

JOHDATUS DYNAAMISIIN SYSTEEMEIHIN 2016

JOUNI PARKKONEN

TÄSTÄ KURSSISTA

Tämä kurssi antaa pikaisen johdannon joihinkin dynaamisten systeemien keskeisiin käsitteisiin. Kurssi on aineopintotasoinen, esitiedoiksi riittävät ensimmäisen vuoden analyysin ja lineaarialgebran kurssit ja perustiedot euklidisen avaruuden geometriasta ja topologiasta (avoimet ja suljetut joukot, tiheät joukot, jatkuvuus, raja-arvo jne.). Vektorifunktioiden analyysin kurssit antavat hyödyllistä koneistoa näiden käsitteiden tarkasteluun.

Osa yleisistä määritelmistä tuloksista muotoillaan metrinen avaruuksien kontekstissa. Tarkastelemme myös symbolista dynamiikkaa, joka tapahtuu jonoavaruuksissa, joita tarkastelemme metrisinä avaruuksina. Tarvittavat metrinen avaruuksien teorian määritelmät ja tulokset käsitellään kurssilla.

Suosittelavaa lukemista kurssin tueksi on lueteltu materiaalin lopussa olevassa lähde-luettelossa, hyviä oppikirjoja ovat muun muassa [Dev], [HSD],[HK]. Tätä kurssia suunnitelmassa [HK] on ollut tärkeä lähde.

Suurin osa tekstin kuvituksesta on tehty Mathematica-ohjelmiston avulla.

Tekstissä on joitakin viittauksia Wolfram Demonstrations Projectissa tuotettuihin havainnollistuksiin.*

MERKINTÖJÄ JA SOPIMUKSIA

Tekstissä on symbolein *, † jne. merkittyjä alaviitteitä. Lisäksi, jos harjoitustehtävään **a.b.** on annettu vihje, se on alaviitteenä ^bVihje:

Luonnollisten, kokonais-, rationaali- ja reaalilukujen joukoista käytetään tavanomaisia merkintöjä \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} ja \mathbb{C} . Tällä kurssilla $0 \in \mathbb{N}$.

Joukkojen erotusta merkitään $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Last update: marraskuuta 29, 2016.

*<http://demonstrations.wolfram.com/> Näiden havainnollistusten tarkastelemista varten on asennettava ilmainen Wolfram CDF Player. Havainnollistukset eivät toimi Google Chrome -selaimella.

1. KIINTOPISTEET, JAKSOLLISET PISTEET, ASYMPTOOTTINEN KÄYTTÄYTYMINEN

Olkoon X joukko ja olkoon $f: X \rightarrow X$. Kuvauksen f n :s iteraatti f^n määritellään kaikille $n \in \mathbb{N}$ asettamalla $f^0 = \text{id}$ ja asettamalla rekursiivisesti

$$f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ kertaa}}.$$

Pisteen x (*positiivinen*) *rata* on

$$\mathcal{O}^+(x) = \mathcal{O}_f^+(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Jos f on bijektio, voidaan tarkastella myös sen negatiivisia iteraatteja $f^k = (f^{-1})^{-k}$ kaikille $k < 0$ ja voidaan tarkastella pisteen x *täyttä rataa*

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}_f(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Muodollisesti sanomme, että kolmikko $((X, d), f, \mathbb{A})$ on diskreetti dynaaminen systeemi, missä $\mathbb{A} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ kertoo, mitä iteraatteja tarkastellaan. Kokonaislukuja tai luonnollisia lukuja voi tässä ajatella *diskreettinä aikana*, jolloin kuvauksen f iterointi tarkoittaa systeemin aikakehityksen tarkastelua.

Yleensä dynaamisia systeemejä tarkasteltaessa ollaan kiinnostuneita myös siitä, miten jonkin tarkasteltavan pisteen lähellä olevat pisteet käyttäytyvät. Yleisesti tarkastellaankin metrisissä* avaruuksissa (X, d) määriteltyjä kuvauksia.† Tarkasteltavat kysymykset liittyvät ratojen *asymptoottiseen käyttäytymiseen*:

- Onko jonolla $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvoa?
- Onko rata $\mathcal{O}_f(x)$ tiheä?
- Miten lähekkäisten pisteiden radat käyttäytyvät toistensa suhteen?

