Lukuteoria 1 18.1.2022

Harjoitukset : Tehtäviä $7 \cdot 8 = 56$

Hyvitykset : 10 teht $\to$ 1 p
19 $\to$ 2
29 $\to$ 3
38 $\to$ 4
48 $\to$ 5

Harjoitusvast.otto ke klo 14–

Kertaus:

**Lause 1.6** (Jakoyhtälö). *Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja olkoon $b \neq 0$. Tällöin on yksikäsitteiset $q, r \in \mathbb{Z}$, joille*

$$a = qb + r \quad ja \quad 0 \leqslant r < |b|.$$

**Lause 1.8.** *Olkoot $n, k \in \mathbb{N} - \{0\}$, $k > 1$. Tällöin on yksikäsitteiset luvut $s \in \mathbb{N}$ ja $a_0, a_1, \dots a_s \in \mathbb{Z}$, joille*

*(1)* $n = a_s k^s + a_{s-1} k^{s-1} + \cdots + a_1 k + a_0$, $\Rightarrow$ $n = (a_s a_{s-1} \cdots a_0)_k$

*(2)* $0 \leqslant a_i < k$ *kaikilla* $i = 0, 1, \dots, s$ *ja* $\Rightarrow$ k-järjestelmä (10–)

*(3)* $a_s > 0$.

Näytetään, että pos. luonn. luvut ovat täsmälleen 10-järjestelmän luvut.

Tod. $k \geq 2 \Rightarrow k^0 = 1 < k^1 = k < k^2 < k^3 < \dots \quad 2\ k^s \leq n < k^{s+1} < \dots$

Jakoyhtälö: $n = a_s k^s + r$, $0 \leq r < k^s$

Jos $a_s \geq k$, niin $n = a_s k^s + r \geq k^{s+1} + r \geq k^{s+1}$ $\Rightarrow a_s < k$

Jos $a_s \leq 0$, niin $n = \underbrace{a_s k^s}_{\leq 0} + r \leq r < k^s \Rightarrow a_s > 0.$

$\circledast$

Induktiotodistus. Os. että kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on haluttu esitys.

1) $1 = 1 \cdot k^0$, $0 < 1 < k$. OK

2) Induktio-oletus: Kaikille luvuille $1, 2, \dots, n-1$ on haluttu esitys.

3) Os. että luvulla $n$ on haluttu esitys.

Induktioperiaate: kaikilla luonn. luvuilla on hal. esitys.

$\circledast \Rightarrow \quad n = a_s k^s + r$ ja $0 < a_s < k$. $0 \le r < k^s$.

Jos $r = 0$, niin $n = a_s k^s = a_s k^s + 0 \cdot k^{s-1} + \dots + 0 \cdot k + 0$ OK.

Jos $r \geq 1$, niin ind. ol. nojalla $\boxed{r = b_t k^t + \dots + b_0}$

$0 < b_t < k$, $0 \le b_j < k$.

Huom. $t < s$ sillä muuten $r \geq k^s$.

$\Rightarrow n = a_s k^s + b_t k^t + \dots + b_0$.

Os. että luvun $n$ esitys on 1-käsitteinen: ol. $n = a_s k^s + \dots + a_0$
$= b_t k^t + \dots + b_0$

ja kertoimet tot. väitteen ehdot. Vähennetään esitykset toisistaan.

$\Rightarrow 0 = \underbrace{(a_m - b_m)}_{\neq 0} k^m + \dots + (a_0 - b_0)$.
Jos eri esitykset

Huom. Jos $m = 0$
$0 = a_0 - b_0 \neq 0$ ⚡

Siis $m \geq 1$. $0 \leq a_i, b_i \leq k-1 \Rightarrow |a_i - b_i| \leq \underline{\underline{k-1}}$.

$$0 = (a_m - b_m)k^m + (a_{m-1} - b_{m-1})k^{m-1} + \dots + (a_0 - b_0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k^m}} \leq \Big|\underbrace{(a_m - b_m)}_{||\geq 1} k^m\Big| = \Big|\underbrace{(a_{m-1} - b_{m-1})}k^{m-1} + \dots + \underbrace{(a_0 - b_0)}\Big|$$

$$\leq (k-1)(k^{m-1} + \dots + k + 1)$$

$$\overset{\text{Har}}{=} \underline{\underline{k^m - 1}} \qquad \underline{\text{Ristiriita}}.$$

Siis esitys on 1-käsitteinen. $\square$

<u>Esim.</u> 1) Binaariluku = 2-järjestelmän luku $110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0$
$= 4 + 2 + 0 = 6$.
(kertoimet $a_k \in \{0,1\}$)

