Geometrian jatkokurssi
Harjoitus 3, 20.11.2014

1. Olkoon H avaruuden $\mathbb{S}^n$ hypertaso. Osoita, että $d(r_H(x), y) = d(x, y)$ kaikille $x \in \mathbb{S}^n$ ja $y \in H$.

2. Olkoon $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n)$, $\phi \neq \mathrm{id}$. Olkoon H hypertaso, jolle $\phi|_H = \mathrm{id}|_H$. Osoita, että $\phi = r_H$.

3. Osoita, että jokainen avaruuden $\mathbb{S}^2$ isometria voidaan esittää korkeintaan 3 peilauksen yhdistettynä kuvauksena.

Olkoon $c \in \mathbb{E}^n$ ja olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

4. Osoita, että
(1) $(x - c | \iota_{c,\alpha}(x) - c) = \alpha$ kaikille $x \in \mathbb{E}^n - \{c\}$.
(2) $\iota_{c,\alpha} \circ \iota_{c,\beta} = \frac{\alpha}{\beta}(x - c) + c$.

5. Olkoon $\alpha > 0$. Osoita, että $\operatorname{fix} \iota_{c,\alpha} = \mathbb{S}(c, \sqrt{\alpha})$.

6. Olkoon $n = 2$. Miten $\iota_{0,1}$ kuvaa ympyräperheen $\mathbb{S}((r, 0), r)$? Entä äärettömän verkon $(\mathbb{Z} \times \mathbb{E}^1) \cup (\mathbb{E}^1 \times \mathbb{Z})$? Piirrä kuvia.

7. Olkoon $P \in \mathbb{E}^n - \{c\}$ ja olkoot $u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu väli, jolle $j_{P,u}(I), j_{P,v}(I) \subset \mathbb{E}^n - \{c\}$. Osoita, että inversio säilyttää geodeesisten janojen $j_{P,u}$ ja $j_{P,v}$ kulman.