p(B(0,\epsilon))$ pätee normaaleissa napakoordinaateissa*
$$g = dr^2 + h_{(r,v)}\,. \quad \square$$

Lause 7.4. *Olkoon M Riemannin monisto. Olkoon $p \in M$ ja olkoon q pisteen p normaalissa palloympäristössä. Tällöin radiaalinen geodeesi pisteestä p pisteeseen q on uudelleenparametrisointia vaille yksikäsitteinen minimoiva polku.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 7.5. *Geodeesiset pallot ovat metrisiä palloja: Riittävän pienelle $r > 0$ pätee*
$$B(p,r) = \exp_p(B(0,r))\,. \quad \square$$

Seuraus 7.6. *Geodeesit ovat lokaalisti minimoivia polkuja.* □

Esimerkki 7.7. Geodeesi ei välttämättä ole globaalisti minimoiva polku. Esimerkiksi isoympyrä pallolla $\mathbb{S}^2$ on suljettu geodeesi, jonka jana on minimoiva, jos ja vain jos sen pituus on aidosti pienempi kuin π.

Seuraava tulos antaa vahvemman version normaaliympäristöstä kuin Proposition 6.11 avulla saatiin.

Propositio 7.8. *Kuvaus $E\colon \mathscr{E}(M) \to M \times M$,*
$$E(v) = (\pi(v), \exp(v))$$
on lokaali diffeomorfismi.

Todistus. Olkoon $v \in T_x(TM)$ siten, että $dE(v) = 0$. Osoitetaan, että $v = 0$. Olkoon $\mathrm{pr}_1\colon M \times M \to M$ kuvaus $\mathrm{pr}_1(m_1, m_2) = m_1$ ja olkoon $\pi\colon TM \to M$ kantapistekuvaus. Tällöin $\mathrm{pr}_1 \circ E = \pi$, joten $d\pi(v) = d\,\mathrm{pr}_1(dE(v)) = 0$. Siis v on tangenttiavaruudent $T_{\pi(x)}M$ tangenttivektori. Nyt $E|_{T_{\pi(x)}M}(v) = (\pi(x), \exp_{\pi(x)}(v))$. Koska $\exp_{\pi(x)}$ on injektio, saamme $v = 0$, joten väite seuraa käänteiskuvauslauseesta. □

Lokaalissa trivialisaatiossa TU on diffeomorfinen tulon $U \times \mathbb{R}^n$ kanssa ja

$$E(v = (x,u)) = (x, \exp_x(v))\,.$$

Differentiaalin dE_{v_0} matriisi koordinaattifunktioiden antamassa kannassa on itse asiassa

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \mathrm{id} & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

katso esimerkiksi [GHL, Prop. 2.88] tai [Lee1, Lemma 5.12].

Seuraus 7.9. *Jokaisella $p \in M$ on ympäristö U ja $\epsilon > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in U$ on yksikäsitteinen $v \in T_xM$, $|v| < \epsilon$, jolle $y = \exp_x(v)$.*

Todistus. Olkoon W suhteellisesti kompakti pisteen 0_p ympäristö tangenttikimpussa TM siten, että jossa $E|_W$ on diffeomorfismi kuvalleen. Riemannin metriikan jatkuvuuden nojalla on avoin $V \ni p$ ja $\epsilon > 0$, joille

$$W' = \bigcup_{m \in V} B(0_m, \epsilon) \subset W\,.$$

Nyt $E(W')$ on avoin, joten se sisältää tulojoukon $U \times U$ jollekin pisteen p avoimelle ympäristölle $U \subset M$. Jokaiselle $(x,y) \in U \times U$ on $v \in W'$, jolle

$$E(v) = (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v)) = (x,y),$$

siis $\exp_x(v) = y$, kuten haluttiin. $\square$

Seurauksessa 7.9 löydettyä ympäristöä U kutsutaan pisteen p *tasaisesti normaaliksi ympäristöksi.*

Propositio 7.10. *Minimoiva polku on parametrisointia vaille geodeesi.*

Todistus. Olkoon $\alpha\colon I \to M$ minimoiva polku. Jaetaan määrittelyväli I osaväleihin I_k siten, että jokaisen välin I_k kuva sisältyy tasaisesti normaaliin ympäristöön. Tällöin voimme olettaa, että $\alpha|_{I_k}$ on geodeesi kaikilla k, joten α on paloittain geodeesinen, ja voimme olettaa, että se on parametrisoitu vakionopeudella.

Oletetaan, että polulla α on kulma jossain pisteessään q. Rajoittumalla pisteen q normaaliympäristöön nähdään Lauseen 7.4 nojalla, että itse asiassa $\alpha|_{U_q}$ on geodeesi. Sama pätee kaikkialla, joten väite seuraa. $\square$

Lemma 7.11. *Olkoon M Riemannin monisto. Olkoot $p, q \in M$. Riittävän pienellä $\delta > 0$ on $p_0 \in \partial B(p,\delta)$, jolle*

$$d(p,p_0) + d(p_0,q) = d(p,q)\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Huomaa, että Lemmassa 7.11 pisteiden p ja p_0 välillä on minimoiva geodeesi mutta pisteiden p ja q ja pisteiden p_0 ja q välillä tällaista geodeesia ei välttämättä ole, kuten esimerkki $M = \mathbb{E}^2 - \{0\}$, $p = (-1,0)$ ja $q = (1,0)$ osoittaa.

Lause 7.12 (Hopfin ja Rinowin lause 1)**.** *Olkoon M Riemannin monisto. Olkoon $p \in M$. Jos $\mathscr{E}_p(M) = T_p(M)$, niin jokaiselle $q \in M$ on minimaalinen geodeesi $\gamma : [0,1] \to M$ siten, että $\gamma(0) = p$ ja $\gamma(1) = q$.*

Todistus. Olkoot $\delta > 0$ ja $p_0 \in \partial B(p,\delta)$ kuten Lemmassa 7.11. Olkoon γ geodeesi pisteestä p, joka kulkee pisteen p_0 kautta ja jonka nopeus on 1. Oletuksen mukaan geodeesin γ maksimaalinen määrittelyväli on $\mathbb{R}$. Olkoon

$$I = \{t \in \mathbb{R} : t + d(\gamma(t),q) = d(p,q)\}\,.$$

Pisteen p_0 ominaisuuksien nojalla $\delta \in I$. Osoitetaan, että $d(p,q) = \max I$. Väli I on suljettu, joten siinä mielessä tavoite on mielekäs. Huomataan myös, että $\gamma|_I$ on minimoiva: kolmioepäyhtälön ja välin I määritelmän nojalla kaikille $t \in I$ pätee

$$d(p,q) \leq d(p,\gamma_v(t)) + d(\gamma(t),q) = d(p,\gamma(t)) + d(p,q) - t\,,$$

joten $d(p,\gamma(t)) \geq t$. Mutta geodeesin γ nopeus on 1, joten etäisyyden määritelmän nojalla $t = \ell(\gamma) \geq d(p,\gamma(t))$. Siis $d(p,\gamma(t)) = t = \ell(\gamma_{[0,t]})$ kaikille $0 < t \leq \sup I$.

