Lukuteoria 1 2023

Harjoitus 4: ratkaisuja

1. Määritä luvun 22599 alkutekijäesitys.

Ratkaisu. Numerosumma $2 + 2 + 5 + 9 + 9 = 27$ on jaollinen luvulla 9, joten $9 \mid 11583$. Lasku antaa $22599 = 9 \cdot 2511$. Luvun 2511 numerosumma $2 + 5 + 1 + 1 = 9$ on jaollinen luvulla 9, joten $9 \mid 2511$. Lasku antaa $2511 = 9 \cdot 279$. Luvun 279 numerosumma on 18, joten $9 \mid 279$. Itse asiassa $279 = 9 \cdot 31$ ja 31 on alkuluku. Siis $22599 = 3^6 \cdot 31$.

2. Muodosta luvun 111111 alkutekijäesitys.

Ratkaisu. Vuorotteleva numerosumma on $1-1+1-1+1-1 = 0$, joten $11 \mid 111111$ Lasku osoittaa, että $111111 = 11 \cdot 10101$. Luvun 10101 numerosumma on 3, joten $3 \mid 10101$. Lasku antaa $10101 = 3 \cdot 3367$. Loput tekijät saadaan kokeilemalla. Osoittautuu, että $3367 = 7 \cdot 481$ ja $481 = 13 \cdot 37$. Koska 37 on alkuluku, päädymme alkutekijäesitykseen $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

3. Olkoon $p > 3$ alkuluku. Voiko $p^2 + 2$ olla alkuluku? [1]

Ratkaisu. Alkuluku p ei ole jaollinen luvulla 3. Siis $3 \mid p-1$ tai $3 \mid p+1$. Lauseen 1.3(3) nojalla $3 \mid (p-1)(p+1) + 3$.

Toinen tapa: Oletuksesta seuraa, että $p = 3k + 1$ tai $p = 3k + 2$ jollain $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Lasku osoittaa, että $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ ja $(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1$. Siis $p^2 + 2 > 3$ on jaollinen luvulla 3, joten se ei ole alkuluku.

4. Olkoon $p \geqslant 5$ alkuluku. Osoita, että $12 \mid (p^2 - 1)$.

Ratkaisu. Alkuluku $p \geqslant 5$ ei ole parillinen, joten luvut $p - 1$ ja $p + 1$ ovat parillisia. Samoin p ei ole jaollinen luvulla 3, joten $3 \mid p - 1$ tai $3 \mid p + 1$. Seurauksen 2.14(1) ja jaollisuuslauseen nojalla $12 \mid p^2 - 1$.

5. Osoita, että joukossa $J = \{6k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$ on äärettömän monta alkulukua.

Ratkaisu. Huomataan ensin, että joukossa J on alkulukuja, esimerkiksi $5 = 6 - 1$, $11 = 6 \cdot 2 - 1$, $17 = 6 \cdot 3 - 1$, $23 = 6 \cdot 4 - 1$ ja $6 \cdot 5 - 1$ ovat tällaisia alkulukuja.

Olkoot $p_1, \ldots, p_k$ joukkoon J kuuluvia alkulukuja ja olkoon

$$N = 6p_1 \cdots p_k - 1.$$

Luku N on joukon J alkio. Se ei ole jaollinen millään luvuista $p_1, p_2, \ldots p_k$ eikä alkuluvuilla 2 tai 3.

Lauseen 3.10 nojalla $N = q_1 \cdots q_s$ joillain alkuluvuilla $q_1, \ldots, q_s$. Näytetään, että jokin luvun N alkutekijöistä q_i on muotoa $6n - 1$. Jakoyhtälön perusteella kaikilla $i = 1, \ldots s$ on $n_i, r_i \in \mathbb{Z}$, joille

$$q_i = 6n_i + r_i \text{ ja } 0 \leqslant r_i \leqslant 5.$$

[1] Tarkastele jaollisuutta luvulla 3.

Koska $2 \nmid N$, niin $r_i \notin \{0, 2, 4\}$. Koska $3 \nmid N$, niin $r_i \neq 3$. Jos olisi $r_i = 1$ kaikilla $i = 1, \ldots s$, niin N olisi muotoa $6n + 1$ olevien lukujen tulona myös muotoa $6n + 1$. Siten on oltava $q_i = 6n_i + 5 = 6(n + 1) - 1$ jollain $i = 1, \ldots s$. Koska luvut $p_1, \ldots p_k$ eivät ole luvun N tekijöitä, niin q_i ei ole mikään luvuista p_i.

6. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Osoita, että luvulla $n! + 1$ on alkutekijä p, jolle pätee $p > n$. Todista Lause 3.15 tämän havainnon avulla.

Ratkaisu. Olkoon $q \leqslant n$ alkuluku. Nyt

$$\begin{aligned} n! + 1 &= n(n-1)\ldots(q+1)q(q-1)\ldots 3 \cdot 2 + 1 \\ &= (n(n-1)\ldots(q+1)(q-1)\ldots 3 \cdot 2)q + 1\,. \end{aligned}$$

Jakoyhtälön perusteella $q \nmid n! + 1$. Täten aritmetiikan peruslauseen mukaan luvulla $n! + 1$ on alkutekijä p siten, että $n! + 1 \geqslant p > n$. Koska kyseinen tulos on totta kaikille $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, alkulukuja on äärettömän monta.

7. Todista Lause 2.22.

Ratkaisu. Olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_r$ eri alkulukuja ja olkoot

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \quad \text{ja} \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r}$$

joillain $e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{N}$. Koska $\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a + b$, saamme

$$\begin{aligned} \operatorname{syt}(a,b) \operatorname{pyj}(a,b) &= p_1^{\min\{e_1,f_1\}} p_2^{\min\{e_2,f_2\}} \cdots p_r^{\min\{e_r,f_r\}}\, p_1^{\max\{e_1,f_1\}} p_2^{\max\{e_2,f_2\}} \cdots p_r^{\max\{e_r,f_r\}} \\ &= p_1^{\min\{e_1,f_1\}+\max\{e_1,f_1\}} p_2^{\min\{e_2,f_2\}+\max\{e_2,f_2\}} \cdots p_r^{\min\{e_r,f_r\}+\max\{e_r,f_r\}} \\ &= p_1^{e_1+f_1} p_2^{e_2+f_2} \cdots p_r^{e_r+f_r} \\ &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r} = ab\,. \end{aligned}$$

8. Määritä luvut $\operatorname{syt}(11662, 95795)$ ja $\operatorname{pyj}(11662, 95795)$.

Ratkaisu. $11662 = 2 \cdot 7^3 \cdot 17$ ja $95795 = 5 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 23$, joten Lauseen 3.14 nojalla

$$\operatorname{syt}(11662, 95795) = 7^2 \cdot 17 = 833$$

ja

$$\operatorname{pyj}(11662, 95795) = 2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 17 \cdot 23 = 1341130\,.$$

Toinen tapa: Eukleideen algoritmi antaa

$$\begin{aligned} 95795 &= 8 \cdot 11662 + 2499 \\ 11662 &= 4 \cdot 2499 + 1666 \\ 2499 &= 1 \cdot 1666 + 833 \\ 1666 &= 2 \cdot 833\,, \end{aligned}$$

joten $\operatorname{syt}(11662, 95795) = 833$. Lauseen 2.22 nojalla

$$\operatorname{pyj}(11662, 95795) = \frac{11662 \cdot 95795}{\operatorname{syt}(11662, 95795)} = \frac{1117161290}{833} = 1341130\,.$$