2) 10-järjestelmän luku 175 binaariluvuksi:

Jakoyhtälö: $175 = 2 \cdot \underbrace{87}_{2 \cdot 43 + 1} + 1 = 2(2 \cdot \underbrace{43}_{2 \cdot \underbrace{21}_{2 \cdot 10 + 1} + 1} + 1) + 1 = \dots + 4 + 2 + 1$

$$\dots = \overbrace{1010}^{A}\overbrace{1111}^{F}{}_2 = AF$$

$\Leftrightarrow 128 = 2^7$

## Jaollisuus 10-järjestelmässä.

**Lause 1.3**

$$(a_s a_{s-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_{10} = \underbrace{\sum_{k=1}^{s} a_k 10^k}_{\text{jaollinen luvuilla } 2,5,10} + a_0$$

jaollinen luvulla 2, 5, 10 $\iff$ $a_0$ jaollinen luvulla 2, 5, 10 $\iff a_0 = 0$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{s} a_k 10^k}_{\text{jaollinen luvulla } 100 = 25 \cdot 4} + (a_1 \cdot 10 + a_0) = (a_1 a_0)_{10}$$

jaollinen luvulla 4 $\iff 4 \mid (a_1 a_0)_{10}$.

## Jaollisuus luvuilla 3 ja 9.

**Huomaa:**

$10 = 9 + 1$

$100 = 99 + 1$

$1000 = 999 + 1$

$\vdots$

$9 \mid 99\ldots9$

$3 \mid 9 \Rightarrow 3 \mid 99\ldots9$

$$(a_s a_{s-1} \cdots a_1 a_0)_{10}$$

$$= a_s \underbrace{10^s}_{(10^s-1)+1} + a_{s-1} \underbrace{10^{s-1}}_{\underbrace{(10^{s-1}-1)}_{9:\text{llä jaollinen}}+1} + \cdots + a_1 \cdot \underbrace{10}_{9+1} + a_0$$

$$= \sum_{k=1}^{s} a_k (10^k - 1) + \underbrace{a_s + a_{s-1} + \cdots + a_1 + a_0}_{\text{numero summa}}$$

jaollinen 9:llä $\rightarrow$ jaollinen 3:lle

4

$\underline{L. 1,3}$: $9 \mid a_s \cdots a_0 \iff 9 \mid (a_s + a_{s-1} + \cdots + a_0)$

$\quad\quad 3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad 3$

$\underline{\text{Esim,}}$ Luvun $12345_{10}$ numerosumma on $1+2+3+4+5 = 15$

$3 \mid 15 \Rightarrow 3 \mid 12345$

$9 \nmid 15 \Rightarrow 9 \nmid 12345$.

$\underline{\text{Har}}$ $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})$ $\quad \underline{\underline{m \geq 2}}$

$a = 10, \quad b = -1 \Rightarrow a - b = 10 - (-1) = 11$

$\rightsquigarrow 11 \mid 10^m - (-1)^m = 10^m + (-1)^{m+1}$

$11 \mid 10^2 - (-1)^2 = 99$

$11 \mid 10^3 - (-1)^3 = 1001$

$$\boxed{\begin{aligned} &11 \mid (a_s \cdots a_0)_{10} \\ \iff &11 \mid \sum_{k=0}^{s} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^s a_s \end{aligned}}$$

$(a_s \cdots a_0)_{10} = \left( \sum_{k=1}^{s} a_k (10^k - (-1)^k + (-1)^k) \right) + a_0 = \overbrace{\sum_{k=1}^{s} a_k (10^k - (-1)^k)}^{\text{jaollinen } 11\text{:llä}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{s} (-1)^k a_k}_{\text{vuor. numerosumma}}$

(5)

Esim. Luvun 12345 vuorotteleva numerosumma on
$5-4+3-2+1=3 \Rightarrow 11 \nmid 12345$.

## 2 Suurin yhteinen tekijä

$a, b \in \mathbb{Z}$, $a \mid b \Rightarrow$ a on b:n jakaja
tekijä

Määr. Olk. $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Jos $d \mid a$ ja $d \mid b$, niin d on lukujen a ja b yhteinen tekijä. Jos $(a,b) \neq (0,0)$, niin

$$\mathrm{syt}(a,b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a \text{ ja } d \mid b\}$$

on lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä.

Esim. Luvun 6 tekijät ovat $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ } yht. tekijät $\pm 3$
15 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ } $\Rightarrow \mathrm{syt}(6,15) = 3$.