Jos $\sup I < d(p,q)$, niin Lemman 7.11 nojalla on $\delta_1 > 0$ ja $p_1 \in \partial B(\gamma(\sup I),\delta_1)$ siten, että

$$\delta_1 + d(p_1,q) = d(\gamma(\sup I),q)$$

ja minimoiva geodeesi σ, jonka nopeus on 1 ja joka yhdistää pisteen $\gamma(\sup I)$ pisteeseen p_1. Välin I määritelmän nojalla

$$\sup I + \delta_1 + d(p_1,q) = d(p,q)\,. \tag{6}$$

Koska kolmioepäyhtälön nojalla $d(p,q) \leq d(p,p_1) + d(p_1,q)$, saamme epäyhtälön

$$\sup I + \delta_1 \leq d(p,p_1)\,.$$

Siis kolmioepäyhtälön nojalla pätee $\sup I + \delta_1 = d(p,p_1)$. Mutta tästä seuraa, että yhdistetty polku $\gamma_{[0,\sup I]} * \sigma|_{[0,\delta_1]}$ on minimoiva polku. Proposition 7.10 nojalla se on geodeesi, joten $\gamma_{[0,\sup I]} * \sigma|_{[0,\delta_1]} = \gamma|_{[0,\sup I]+\delta_1}$, mutta yhtälön (6) nojalla tämä on ristiriidassa välin I määritelmän kanssa. Siispä $\sup I = d(p,q)$. □

Seuraus 7.13. *Jos M on geodeesisesti täydellinen, niin mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää minimaalisella geodeesilla.* □

Seuraus 7.14 (Hopfin ja Rinowin lause 2)**.** *Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) M on geodeesisesti täydellinen.
(2) $\mathscr{E}(M) = TM$.
(3) $\mathscr{E}_p(M) = T_pM$ jollekin $p \in M$.
(4) Metrisen avaruuden (M,d) suljetut rajoitetut joukot ovat kompakteja.
(5) (M,d) on täydellinen metrinen avaruus.

Todistus. Selvästi ehdosta (1) seuraa ehto (2) ja ehdosta (2) seuraa tietenkin (3).

Oletetaan, että $\mathscr{E}_p(M) = T_pM$ pisteelle $p \in M$. Olkoon $F \subset M$ suljettu ja rajoitettu. Lauseen 7.12(1) mukaan jokaiselle $q \in F$ on minimoiva geodeesi $\sigma_q\colon [0,1] \to M$, jolle $\sigma_q(0) = p$ ja $\sigma_q(1) = \exp_p(\dot\sigma_q(0))$. Koska F on rajoitettu, $|\dot\sigma_q(0)| = d(p,q) \leq R$ jollain $R > 0$. Siis F on kompaktin joukon $\exp_p(\overline{B}(0,R))$ suljettuna osajoukkona kompakti. Siis ehto (4) seuraa ehdosta (3).

Oletetaan, että metrisen avaruuden X suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja. Olkoon (x_k) avaruuden X Cauchyn jono. Joukko $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu, joten sen sulkeuma on oletuksen mukaan kompakti. Siis jono (x_k) suppenee, joten X on täydellinen. Ehdosta (4) seuraa siis (5) yleisessä metristen avaruuksien tilanteessa.

Oletetaan, että (M,d) on täydellinen metrinen avaruus. Olkoon $\gamma\colon I \to M$ maksimaalinen geodeesi, jonka nopeus on 1. Lauseen 6.1 nojalla määrittelyväli I on avoin. Osoitetaan, että se on myös suljettu. Olkoon $t_k \in I$ jono, jonka raja-arvo on t. Osoitetaan, että $t \in I$. Koska geodeesin γ nopeus on 1, jono $\gamma(t_k)$ on Cauchyn jono. Oletuksen nojalla se suppenee kohti jotain pistettä $q \in M$. Olkoon U pisteen q tasaisesti normaali ympäristö. Tällöin jokainen joukosta U alkava geodeesi, jonka nopeus on 1, on määritelty välillä $]-\epsilon,\epsilon[$. Valitsemalla t_K siten, että $[t_K - t| < \frac{\epsilon}{2}$, näemme, että $t \in I$. Siis geodeesin maksimaalinen määrittelyväli on $\mathbb{R}$, joten ehto (1) seuraa ehdosta (5). □

Esimerkki 7.15. Seuraavat havainnot seuraavat Hopfin ja Rinowin lauseesta:

(1) Hyperbolinen taso on täydellinen metrinen avaruus, koska $\mathscr{E}(\mathbb{H}^2)$ on geodeesisesti täydellinen Esimerkin 6.8 nojalla. Riittää huomata, että pisteen $(0,1)$ eksponenttifunktio ylemmässä puolitasomallissa on määritelty koko tangenttiavaruudessa $T_{(0,1)}\mathbb{H}^2$.

(2) Kompaktit Riemannin monistot kuten $\mathbb{S}^2$, Esimerkkien 2.2(3) ja 3.5(3) torukset ja Esimerkin 2.2(4) Kleinin pullo ovat geodeesisesti täydellisiä.

Harjoitustehtäviä.

7.1. Todista Lause 7.4.

7.2. Todista Lemma 7.11.

7.3. Olkoot γ ja η kaksi eri geodeesia täydellisellä Riemannin monistolla M siten, että joillekin $a < b$ pätee $\gamma(a) = \eta(a)$, $\gamma(b) = \eta(b)$ ja $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \ell(\eta|_{[a,b]})$. Osoita, että $\gamma|_{[a,b+\epsilon]}$ ei ole minimoiva millään $\epsilon > 0$.

Olkoon M täydellinen Riemannin monisto, joka ei ole kompakti. Sanotaan, että kuvaus $\rho\colon [0,\infty[\to M$ on *minimoiva säde*, jos sen jokainen rajoittuma $\rho_{[0,T]}$, $T > 0$ on minimoiva geodeesi.

7.4. Osoita, että jokaisella $p \in M$ on minimoiva säde ρ, jolle $\rho(0) = p$.

7.5. Osoita, että kompleksinen eksponenttikuvaus $\operatorname{Exp}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\operatorname{Exp}(z) = \sum_{k=0^\infty} \frac{z^k}{k!} = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z))$$

on lokaali Riemannin isometria, kun $\mathbb{C}$ varustetaan euklidisella Riemannin metriikalla ja $\mathbb{C} - \{0\}$ varustetaan Riemannin metriikalla

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2}\,.$$

7.6. Osoita, että Riemannin monisto $\big(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}\big)$ on täydellinen.

7.7. Määritä minimoivat säteet Riemannin monistolla $\big(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}\big)$.

7.8. Määritä minimoivat säteet Esimerkin 6.6 euklidisella sylinterillä.

7.9. Olkoon $J\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kuvaus

$$J(z) = i\,z\,.$$

Osoita, että kuvaus $\operatorname{Exp} \circ \mathrm{J}|_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \to B(0,1) - \{0\}$ on lokaali Riemannin isometria hyperbolisen tason ylemmästä puolitasomallista Riemannin monistolle $\big(B(0,1) - \{0\}, g\big)$, missä

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2)\,\log^2\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

7.10. Osoita, että Riemannin monisto $\big(B(0,1) - \{0\}, g\big)$ on täydellinen, kun

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2)\,\log^2\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

7.11. Kuvaile minimoivat säteet Tehtävän 7.10 Riemannin monistolla $(B(0,1) - \{0\}, g)$.

Tarkastellaan suuntaissiirtoa geodeesien muodostamia kolmoita pitkin avaruuksissa $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2$ ja $\mathbb{H}^2$: Euklidisessa avaruudessa suuntaissiirto on triviaali. Harjoituksissa osoitettiin, että suuntaissiirto pitkin pallogeometrian kolmiota, jossa on kaksi suoraa kulmaa, on kierto samaan suuntaan kuin kolmiota kierretään. Hyperbolisessa tasossa vektorit kiertyvät myös, mutta vastakkaiseen suuntaan, kuten kuvan esimerkki osoittaa:

Tämä ero on yksi avaruuden kaarevuuden ilmentymä. Tässä luvussa määrittelemme kaarevuutta ilmaisevia käsitteitä täsmällisesti ja tutkimme niiden merkitystä. Yhdensuuntaissiirto on

