Johdatus dynaamisiin systeemeihin
Harjoitustyöt 2016

Kirjoita selkeästi jäsennelty esitys yhdestä tehtävästä. Työssä on suotavaa käyttää lähdemateriaalia, joitain lähteitä on mainittu tehtävän annossa, muitakin voi etsiä kirjastosta. Kirja [2] on saatavana myös e-kirjana yliopiston kirjaston kautta. Autan tarvittaessa esimerkiksi lähteiden hankkimisessa ja tulkitsemisessa.

Kurssin suoritus arvostellaan, kun harjoitustyö on palautettu. Palauttamiseen ei ole aikarajaa, mutta myöhäiset palautukset luetaan ehkä vieläkin tarkemmin.

Harjoitustyö kirjoitetaan ensisijaisesti LaTexilla. Tarvittavia pohjatiedostoja saa esimerkiksi Ari Lehtosen TeX-oppaasta `http://users.jyu.fi/~lehtonen/texopas/`. Muullakin tavalla *siististi* toteutettu työ voidaan hyväksyä.

Ryhmätyö pienissä ryhmissä on sallittu. Tällaisissa tapauksissa palautetaan ainostaan yksi harjoitustyö, jonka tekemiseen oletan kaikkien ryhmäläisten osallistuvan aktiivisesti.

---

1. Esittele *Birkhoffin keskiarvo-operaattori*, joka määritellään funktioille $\phi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\mathscr{B}_n(\phi)(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(R_\alpha^n(x))$$

kaikille $x \in \mathbb{S}^1$.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoon R_α ympyrän irrationaalinen kierto. Osoita, että kaikille Riemann-integroituville funktioille $\phi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(R_\alpha^n(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi(s)ds\,.$$

Lähteet: [2, Luku 4.1.5], erityisesti Thm. 4.1.15.

2. Osoita, että logistisella funktiolla F_μ on puoleensavetävä aidosti 3-jaksollinen rata sopivalla parametrin μ arvolla. Selitä, miten tämä ilmenee bifurkaatiokaaviossa.

Lähteitä: [4], [1].

3. Todista seuraava versio *Sharkovskin lauseesta.* Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ kompakti väli, ja olkoon $f\colon I \to I$ jatkuva. Jos dynaamisella systeemillä $f\colon I \to I$ on piste, jonka aito jakso on 3, niin systeemillä on piste, jonka aito jakso on q millä tahansa $q \geq 2$.

Lähteitä: [2, Luku 11.3.2], [3, Luku 3.1].

4. *Topologisella Markovin ketjulla* tarkoitetaan vasemman siirron määräämää dynaamista systeemiä melko yksinkertaisella säännöllä määritellyillä jonoavaruuden Σ_N osajoukolla. Esittele topologisen Markovin ketjun määritelmä, anna jokin esimerkki ja todista tulos, joka antaa n-jaksollisten pisteiden lukumäärän kaikilla n.

Lähteitä: [2, Luvut 7.3.4 ja 7.3.7]. Jaksollisten pisteiden määrää koskeva tulos on Corollary 7.3.6.

Viitteet

[1] J. Bechhoefer. The Birth of Period 3, Revisited. *Math. Mag.*, 69(2):115–118, 1996. URL: http://www.jstor.org/stable/2690665?origin=pubexport.

[2] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003.

[3] C. Robinson. *Dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. Stability, symbolic dynamics, and chaos.

[4] P. Saha and S. H. Strogatz. The Birth of Period 3. *Mathematics Magazine*, 68:42–47, 1995. URL: https://www.maa.org/sites/default/files/269137619927.pdf.