Tällä kurssilla tutustumme dynaamisiin systeemeihin suuressa määrin esimerkkien kautta. Kurssin aikana tapaamme myös joitakin dynamiikan sovelluksia muihin matematiikan aloihin kuten differentiaaliyhtälöiden teoriaan ja lukuteoriaan.

1.1. Kiintopisteet ja jaksolliset pisteet. Jos $f(x) = x$, niin x on kuvauksen f tai dynaamisen systeemin (f, X) *kiintopiste*. Jos $f^p(x) = x$ jollain $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, niin x on *p -jaksollinen piste*. Erityisesti kiintopiste on 1-jaksollinen. Dynaamisen systeemin (f, X) p -jaksollisten pisteiden joukko on

$$\mathcal{P}_p(f) = \mathcal{P}_p(f, X) = \{x \in X : f^p(x) = x\}.$$

Jos x on p -jaksollinen ja se ei ole k -jaksollinen millään $1 \leq k < p$, niin p on pisteen x *jakso*. Tällöin sanotaan myös, että x on *aidosti p -jaksollinen* piste.

Esimerkki 1.1. (1) Olkoon $0 < k < 1$. Lineaarikuvauksella $K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Kx = kx$ on *kiintopiste* $0 \in \mathbb{R}$: $K0 = 0$. Lisäksi jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ pätee $L^k x \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Kaikki radat siis suppenevat kohti *puoleensavetävää (attraktiivista)* kiintopistettä 0.

(2) Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 2)}{3}.$$

Piste 0 on kiintopiste ja

$$-1 \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} 1$$

on 2-jaksollinen rata.

*ja joskus yleisemmissä topologisissa

†Katso liite A.

Esimerkki 1.2. Collatzin $(3n+1)$ -ongelma on esimerkki hyvin yksinkertaisesta dynaamisesta systeemistä, jonka ilmeistä asymptoottista käyttäytymistä ei osata todistaa. Olkoon $C: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ määritely asettamalla

$$C(n) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{kun } n \text{ on pariton} \\ \frac{n}{2}, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Pisteen 1 rata on $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Kokeilemalla huomaamme, että kaikkien pisteiden radat näyttävät päätyvän lopulta tähän 3-jaksoiseen rataan. Esimerkiksi

$$3 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

Tämä havainto on tarkastettu ainakin noin lukuun 5.76×10^{18} saakka. Collatzin ongelmasta voi lukea esimerkiksi artikkelista [Con] ja sen viittauksista.

Olkoon $f: X \rightarrow X$. Sanotaan, että joukko $A \subset X$ on f -invariantti, jos $f(A) \subset A$.

Esimerkki 1.3. (1) Määritelmän mukaan jokainen rata on invariantti.

(2) Olkoon $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k(x) = \frac{x}{2}$. Tällöin kaikki 0-keskiset pallot ovat invariantteja.

Olkoon x p -jaksollinen piste. Tällöin x on (lokaalisti) puoleensavetävä, jos on pisteen x avoin ympäristö U siten, että $f^p(y) \rightarrow x$ kaikille $y \in U$. Vastaavasti x on lokaalisti hylkivä, jos on pisteen x avoin ympäristö U siten, että jokaisella $y \in U - \{x\}$ on $n = n(y)$ siten, että $f^{np}(y) \notin U$. Se on hylkivä, jos on pisteen x avoin ympäristö U siten, että jokaisella $y \in U - \{x\}$ on $N = N(y)$ siten, että $\mathcal{O}_{f^p}^+(f^{Np}(y)) \cap U = \emptyset$.

Jos $d(x_0, y_k) \leq K^k d(x_0, x)$ kaikille $x \in X$, niin sanotaan, että pisteet y_k lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella.

1.2. Differentioituvaa dynamiikkaa. Jos dynaamisen systeemin kuvaus on differentioituva, kiintopisteiden luonne voidaan usein selvittää derivaatan/differentiaalilaskennan avulla:

Propositio 1.4. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli. Olkoon $x_0 \in I$ C^1 -funktion $g: I \rightarrow I$ kiintopiste.