Riemannin moniston (M, g) $(1,3)$-*kaarevuustensori* on kuvaus $R\colon \mathscr{X}(M)^3 \to \mathscr{X}(M)$, joka määritellään asettamalla

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z$$

ja sen $(0,4)$-*kaarevuustensori* on kuvaus $R\colon \mathscr{X}(M)^4 \to \mathscr{F}(M)$, joka määritellään $(1,3)$-kaarevuustensorin avulla asettamalla

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)\,.$$

Propositio 8.1. *Riemannin moniston M $(1,3)$-kaarevuustensori $R\colon \mathscr{X}(M)^3 \to \mathscr{X}(M)$ on $\mathscr{F}(M)$-multilineaarikuvaus ja $(0,4)$-kaarevuustensori $R\colon \mathscr{X}(M)^4 \to \mathscr{F}(M)$ on $(0,4)$-tensori.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Huomautus 8.2. (1) Kaarevuustensorien yhteydessä on syytä olla varovainen: Osassa lähteistä ([dC], [GHL], [O'N])tensorit määritellään kuten yllä, toisissa ([Hel], [Lee1]) annettu kaarevuustensorin määritelmä antaa tensorin $-R$.

(2) Riemannin moniston $(1,3)$-kaarevuustensori on siis yleistetty tensori. Koska kaarevuustensorit ovat (yleistettyjä) tensoreita, niillä on arvo jokaisessa pisteessä kuten näimme luvussa 1.5. Voimme siis tarkastella kaarevuustensorien tensorin määräämiä pisteittäisiä tensoreita $R_p\colon T_pM^3 \to T_p$ ja $R_p\colon T_pM^4 \to \mathbb{R}$ jokaisessa $p \in M$.

(3) Jos X ja Y ovat koordinaattivektorikenttiä, niin $[X, Y] = 0$, joten tässä tapauksessa $R(X, Y) = -\nabla_X Z + \nabla_Y Z$. Tätä havaintoa voi usein käyttää apuna laskuissa valitsemalla lokaalit koordinaatit sopivasti.

Propositio 8.3. *Olkoon M Riemannin monisto ja olkoon $p \in M$. Kaikille $x, y, z, w \in T_pM$ pätee*

(1) $R(y, x, z, w) = R(x, y, w, z) = -R(x, y, z, w)$,
(2) $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$ (Ensimmäinen Bianchin yhtälö),
(3) $R(z, w, x, y) = R(x, y, z, w)$.

Todistus. Todistuksessa voimme olettaa, että x, y ja z ovat kommutoivien vektorikenttien X ja Y arvot pisteessä p.

(1) Ensimmäinen yhtälö on selvä Lien tulon antisymmetrisyyden seuraus. Toinen yhtälön todistetaan esimerkiksi käyttämällä Levi-Civitan konnektion yhteensopivuutta Riemannin metriikan kanssa. Yksityiskohdat tehdään harjoituksissa.

(2) Suora lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned}
&R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\
&= -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_X\nabla_Z Y \\
&= \nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z - \nabla_Z X) + \nabla_Z(\nabla_Y X - \nabla_X Y) \\
&= \nabla_X[Z, Y] + \nabla_Y[X, Z] + \nabla_Z[Y X] = 0,
\end{aligned}$$

missä viimeisessä yhtälössä käytettiin oletusta Lien tulojen triviaaliudesta.

(3) Väite seuraa kohdista (2) ja (1). Lasketaan yhteen ensimmäisen Bianchin yhtälön $R(x,y,z,w)+R(y,z,x,w)+R(z,x,y,w)=0$ ja siitä muuttujien syklisillä permutaatioilla saatavien kolmen muun yhtälön termit ja sievennetään. Yksityiskohdat jäävät harjoitustehtäväksi. □

Propositio 8.4. *Jos $\phi\colon M\to N$ on lokaali isometria, niin*

$$R(d\phi x, d\phi y, d\phi z, d\phi w)=R(x,y,z,w)$$

kaikille $x,y,z,w\in TM$.

Todistus. Seuraa Levi-Civitan konnektion luonnollisuudesta. □

Sanotaan, että Riemannin monisto on *litteä*, jos $R\equiv 0$.

Esimerkki 8.5. (1) Euklidisen avaruuden kaarevuustensorit ovat nollia:

$$\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z=XYZ-YXZ=[X,Y]Z\,.$$

Siis $\mathbb{E}^n$ on litteä.

(2) Esimerkissä 3.5 määritelty torus ja Esimerkissä 6.6 määritelty sylinteri ovat litteitä.

Seuraava havainto osoittaa, että kaarevuustensorin avulla voi tunnistaa lokaalisti euklidiset avaruudet.

Lause 8.6. *Riemannin moniston M kaarevuustensori $R=0$, jos ja vain jos M on lokaalisti euklidinen.*

Todistus. Katso esimerkiksi [Lee1, Thm. 7.3]. Yksityiskohdat Projektissa 11.1. □

Reaalisen vektoriavaruuden V 2-ulotteiset tasot muodostavat *Grassmannin moniston* $\mathscr{G}^2(V)$, joka on diffeomorfinen tekijämoniston $\mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(2)\times\mathrm{O}(n-2))$ kanssa, jos V on n-ulotteinen. Olkoon $\mathscr{G}^2_p M$ Riemannin moniston (M,g) tangenttiavaruuden T_pM 2-tasojen Grassmannin monisto ja olkoon

$$\mathscr{G}^2 M=\bigsqcup_{p\in M}\mathscr{G}^2_p M$$

moniston M *Grassmannin säiekimppu.*

Lemma 8.7. *Olkoon M Riemannin monisto ja olkoon $p\in M$. Olkoon $P\in\mathscr{G}^2_p M$. Olkoot $x,y\in P$ lineaarisesti riippumattomia. Lauseke*

$$K(P)=\frac{R(x,y,x,y)}{g(x,x)g(y,y)-g(x,y)^2}$$

on riippumaton kannasta x,y.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemmassa 8.7 määritelty kuvaus $K\colon\mathscr{G}^2 M\to\mathbb{R}$ on Riemannin moniston M *leikkauskaarevuus*. Jos kaarevuustensoreille käytetään vastakkaista merkkivalintaa, pitää leikkauskaarevuuden määrittelyssä valita muuttujien järjestys oikein tai tehdä merkkikorjaus, jotta leikkauskaarevuus saadaan määriteltyä samaksi kuin tässä tehdään. Leikkauskaarevuuden merkki valitaan aina samoin, jotta se saadaan oikeaksi standardiesimerkeissä, joita tarkastelemme Esimerkissä 8.9.

Seuraus 8.8. *Jos $\phi\colon M\to N$ on lokaali isometria, niin*

$$K(d\phi(P))=K(P)$$

kaikille $P\in\mathscr{G}^2 M$.

Todistus. Seuraa Propositiosta 8.4. □

Esimerkki 8.9. Avaruuksien $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n$ ja $\mathbb{H}^n$ leikkauskaarevuudet ovat vakioita. Avaruuden $\mathbb{S}^n$ tapauksessa väite seuraa isometriaryhmän/ortogonaaliryhmän vahvoista transitiivisuusominaisuuksista: Olkoon $P \in \mathscr{G}^2 M$. Isometriaryhmä toimii transitiivisesti avaruudessa $\mathbb{S}^n$, joten voimme olettaa, että P on 2-ulotteinen aliavaruus tangenttiavaruudessa $T_{e_n}M$, joka voidaan identifioida hypertason $e_n^\perp = \mathbb{E}^n$ kanssa. Koska $\mathrm{O}(n+1)$ toimii transitiivisesti sisätuloavaruuden $\mathbb{E}^{n+1}$ ortogonaalisten kantojen joukolla, se toimii transitiivisesti erityisesti myös vektoria e_3 vastaan kohtisuorien 2-tasojen joukolla. Siis leikkauskaarevuus on vakio Proposition 8.4 nojalla. Hyperbolisen avaruuden tapaus käsitellään samaan tapaan.

