Liite A. Metriset avaruudet

Metrisiä avaruuksia käsitellään laajemmin omalla kurssillaan. Tässä valitsemme teoriasta vain tarpeelliset osat. Hyviä lähteitä itseopiskeluun ovat esimerkiksi [Väi], [Pit].*

Olkoon $X \neq \emptyset$. Kuvaus $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ on *etäisyysfunktio* eli *metriikka* joukossa X, jos sillä n seuraavat ominaisuudet

- $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys), ja
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on *metrinen avaruus.*

Metriikka on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d_{\mathrm{E}}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

on.

Esimerkki A.1. Metrisiä avaruuksia ovat esimerkiksi seuraavat:

(1) Euklidinen metrinen avaruus $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{E}})$.

(2) Olkoon X epätyhjä joukko. *Diskreetti metriikka* δ joukossa X määritellään asettamalla

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \neq b \\ 0, & \text{jos } a = b\,. \end{cases}$$

Pari (X, d) on *diskreetti metrinen avaruus.*

(3) Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) tuloavaruudessa $X \times Y$ on erilaisia ”luonnollisia” metriikoita: Jokaiselle $p \geq 1$ määritellään metriikka

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p}\,.$$

Lisäksi maksimimetriikka

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on myös usein käyttökelpoinen.

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r > 0$. Joukko

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

on *r-säteinen avoin pallo* ja

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

on *r-säteinen suljettu pallo.* Avaruuden X osajoukko on *avoin*, jos se voidaan esittää avoimien pallojen yhdisteenä ja *suljettu*, jos sen komplementti on avoin.

Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in X_1$, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x_0), F(x)) < \epsilon$ kaikilla $x \in X_1$, joille $d_1(x_0, x) < \delta$. Kuvaus on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Kuvaus F on *K-Lipschitz -jatkuva* vakiolla $K > 0$, jos kaikille $x, y \in X$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) \leq K\, d_1(x, y)\,.$$

Cauchyn jonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa. Metrinen avaruus X on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

*Lähde [Pit] on laillisesti skannattuna `archive.org`-internetkirjastossa.

Kokoelma $(U_j)_{j\in J}$ on joukon B *peite*, jos $B \subset \bigcup_{j\in J} U_j$ ja se on *avoin peite*, jos joukot U_j ovat avoimia. Peite on *äärellinen*, jos indeksijoukko J on äärellinen. Jos $J' \subset J$, niin peite $(U_j)_{j\in J'}$ on peitteen $(U_J)_{j\in J}$ *alipeite*.

Metrisen avaruuden X osajoukko A on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen alipeite. Joukko A on *jonokompakti*, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä. Metrisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti. Heinen ja Borelin lause, jonka mukaan euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu, *ei päde* yleisesti.

Esimerkki A.2. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu väli. Välillä I määriteltyjen jatkuvien kuvausten $f : I \to \mathbb{R}^n$ vektoriavaruus $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksiminormilla

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Tämä seuraa kurssilla Sarjat ja Approksimointi/Analyysi 3 todistettavasta tuloksesta, jonka mukaan tasaisesti suppeneva jono jatkuvia funktioita suppenee kohti jatkuvaa funktioita.

Metrinen avaruus (X, d) on *ultrametrinen* avaruus, jos kolmioepäyhtälöä vahvempi epäyhtälö

$$d(x, y) \le \max\left(d(x, z), d(z, y)\right)$$

pätee kaikille $x, y, z \in X$. Diskreetti metrinen avaruus

Kuvaus $F : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on *isometrinen upotus*, jos kaikille $x, y \in X_1$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) = d_1(x, y)\,.$$

Jos isometrinen upotus on bijektio, niin se on *isometria*. Jos $G : (X_2, d_2) \to (X_3, d_3)$ on isometrinen upotus, niin $G \circ F$ on isometrinen upotus.

Esimerkki A.3. (1) Olkoon $b \in \mathbb{R}_n$. Kuvaus $x \mapsto x + b$ on euklidisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{E}})$ isometria.

(2) Ortogonaalinen $n\times n$-matriisi A määrää isometrian $x \mapsto A\,x$ eukdlidisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{E}})$ ja pallon pinnalla $(\mathbb{S}^{n-1}, d_{\mathrm{E}})$.

Metrinen avaruus X on *separoituva*, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko. Esimerkiksi $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, $\mathbb{S}^1 = \overline{\{[q] : q \in \mathbb{Q}\}}$, joten nämä metriset avaruudet ovat separoituvia. Kaikki kompaktit metriset avaruudet ovat separoituvia. Toisaalta, jos Y on ylinumeroituva joukko varustettuna *diskreetillä metriikalla* $d(a, b) = 1$ kaikilla $a \ne b$, niin Y ei ole separoituva.

Piste $x \in X$ on *eristetty*, jos $B(x, r)$ on äärellinen joukko jollain $r > 0$. Esimerkiksi kaikkien diskreettien metristen avaruuksien kaikki pisteet ovat eristettyjä.

Harjoitustehtäviä.

A.1. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

A.2. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

Olkoon X ultrametrinen avaruus.

A.3. Osoita, että kaikille $y \in B(x,r) \subset X$ pätee $B(y,r) = B(x,r)$.

A.4. Osoita, kaikki avaruuden X pallot ovat avoimia ja suljettuja

---

A.5. Osoita, että Heinen ja Borelin lauseen väite ei päde äärettömässä diskreetissä metrisessä avaruudessa.

A.6. Osoita, että Heinen ja Borelin lauseen väite ei ole voimassa metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^n - \{0\}, d_{\mathrm{E}})$.

A.7. Osoita, että kompaktit metriset avaruudet ovat separoituvia.

Viitteet

[Ben] F. Benford. The law of anomalous numbers. *Proc. Amer. Phil. Soc*, 78:551–572, 1938.

[Con] J. H. Conway. On unsettleable arithmetical problems. *Amer. Math. Monthly*, 120(3):192–198, 2013.

[Dev] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.

[HK] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003.

[HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.

[HJ] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Pit] C. G. C. Pitts. *Introduction to metric spaces*. Oliver & Boyd [Longman Group Ltd.], Edinburgh, 1972. `https://archive.org/details/IntroductionToMetricSpaces`.

[Väi] J. Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2007.