(1) Jos $|g'(x_0)| < 1$, niin on avoin g -invariantti väli $U \subset I$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että $g^k(x) \rightarrow x_0$ eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$, kun $k \rightarrow \infty$.

(2) Jos $|g'(x_0)| > 1$, niin x_0 on lokaalisti hylkivä kiintopiste.

Todistus. (1) Olkoon $x \in I$. Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on ξ pisteiden x_0 ja x välissä, jolle pätee

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Koska g on C^1 ja $|f'(x_0)| < 1$, niin jollain x_0 -keskisellä välillä J pätee $|f'(y)| < K < 1$ jollain K kaikille $y \in J$.

Toinen väite todistetaan samaan tapaan. □

Jos $g'(x_0) = \pm 1$ Propositiossa 1.4, niin pisteen x_0 luonnetta ei voi päätellä pelkällä derivaattatiedolla. Sanomme tällaista kiintopistettä epämääräiseksi.

Jos x_0 on C^1 -kuvauksen $f: I \rightarrow I$ p -jaksollinen piste, niin

$$(f^p)'(x_0) = \prod_{x \in \mathcal{O}_f^+(x_0)} f'(x)$$

on vakio kaikille jaksollisen radan pisteille. Jos x_0 on kuvauksen f^p puoleensavetävä kiintopiste, niin kaikki muutkin radan $\mathcal{O}^+(x_0)$ pisteet ovat puoleensavetäviä kiintopisteitä. Tällöin pisteen x_0 rata on puoleensavetävä rata.

Esimerkki 1.5. Esimerkin 1.1 tapauksessa $f'(0) = -\frac{4}{3}$, joten 0 on hylkivä kiintopiste. Toisaalta $f'(-1) = f'(1) = -\frac{1}{3}$, joten $-1 \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} 1$ on puoleensavetävä 2-jaksollinen rata.

Olkoon $f: X \rightarrow X$ dynaaminen systeemi. Piste x on *positiivisesti (tai eteenpäin) asymptoottinen* pisteen p kanssa, jos $d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow +\infty$. Jos f on homeomorfismi, niin x on *negatiivisesti (tai taaksepäin) asymptoottinen* pisteen p kanssa, jos $d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow -\infty$. Pisteen p kanssa positiivisesti asymptoottiset pisteet muodostavat *pisteen p vakaan joukon* $W^s(p) = W_f^s(p)$ ja negatiivisesti asymptoottiset pisteet muodostavat *pisteen p epävakaa joukon* $W^u(p) = W_f^u(p)$.

Propositio 1.6. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja olkoon $x_0 \in I$ C^1 -kuvauksen $g: I \rightarrow I$ kiintopiste. Jos $|g'(x_0)| < 1$, niin puoleensavetävän kiintopisteen x_0 vakaa joukko on avoin.*

Todistus. Harjoitustehtävä. Avoimisuus seuraa derivaatan jatkuvuudesta. □

Esimerkki 1.7. Olkoon $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Lx = (2x_1, \frac{1}{2}x_2)$. Kiintopiste 0 vetää puoleensa x_2 -akselin pisteitä ja on sen lokaalisti hylkivä systeemille $L: \mathbb{R}^2 - \{(a, 0) : a \neq 0\}$.

Kaikki pisteet $x \in \mathbb{R}^2$, joille $x_1 \neq 0$ ovat positiivisesti asymptoottisia pisteen $(x_1, 0)$ kanssa:

$$W_L^s(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = x_1\}.$$

Vastaavasti, jos $x_2 \neq 0$, niin

$$W_L^u(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = x_2\}.$$

Propositio 1.6 yleistyy moniulotteiseen tilanteeseen oleellisesti samalla todistuksella. Olkoon seuraavassa Dg kuvauksen $g: U \rightarrow U$ differentiaali. Matriisin A *normi* on

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propositio 1.8. *Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja olkoon $x_0 \in V$ C^1 -kuvauksen $g: V \rightarrow V$ kiintopiste. Jos $\|Dg(x_0)\| < 1$, niin on g -invariantti avoin joukko $U \subset V$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että pisteet $g^k(x)$ lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$. Erityisesti $U \subset W^s(x_0)$. Puoleensavetävän kiintopisteen x_0 vakaa joukko on avoin.* □

1.3. Graafinen analyysi. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Kuvauksen $f: I \rightarrow I$ dynamiikkaa on joskus hyödyllistä havainnollistaa *graafisella analyysillä*:

- (1) Piirretään samaan kuvaan tarkasteltavan funktion ja identtisen funktion kuvaajat.
- (2) Valitaan piste $x \in I$.
- (3) Piirretään pystysuora jana $[(x, x), (x, f(x))] \subset I \times I$.
- (4) Piirretään vaakasuora jana $[(x, f(x)), (f(x), f(x))] \subset I \times I$.
- (5) Palataan vaiheeseen (3) ja korvataan $x \rightarrow f(x)$.