Kaksiulotteisten avaruuksien $\mathbb{S}^2$ ja $\mathbb{H}^2$ leikkauskaarevuudet on suoraviivainen laskea. Avaruudet ovat 2-ulotteisia, joten tangenttiavaruudetkin ovat 2-ulotteisia eikä aliavaruustarkasteluja tarvita. Tarkastellaan hyperbolisen tason puolitasomallia pisteessä $(0,1)$. Valitaan virittäjiksi ∂_1 ja ∂_2. Nyt Esimerkin 4.7(2) nojalla nollasta poikkeavat Christoffelin symbolit ovat

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{x_2} = -\Gamma_{11}^2,$$

joten

$$\nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\partial_1 = \nabla_{\partial_1}(-\frac{1}{x_2}\partial_1) = -\frac{1}{x_2^2}\partial_2$$

ja

$$\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\partial_1 = \nabla_{\partial_1}(\frac{1}{x_2}\partial_1) = -\frac{1}{x_2^2}\partial_2.$$

Käytetty kanta on ortonormaali, joten

$$K(T_{(0,1)}\mathbb{H}^2) = R_{(0,1)}(\partial_1,\partial_2,\partial_1,\partial_2) = g(R(\partial_1,\partial_2)\partial_1,\partial_2) = g(-\partial_2,\partial_2) = -1$$

Symmetriaryhmän transitiivisuudesta seuraa, että yleisesti pätee

$$K \equiv \begin{cases} 1 & \text{avaruudessa } \mathbb{S}^n \\ 0 & \text{avaruudessa } \mathbb{E}^n \\ -1 & \text{avaruudessa } \mathbb{H}^n\,. \end{cases}$$

Kaarevuustensorit ovat monimutkaisia, niiden arvojen laskeminen on työlästä ja usein niistä on melko haastava saada geometristä informaatiota monistosta. Seuraava tulos osoittaa, että kaikkien leikkauskaarevuuksien tunteminen antaa yhtä paljon informaatiota Riemannin monistosta kuin kaarevuustensori.

Propositio 8.10. *Leikkauskaarevuus määrää kaarevuustensorin yksikäsitteisesti.*

Todistus. Olkoon F $(0,4)$-tensori, jolla on samat symmetriat kuin kaarevuustensorille osoitettiin Propositiossa 8.1 ja jolle pätee

$$F(x,y,x,y) = R(x,y,x,y)$$

kaikille $x,y \in T_pM$. Tällöin tensorilla $S = R - F$ on samat symmetriat kuin tensoreilla F ja R ja sille pätee $S(x,y,x,y) = 0$ kaikille x,y. Osoitetaan polarisaatioargumentilla, että $S = 0$:

Oletuksen, multilineaarisuuden ja symmetrian 8.3(3) nojalla kaikille x,y,z pätee

$$\begin{aligned} 0 &= S(x+z,y,x+z,y) \\ &= S(x,y,x,y) + S(x,y,z,y) + S(z,y,x,y) + S(z,y,z,y) \\ &= S(x,y,z,y) + S(z,y,x,y) = 2\,S(x,y,z,y). \end{aligned}$$

Tämän havainnon, multilineaarisuuden ja symmetrioiden nojalla kaikille x, y, z, w pätee

$$\begin{aligned}
0 &= S(x, y+w, z, y+w) \\
&= S(x, y, z, y) + S(x, y, z, w) + S(x, w, z, y) + S(x, w, z, w) \\
&= S(x, y, z, w) + S(x, w, z, y) = S(x, y, z, w) - S(x, w, y, z) \\
&= S(x, y, z, w) - S(y, z, x, w)
\end{aligned}$$

joten $S(x, y, z, w) = S(y, z, x, w) = S(z, x, y, w)$. Väite seuraa ensimmäisestä Bianchin yhtälöstä. □

Itse asiassa kaarevuustensori määräytyy eksplisiittisesti leikkauskaarevuuksista kaavan

$$R(x,y,z,w) = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(R(x+\alpha z, y+\beta w, x+\alpha z, y+\beta w) - R(x+\alpha w, y+\beta z, x+\alpha w, y+\beta z))$$

avulla.

Kun monisto M on 2-ulotteinen pinta, niin jokaisen pisteen $p \in M$ Grassmannin monisto on triviaali ja leikkauskaarevuus määrää funktion $K \colon M \to \mathbb{R}$, joka on *Gaussin kaarevuus*.

Harjoitustehtäviä.

8.1. Todista Propositio 8.1.

8.2. Todista Proposition 8.3(2) väite ilman oletusta vektorikenttien X, Y ja Z Lien tulon triviaaliudesta.

8.3. Todista Propositio 8.3 (1).

8.4. Todista Propositio 8.3 (3).

8.5. Todista Lemma 8.7.

8.6. Määritä Riemannin moniston $\mathbb{S}^2$ leikkauskaarevuus.

8.7. Osoita, että kartio

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{E}^n : x^2 + y^2 = cz^2 : (x, y, z) \neq 0\},$$

on Riemannin moniston $\mathbb{E}^3$ litteä alimonisto.

[7]Vihje: Tässä voisi esimerkiksi käyttää pallokoordinaatteja.

Olkoon (N, h) Riemannin moniston (M, g) Riemannin alimonisto, missä h on metriikan g indusoima Riemannin metriikka. Tässä luvussa tarkastelemme alimoniston N konnektiota ja kaarevuutta. Tutkimme myös, miten alimoniston ja ympäröivän moniston rakenteet liittyvät toisiinsa.

Ajattelemme moniston N tangenttiavaruuden pisteessä $p \in N$ tangenttiavaruuden T_pM aliavaruudeksi. Tällöin tangenttiavaruus T_pM jakautuu luonnollisella tavalla ortogonaaliseksi suoraksi summaksi

$$T_pM = T_pN + T_pN^{\perp}\,,$$

missä alimoniston N *normaaliavaruus* $T_pN^{\perp}$ pisteessä p on sen tangenttiavaruuden $T_pN \subset T_pM$ ortogonaalikomponentti sisätulon $g|_p$ suhteen. Normaaliavaruuden $T_pN^{\perp}$ vektoreita sanotaan alimoniston N *normaalivektoreiksi*. Olkoot

$$\operatorname{tang}_p\colon T_pM \to T_pN \quad \text{ja} \quad \operatorname{norm}_p\colon T_pM \to T_pN^{\perp}$$

ortogonaaliprojektiot tangenttiavaruudelle ja normaaliavaruudelle pisteessä p. Jokainen vektori $v \in T_pN \subset T_pM$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$v = \operatorname{tang} v + \operatorname{norm} v\,.$$

Koska N on moniston M alimonisto, voimme tarkastella monistolla N määriteltyjä *M-vektorikenttiä* $X\colon N \to TM$ ja *normaalivektorikenttiä* $X\colon N \to TN^{\perp}$, jotka ovat sileitä kuvauksia, joille $\pi \circ X = \mathrm{id}|_N$. Jos X on M-vektorikenttä alimonistolla N, määritellään vektorikenttä $\operatorname{tang} X\colon N \to TN$ ja M-vektorikenttä $\operatorname{norm} X\colon N \to TM|_N$ asettamalla $(\operatorname{tang} X)|_q = \operatorname{tang}(X_q)$ ja $(\operatorname{norm} X)|_q = \operatorname{norm}(X_q)$ jokaiselle $q \in N$.

