Geometrian jatkokurssi
Harjoitus 1, 6.11.2014

1. Olkoon $x_0 \in \mathbb{E}^n$ ja olkoot $u, v \in \mathbb{S}^n$. Olkoon $F\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ isometria. Geodeesiset viivat $j_{x_0,u}$ ja $j_{x_0,v}$ leikkaavat pisteessä x_0. Niiden välinen *kulma* on

$$\arccos(u|v) \in [0, \pi]\,.$$

(a) Osoita, että $F \circ j_{x_0,u}$ ja $F \circ j_{x_0,v}$ ovat geodeesisia viivoja.
(b) Osoita, että $F \circ j_{x_0,u}$ ja $F \circ j_{x_0,v}$ leikkaavat samassa kulmassa kuin $j_{x_0,u}$ ja $j_{x_0,v}$.

2. Määritä euklidisen tason $\mathbb{E}^2$ isometria F, jolle pätee $F(0) = (1,0)$, $F(1,0) = (1,1)$ ja $F(0,1) = (2,0)$.

3. Olkoon $H(0,u)$ euklidisen tason suora, joka muodostaa kulman $\frac{\phi}{2}$ positiivisen x_1-akselin kanssa. Olkoon r_u euklidisen tason peilaus suorassa $H(0,u)$.
(a) Määritä u, kun ϕ tunnetaan.
(b) Määritä kuvauksen r_u matriisi standardikannassa.
(c) Olkoot $u_1, u_2 \in \mathbb{S}^1$. Määritä kuvauksen $r_{u_2} \circ r_{u_1}$ matriisi standardikannassa.
(d) Esitä kierto kulman $\frac{\pi}{2}$ verran positiiviseen kiertosuuntaan kahden peilauksen yhdistettynä kuvauksena.

4. Olkoon r peilaus euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ affiinissa hypertasossa H. Osoita, että
(a) jos $0 \in H$, niin r on ortogonaalinen lineaarikuvaus.
(b) $r(x) = A(x) + b$, missä A on ortogonaalinen lineaarikuvaus ja $b \in \mathbb{R}^n$.

5. Olkoon H affiini hypertaso euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$ ja olkoon r_H vastaava peilaus. Osoita, että
(a) $r_H \circ r_H$ on identtinen kuvaus.
(b) $H = \{x \in \mathbb{E}^n : r_H(x) = x\}$.

6. Olkoon H avaruuden $\mathbb{E}^n$ affiini hypertaso. Osoita, että on $u \in \mathbb{S}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$H = \{x \in \mathbb{E}^n : (x|u) = c\}\,.$$

7. Osoita, että peilaus hypertasossa on hyvin määritelty: (P,u) ja (Q,v) määräävät saman hypertason, jos ja vain jos ne määräävät saman peilauksen.