Lemma 9.1. *Olkoon $X \in \mathscr{X}(M)$. M-vektorikentät $\operatorname{tang} X\colon N \to TN$ ja $\operatorname{norm} X\colon N \to TN^{\perp}$ ovat sileitä.*

Käytämme alimoniston N sileiden normaalivektorikenttien $\mathscr{F}(M)$-modulille merkintää $\mathscr{X}^{\perp}(N)$.

9.1. **Alimoniston konnektio.**

Lemma 9.2. *Olkoon N Riemannin moniston M alimonisto. Olkoon X vektorikenttä alimonistolla N. Tällöin jokaisella pisteellä $p \in N \subset M$ on avoin ympäristö $U \subset M$ ja $\bar{X} \in \mathscr{X}(U)$ siten, että $X|_q = \bar{X}|_q$ kaikilla $q \in U \cap N$.*

Todistus. Olkoon N m-ulotteisen Riemannin moniston M n-ulotteinen alimonisto. Valitaan lokaali koordinaatti x monistolla M siten, että $x(U \cap N) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Olkoon $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$. Asetetaan $X^{n+1} = X^{n+2} = \cdots = X^m = 0$ ja määritellään $\bar{X} = \sum_{i=1}^m X^i \partial_i$. □

Lemma 9.3. *Kuvaus $(X, Y) \mapsto \left(\nabla^M_{\bar{X}} \bar{Y}\right)\big|_N$ on riippumaton jatkoista $\bar{X}$ ja $\bar{Y}$.*

Todistus. Olkoot $X, Y \in \mathscr{X}(N)$ ja olkoot $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathscr{X}(M)$ niiden lokaaleja jatkoja jossain avoimessa joukossa $U \subset M$, jolle $U \cap N \neq \emptyset$. Koordinaateissa laskemalla nähdään, että

$$\nabla^M_{\bar{X}} \bar{Y} = \sum_i X(\bar{Y}^i)\partial_i + \sum \bar{X}^i \nabla^M_{\bar{X}}(\partial_i)\,. \tag{7}$$

Kun $q \in N \cap U$, niin $\bar{X}_q = X_q \in T_qN$ ja

$$(\bar{X}\bar{Y}^i)(q) = X_q\bar{Y}^i = X_q(\bar{Y}^i|_{N\cap U}) = x_q Y|_{N\cap U})$$

ja

$$(\nabla^M_{\bar{X}}\partial_i)|_q = \nabla^M_{X_q}\partial_i\,,$$

joten lauseke (7) on riippumaton jatkosta. □

Edellisen lemman perusteella voimme huoletta käyttää merkintää

$$\nabla^M_X Y = (\nabla^M_{\bar X}\bar Y)\big|_N \,.$$

Lause 9.4. *Olkoot ∇^M ja ∇^N monistojen M ja N Levi-Civitan konnektiot. Tällöin kaikille $X, Y \in \mathscr{X}(N)$ pätee*

$$\nabla^N_X Y = \operatorname{tang} \nabla^M_X Y \,.$$

Todistus. Todistuksen idea on osoittaa, että kuvaus $(X, Y) \mapsto \operatorname{tang}\nabla^M_X Y$ on alimoniston M Riemannin metriikan kanssa yhteensopiva affiini konnektio. Tällöin väite seuraa konnektion yksikäsitteisyydestä (Lause 4.2).

Olkoot $X, Y, Z \in \mathscr{X}(N)$. Käyttämällä Lemmassa 9.2 määriteltyjä jatkoja $\bar X, \bar Y, \bar Z \in \mathscr{X}(N)$vektorikentille $X, Y, Z \in \mathscr{X}(N)$ näemme helposti, että kaikissa pisteissä $q \in N$ pätee $[\bar X, \bar Y]|_q = [X, Y]|_q$, $[\bar Y, \bar Z]|_q = [Y, Z]|_q$ ja $[\bar Z, \bar X]|_q = [Z, X]|_q$.Koska $X, Y, Z \in \mathscr{X}(N)$ ja jatkot $\bar X, \bar Y, \bar Z$ valittiin kuten Lemmassa 9.2, niin alimonistolla N pätee $(\operatorname{tang}(\nabla^M_{\bar X}\bar Y), Z) = 2g(\nabla^M_{\bar X}\bar Y, \bar Z)$ ja $g(\bar Y, \bar Z) = g(Y, Z)$. Lisäksi vektorikenttien toiminta funktioilla on pisteittäistä siinä mielessä, että alimoniston N pisteessä q pätee $\bar X|_q f = X_q f$ kaikille $f \in \mathscr{F}(N)$. Siis pätee

$$\begin{aligned}
&2g(\operatorname{tang}(\nabla^M_{\bar X}\bar Y), Z)\\
&= 2g(\nabla^M_{\bar X}\bar Y, \bar Z)\\
&= \bar X\, g(\bar Y, \bar Z) + \bar Y\, g(\bar Z, \bar X) - \bar Z\, g(\bar X, \bar Y) - g(\bar Y, [\bar X, \bar Z]) - g(\bar Z, [\bar Y, \bar X]) + g(\bar X, [\bar Z, \bar Y])\\
&= X\, g(Y, Z) + Y\, g(Z, X) - Z\, g(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y])\\
&= 2g(\nabla^N_X Y, Z)\,,
\end{aligned}$$

joten väite seuraa Lauseesta 4.2. □

Esimerkki 9.5. Olkoon

$$S_z = \{x \in \mathbb{S}^2 : x_3 = z\}$$

Kun $0 < |z| < 1$, niin S_z on *pieni ympyrä*, joka on $\phi = \phi(z) = \arccos(z)$-säteinen pohjoisnapakeskinen ympyrä. Tarkastellaan tangenttivektorien käyttäytymistä yhdensuuntaissiirrossa tällaista ympyrää pitkin. Alkeisgeometriasta tiedämme, että pystysuoran koordinaattiakselin suhteen kiertosymmetrinen ympyräkartio C_z, jonka kärki on pisteessä $Q = (0, 0, 1/z) = (0, 0, \frac{1}{\cos\phi})$ ja jonka kärjestä lähtevät säteet muodostavat kulman $\pi/2$ tangenttivektorin $-Q$ kanssa, sivuaa alimonistoa $\mathbb{S}^2$ pitkin ympyrää S_z. Erityisesti siis jokaiselle $p \in S$ pätee $T_p\mathbb{S}^2 = T_p C_z$ tangenttiavaruuden $T_p\mathbb{E}^3$ aliavaruutena ja erityisesti kuvaukset $\operatorname{tang}^{\mathbb{S}^2}_p : T_p\mathbb{E}^3 \to T_p\mathbb{S}^2$ ja $\operatorname{tang}^{C_z}_p : T_p\mathbb{E}^3 \to T_p C_z$ yhtyvät.

Harjoitustehtävän 8.7 nojalla kärjetön kartio $C_z - \{Q\}$ on isometrinen Riemannin moniston kanssa, joka saadaan poistamalla rei'itetystä tasosta $\mathbb{E}^2 - \{0\}$ sopiva sektori, jonka kulma olkoon α, ja liimaamalla vapaat sivut yhteen. Yhdensuuntaissiirto pitkin ympyrää S_z tällä monistolla kiertää tangenttivektoreita kulman α verran verran. Lauseen 9.4 nojalla suuntaissiirto monistolla $\mathbb{S}^2$ antaa saman tuloksen!

9.2. **Toinen perusmuoto.** Riemannin moniston M alimoniston N *toinen perusmuoto* on kuvaus $I\!I : \mathscr{X}(N) \times \mathscr{X}(N) \to \mathscr{X}(N)^\perp$,

$$I\!I(X, Y) = \operatorname{norm}(\nabla_X Y)\,.$$

Määritelmien ja Lauseen 9.4 nojalla alimonistolla N pätee

(Gaussin kaava) $$\nabla^M_X Y = \nabla^N_X Y + I\!I(X, Y)\,.$$

Lemma 9.6. *Toinen perusmuoto on symmetrinen $\mathscr{F}(N)$-lineaarinen kuvaus.*

Todistus. Lineaarisuus tehdään harjoitustehtävänä. Symmetrisyys taas seuraa siitä, että $[X, Y] \in \mathscr{X}(N)$ kaikille $X, Y \in \mathscr{X}(N)$:

$$I\!I(X, Y) - I\!I(Y, X) = \operatorname{norm}(\nabla^M_X Y - \nabla^M_Y X) = \operatorname{norm}[X, Y] = 0\,. \quad \square$$

Toinen perusmuoto on myös eräänlainen tensori ja $\mathscr{F}(N)$-lineaarisuuden nojalla myös sillä on arvo, joka on $\mathbb{R}$-bilineaarikuvaus $I\!I|_p\colon T_pN \times T_pN \to T_pN^\perp$ jokaisessa pisteessä $p \in N$. Toista perusmuotoa kutsutaan joskus myös alimoniston N *muototensoriksi.*

Lause 9.7 (Gaussin yhtälö)**.**

$$R^N(X, Y, Z, W) = R^M(X, Y, Z, W) + g(I\!I(X, Z), I\!I(Y, W)) - g(I\!I(X, W), I\!I(Y, Z))\,.$$

Todistus. Voimme jälleen olettaa, että $[X, Y] = 0$. Tällöin Gaussin kaavan nojalla

$$\begin{aligned}
&R^M(X, Y, Z, W) \\
&= g(-\nabla^M_X \nabla^M_Y Z + \nabla^M_Y \nabla^M_X Z, W) \\
&= -g(\nabla^M_X \nabla^N_Y Z, W) - g(\nabla^M_X I\!I(Y, Z), W) + g(\nabla^M_Y \nabla^N_X Z, W) + g(\nabla^M_Y I\!I(X, Z), W)
\end{aligned} \tag{8}$$

Koska $W \in \mathscr{X}(N)$,

$$g(\nabla^M_X \nabla^N_Y Z, W) = g(\operatorname{tang} \nabla^M_X \nabla^N_Y Z, W) = g(\nabla^N_X \nabla^N_Y Z, W)\,.$$

Lisäksi käyttämällä konnektion ∇^M yhteensopivuutta Riemannin metriikan g kanssa ja sitä, että $I\!I(Y, Z) \in TN^\perp$, saadaan

$$\begin{aligned}
g(\nabla^M_X I\!I(Y, Z), W) &= X\, g(I\!I(Y, Z), W) - g(I\!I(Y, Z), \nabla^M_X W) \\
&= X\, 0 - g(I\!I(Y, Z), \operatorname{norm} \nabla^M_X W) \\
&= -g(I\!I(Y, Z), I\!I(X, W))\,.
\end{aligned}$$

Vastaava päättely pätee myös kahdelle viimeiselle termille yhtälössä (8), joten väite seuraa kaarevuustensorin määritelmästä. $\square$

Seuraus 9.8 (Gaussin yhtälö)**.**

$$K^N(P) = K^M(P) + \frac{g(I\!I(x, x), I\!I(y, y)) - g(I\!I(x, y), I\!I(x, y))}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}\,. \quad \square$$

Propositio 9.9 (Weingartenin yhtälö)**.** *Olkoot $X, Y \in \mathscr{X}(N)$ ja $U \in \mathscr{X}^\perp(N)$. Tällöin*

$$g(\nabla^M_X U, Y) = -g(U, I\!I(X, Y))\,.$$

Todistus. Koska $g(U, Y) = 0$ kaikkialla, pätee konnektion yhteensopivuuden, Gaussin kaavan ja ortogonaalisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
0 = X\, 0 = X g(U, Y) &= g(\nabla^M_X U, Y) + g(U, \nabla^M_X Y) \\
&= g(\nabla^M_X U, Y) + g(U, \nabla^N_X Y + I\!I(X, Y)) = g(\nabla^M_X U, Y) + g(U, I\!I(X, Y))\,. \quad \square
\end{aligned}$$

9.3. **Hyperpinnat.** Kun $N \subset M$ on hyperpinta, niin $T_pN^\perp$ on yksiulotteinen jokaisessa pisteessä $p \in N$. Yksikkönormaalikenttä $U \in \mathscr{X}^\perp(N)$ ja toinen perusmuoto määrittelevät *reaalisen toisen perusmuodon* $h\colon \mathscr{X}(N) \times \mathscr{X}(N) \to \mathbb{R}$,

$$h(X, Y) = g(I\!I(X, Y), U)\,,$$

jolle pätee

$$I\!I(X, Y) = h(X, Y)\, U\,.$$

Reaalinen toinen perusmuoto taas määrää yleistetyn $(1, 1)$-tensorin $s\colon \mathscr{X}(N) \to \mathscr{X}(N)$ yhtälöllä

$$h(X, Y) = g(s(X), Y) = g(X, s(Y))\,,$$

missä jälkimmäinen yhtälö pätee koska reaalinen toinen perusmuoto on symmetrinen. Tensoria s kutsutaan *muoto-operaattoriksi (shape operator)*.

Seuraavat ominaisuudet on helppo tarkastaa*:

Seuraus 9.10 (Weingartenin yhtälö hyperpinnoille)**.** *Olkoot $X \in \mathscr{X}(N)$ ja $U \in \mathscr{X}^{\perp}(N)$. Tällöin*

$$\nabla^M_X U = -s(X)\,. \quad \square$$

Seuraus 9.11 (Gaussin yhtälö hyperpinnoille)**.**

$$\begin{aligned} K^N(P) &= K^M(P) + \frac{h(x,x)\,h(y,y) - h(x,y)^2}{g(x,x)\,g(y,y) - g(x,y)^2} \\ &= K^M(P) + \frac{g(s(x),x)\,g(s(y),y) - g(s(x),y)^2}{g(x,x)\,g(y,y) - g(x,y)^2}\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 9.12. (1) Lasketaan hyperpinnan $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ kaarevuus muoto-operaattorin avulla: Vektorikenttä $U = \sum_i x^i \partial_i$ on alimoniston $\mathbb{S}^n$ yksikkönormaalikenttä. Se voidaan jatkaa samalla lausekkeella koko ympäröivään avaruuteen $\mathbb{E}^{n+1}$ ja kaikille vektorikentille pätee

$$s(X) = -\nabla_X U = -X,$$

joten sijoittamalla Seurauksen 9.11 lausekkeeseen minkä tahansa tason P minkä tahansa kannan saamme helposti tuloksen $K(P) \equiv 1$.

(3) Hyperbolisen avaruuden $\mathbb{H}^n$ ylemmän puoliavaruusmallin alimonisto

$$\mathscr{H} = \{x \in \mathbb{H}^n : x_n = 1\}$$

varustettuna indusoidulla metriikalla on isometrinen euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^{n-1}$ kanssa. Se on siis negatiivisesti kaarevan Riemannin moniston litteä hyperpinta.

9.4. **Geodeesit alimonistolla.** Olkoon $\gamma\colon I \to N$ polku Riemannin moniston M alimonistolla N. Olkoot $\frac{D^M}{dt}$ ja $\frac{D^N}{dt}$ kovariantit derivaatat pitkin polkua γ monistoilla M ja N. Gaussin kaavan nojalla

$$\frac{D^M}{dt}\dot\gamma(t) = \frac{D^N}{dt}\dot\gamma(t) + II(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\,. \tag{9}$$

Seuraus 9.13. *Polku $\gamma\colon I \to N$ on geodeesi alimonistolla N, jos ja vain jos sen M-kiihtyvyysvektori $\frac{D^M}{dt}\dot\gamma(t)$ on alimoniston N normaalivektori jokaisessa polun γ pisteessä.*

Todistus. Yhtälö (9) antaa kiihtyvyysvektorin $\frac{D^M}{dt}\dot\gamma(t)$ esityksen ortogonaalisena summana, toisen perusmuodon arvot ovat normaalivektoreita ja $\frac{D^N}{dt}\dot\gamma(t)$ on aina alimoniston N tangenttivektori. Jos kiihtyvyys on normaalivektori, niin tangentiaalinen komponentti on 0. $\square$

Esimerkki 9.14. Olkoon $\mathbb{T}$ Esimerkissä 2.2 tarkasteltu euklidisen avaruuden upotettu torus, joka on kuvauksen $F = F_{R,r}\colon [0,2\pi] \times [0,2\pi]$

$$F_{R,r}(\theta,\phi) = ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta)$$

kuvajoukko. Tällöin vektorikentät

$$\frac{dF\partial_\theta}{r} = \frac{\partial_\theta F(\theta,\phi)}{r} = (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

ja

$$\frac{dF\partial_\theta}{R + r\cos\theta} = \frac{\partial_\phi F(\theta,\phi)}{R + r\cos\theta} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

antavat jokaisessa toruksen pisteessä tangenttiavaruuden ortonormaalin kannan.

Olkoot

$$\gamma_{1,\theta}(t) = F(0,t) = ((R + r\cos\theta)\cos t, (R + r\cos\theta)\sin t, \sin\theta)\,,$$
$$\gamma_{2,\phi}(t) = F(t,0) = ((R + r\cos t)\cos\phi, (R + r\cos t)\sin\phi, r\sin t)\,.$$

Näiden polkujen kiihtyvyydet avaruudessa $\mathbb{E}^3$ on helppo laskea standardikoordinaateissa

$$\ddot{\gamma}_{1,\theta}(t) = (-(R + r\cos\theta)\cos t, -(R + r\cos\theta)\sin t, 0),$$
$$\ddot{\gamma}_{2,\phi}(t) = (-r\cos t\cos\phi, -r\cos t\sin\phi, -r\sin t).$$

Huomataan, että $\ddot{\gamma}_{1,\theta}(t) \in T_{\gamma_{1,\theta}(t)}\mathbb{T}^{\perp}$, jos ja vain jos $\theta = k\phi$ jollain kokonaisluvulla k ja että $\ddot{\gamma}_{2,\phi}(t) \in T_{\gamma_{2,\phi}(t)}\mathbb{T}^{\perp}$ kaikilla ϕ. Polut $\gamma_{1,0}$, $\gamma_{1,\pi}$ ja polut $\gamma_{2,\phi}$ kaikilla ϕ ovat siis geodeeseja Seurauksen 9.13 nojalla. Muilla parametrin θ arvoilla polut $\gamma_{1,\theta}$ eivät ole geodeeseja.

Toruksella T on pisteitä, joissa kaarevuudet poikkeavat toisistaan selvästi. Tarkastellaan muoto-operaattoria kuvauksen $F_R(r,\theta,\phi) = F_{R,r}(\theta,\phi)$ antamissa koordinaateissa. Näissä koordinaateissa euklidisen Riemannin metriikan lauseke on

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (R + r\cos\theta)^2 d\phi$$

ja koordinaattivektorikentistä saa helposti ortonormaalin kehyksen **

$$E_r = \partial_r, \quad E_\theta = \frac{\partial_\theta}{r}, \quad E_\phi = \frac{\partial_\phi}{R + r\cos\theta}\,.$$

Nollasta poikkeavat Christoffelin symbolit ovat

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -\cos\theta(R + r\cos\theta),$$
$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \cos\theta/(R + r\cos\theta)\,,$$

joten

$$s(E_\theta) = -\frac{1}{r}\nabla_{\partial_\theta}\partial_r = -\frac{\partial_\theta}{r^2} \text{ ja}$$
$$s(E_\phi) = -\frac{1}{R + r\cos\theta}\nabla_{\partial_\phi}\partial_r = -\frac{\cos\theta\,\partial_\phi}{(R + r\cos\theta)^2}\,.$$

Seurauksen 9.11 nojalla (käyttämällä ortonormaaliutta) saadaan

$$K(\theta,\phi) = \frac{\cos\theta}{r(R + r\cos\theta)}\,.$$

Näemme siis esimerkiksi, että Euklidisissa koordinaateissa

$$K(R + r, 0, 0) = K(0,0) = \frac{1}{r(R + r)} > 0,$$
$$K(R, r, 0) = K(\frac{\pi}{2}, 0) = 0\,,$$
$$K(R - r, 0, 0) = K(\pi, 0) = \frac{1}{r(R - r)} < 0\,.$$

Kuvasta katsomalla positiivinen kaarevuus tarkoittaa, että torus on kokonaan tangenttitasonsa yhdellä puolella, nollakaarevassa pisteessä torus sivuaa tangenttitasoaan ja negatiivisesti kaarevassa pisteessä toruksen pinnalla on polkuja, jotka kaareutuvat vastakkaisiin suuntiin.

Propositio 9.15. *Olkoon M Riemannin monisto. Olkoon U pisteen $p \in M$ normaaliympäristö. Olkoon P tangenttiavaruuden T_pM 2-ulotteinen taso ja olkoon*

$$S(P) = \exp_p(P)\,.$$

**Katso Luku 10

Tällöin
$$K^M(P) = K^{S(P)}(P) = K^{S(P)}(p)\,.$$

Todistus. Olkoon $v \in P$. Eksponenttikuvauksen määrittelyssä käytettävä M-geodeesi γ_v toteuttaa yhtälön (9) nojalla yhtälön
$$\frac{D^N}{dt}\dot\gamma_v(0) + II(\dot\gamma_v(0), \dot\gamma_v(0)) = \frac{D^M}{dt}\dot\gamma_v(0) = 0$$
ja koska $\frac{D^N}{dt}\dot\gamma(o) \perp II(\dot\gamma(0), \dot\gamma(0))$, täytyy päteä kaikille $v \in P$
$$II(\dot\gamma, \dot\gamma) = II(\dot\gamma_v(0), \dot\gamma_v(0)) = 0 = \frac{D^N}{dt}\dot\gamma(t)\,.$$
Polarisaation nojalla siis $II|_p = 0$, mistä väite seuraa Seurauksen 9.8 nojalla. □

Riemannin moniston M alimonisto N on *täysin geodeesinen*, jos jokainen alimoniston N geodeesi on moniston M geodeesi.

Seuraus 9.16. *Alimonisto N on täysin geodeesinen, jos ja vain jos $II = 0$.* □

Esimerkki 9.17. Ei ole kovin vaikea tarkastaa, että aliavaruudet $\mathbb{E}^k = \mathbb{E}^k \times \{0\} \subset \mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^k = \mathbb{S}^k \times \{0\} \subset \mathbb{S}^n$ ja $\mathbb{H}^k = \mathbb{H}^k \times \{0\} \subset \mathbb{H}^n$ ovat täysin geodeesisia.

Harjoitustehtäviä.

9.1. Olkoon $X \in \mathscr{X}(M)$. Osoita, että vektorikenttä $\operatorname{norm} X\colon N \to TN$, joka määritellään asettamalla $\operatorname{norm} X|_q = \operatorname{norm}(X_q)$ jokaiselle $q \in N$ on sileä.

9.2. Osoita, että toinen perusmuoto on $\mathscr{F}(N)$-lineaarinen.

9.3. Todista Seuraus 9.10.

9.4. Todista Seuraus 9.11.

9.5. Täydennä esimerkki 9.17.

Olkoon $U \subset M$ avoin joukko. Jos $E_1, E_2, \dots E_n \in \mathscr{X}(U)$ ovat vektorikenttiä, joille $(E_1|_p, E_2|_p, \dots E_n|_p)$ on tangenttiavaruuden T_pM kanta jokaisella p, niin $(E_1, E_2, \dots E_n)$ on *lokaali kehyskenttä*. Jos $U = M$, niin $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ on *(globaali) kehyskenttä*. Jos $(E_1|_p, E_2|_p, \dots, E_n|_p)$ on tangenttiavaruuden T_pM ortogonaalinen kanta jokaisessa pisteessä $p \in U$, niin $(E_1, E_2, \dots E_n)$ on *lokaali/globaali ortogonaalinen kehyskenttä.*

Joissain tilanteissa ortogonaalinen kehyskenttä on kätevämpi kuin koordinaattikehyskenttä $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ mutta pitää muistaa, että yleensä ei päde $[E_i, E_j] = 0$, kun taas koordinaattikehykselle pätee $[\partial_i, \partial_j] = 0$

Propositio 10.1. *Riemannin moniston jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa on lokaali ortonormaali kehyskenttä.*

Todistus. Olkoon U pisteen p normaaliympäristö. Olkoon $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ tangenttiavaruuden T_pM ortonormaali kanta. Määritellään $(E_1, E_2, \dots E_n)$ yhdensuuntaissiirtämällä kannan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ vektorit radiaalisia geodeeseja pitkin ympärisön U jokaiseen pisteeseen. Koska differentiaaliyhtälöiden ratkaisut riippuvat sileästi alkuarvoista, saatu kehyskenttä on sileä. Koska yhdensuuntaissiirto on lineaarinen isometria, saadaan ortonormaali kehys. □

Riemannin moniston M *tilavuusmuoto* on n-muoto dVol, jolle

$$\mathrm{dVol}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \pm 1$$

kaikille ortonormaaleille kehyksille $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Propositio 10.2. *Riemannin monistolla M on globaali tilavuusmuoto täsmälleen, jos M on suunnistuva.* □

Propositio 10.3. *Riemannin monistolla on lokaalissa koordinaattiympäristössä tilavuusmuoto, jolle pätee*

$$\mathrm{dVol}(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\,.$$

Todistus. Olkoot $V_1, V_2, \dots V_n \in \mathscr{X}(M)$ ja olkoot $V_i = \sum_k V_i^k \partial_k$. Määritellään

$$\mathrm{dVol}(V_1, V_2, \dots, V_n) = \det(V_j^i)\sqrt{|\det g_{ij}|}\,.$$

Determinantin multilineaarisuuden ja alternoivuuden nojalla nojalla dVol on alternoiva n-muoto.

Olkoon $(E_1, E_2, \dots E_n)$ lokaali ortonormaali kehyskenttä. Tällöin

$$\delta_{ij} = g(E_i, E_j) = g(\sum_k E_i^k \partial_k, \sum_\ell E_i^\ell \partial_\ell) = \sum_{k,\ell} E_i^k E_j^\ell g_{k\ell}\,,$$

joten

$$\begin{aligned} 1 = \det \delta_{ij} &= \det \sum_{k,\ell} E_i^k E_j^\ell g_{k\ell} \\ &= \det E_i^k \det E_j^\ell \det g_{ij} = (\det E)^2 \det g_{ij} \\ &= \mathrm{dVol}(E_1, E_2, \dots E_n). \end{aligned}$$

□

Esimerkki 10.4. (1) Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ tilavuusmuoto on

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n\,.$$

(2) Avaruuden $\mathbb{S}^2$ tilavuusmuoto stereografisen projektion antamissa koordinaateissa on

$$\frac{dx^1 \wedge dx^2}{1 + \|x\|^2} = \frac{4r}{(1+r^2)^2}\, dr \wedge d\theta\,.$$

(3) Hyperbolisen avaruuden $\mathbb{H}^n$ tilavuusmuoto puoliavaruusmallissa on

$$\frac{dx^1 \wedge dx^2}{x_2^n}\,.$$

Harjoitustehtäviä.

10.1. Määritä Riemannin monistojen $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2$ ja $\mathbb{H}^2$ tilavuusmuodot normaalikoordinaateissa ja laske r-säteisen pallon $B(p, r)$ pinta-ala näissä monistoissa.

Projektien aihe opiskellaan tehtävänannossa mainituista lähteistä ja/tai muista lähteistä. Aiheesta kirjoitetaan raportti, jossa todistetaan tarvittavat tulokset ja/tai selostetaan yksityiskohtaisesti tarkasteltava esimerkki.

Projekteista keskustellaan 2. helmikuuta klo 16 salissa MaD381, jota ennen ne olisi hyvä palauttaa.

11.1. Litteät monistot. Osoita, että Riemannin monisto M on lokaalisti euklidinen, jos sen kaarevuustensori $R = 0$. Todistus esitetään lähteessä [Lee1, Thm. 7.3]. Todistuksessa viitataan lähteeseen [Boo] mutta kommutatiivisten vektorikenttien normaalimuoto kannattaa opiskella lähteestä [Lee2, Thm. 18.6].

11.2. Ensimmäinen variaatio. Osoita, että geodeesit ovat polun pituuden antaman funktionaalin kriittisiä pisteitä. Katso [Lee1, Thm. 6.7]. Polun $\gamma\colon I \to M$ *energia* on

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_I |\dot{\gamma}|^2$$

Lähteessä [GHL, 2.96 ja III.B] osoitetaan, että γ on myös energiafunktionaalin kriittinen piste.

11.3. Semi-Riemannin metriikat ja hyperbolinen avaruus. Minkowskin avaruus [††] on pari

$$\mathbb{M}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, h)\,,$$

missä

$$h = -dt^2 + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$$

on *Lorentzin metriikka*[‡‡], on *semi-Riemannin monisto*. Osoita, että Lorentzin metriikka indusoi Riemannin metriikan alimonistolle

$$\mathscr{H}^n = \left\{(t,x) \in \mathbb{M}^{n,1} : -t^2 + \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 = -1\right\}$$

siten, että $\mathscr{H}^n$ on isometrinen hypebolisen avaruuden $\mathbb{H}^n$ kanssa. Kuvaile avaruuden $\mathscr{H}^n$ isometrioita Lorentzin ryhmän $\mathrm{O}^+(n,1)$ avulla ja kuvaile avaruuden $\mathscr{H}^n$ geodeesit. Katso [Lee1, Prop. 3.5, Prop. 3.6, Prop. 5.14]

[††] tuttu erityisestä suhteellisuusteoriasta.

[‡‡] joka ei ole positiividefiniitti

Viitteet

[Boo] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.

[dC] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[DF] D. S. Dummit and R. M. Foote. *Abstract algebra*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2004.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.

[Har] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Birkhäuser, Boston, Mass., second edition, 1982.

[Hel] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 80 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[Lee1] J. M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.

[Lee2] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[O'N] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[Par] J. Parkkonen. Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi, 2014. `http://users.jyu.fi/~parkkone/DY2014/DY2014.pdf`.