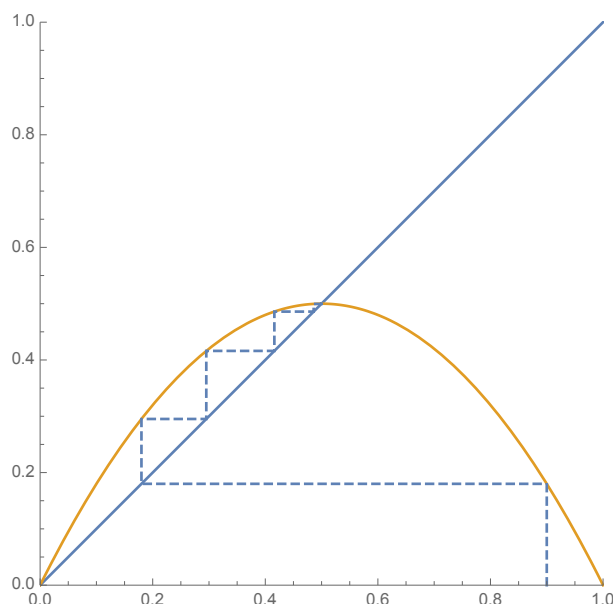
Graafisen analyysin ensimmäinen vaihe näyttää kuvauksen f kiintopisteet: Kuvaajien leikkauspisteissä pätee $f(x) = x$. Jaksollisia pisteitä jaksolla p voi etsiä tekemällä graafista analyysia kuvaukselle f^p .

Seuraava tulos voi olla hyödyllinen graafisen analyysin paikkansapitävyyden perustelussa.

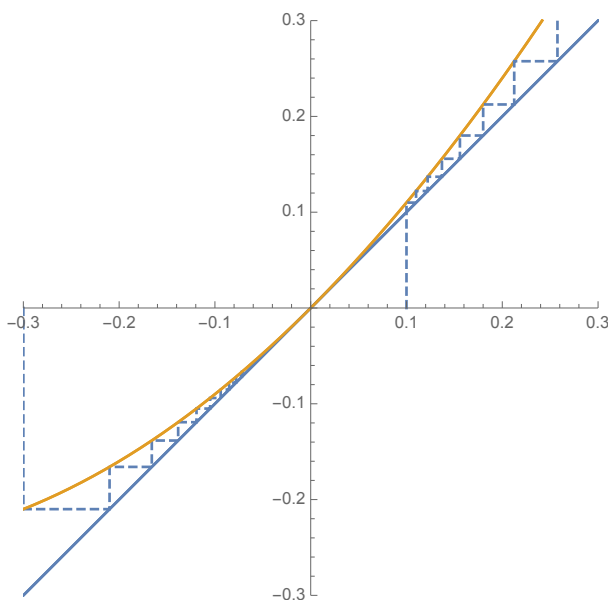
Lemma 1.9. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli ja olkoon $f: I \rightarrow I$ jatkuva kasvava funktio. Tällöin jokaiselle $x \in I$ on kuvauksen f kiintopiste $p = p(x) \in I$, jolle pätee $f^k(x) \rightarrow p$, kun $k \rightarrow \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemman 1.9 antama kiintopiste ei kuitenkaan välttämättä ole puoleensavetävä kuten seuraava esimerkki osoittaa:



KUVA 1. Jos x_0 on kiintopiste, $|f'(x_0)| < 1$ ja alkuarvo x on riittävän lähellä pistettä x_0 , niin $f^n(x) \rightarrow x_0$ eksponentiaalisella nopeudella, jolloin kuva on esimerkiksi tällainen.



KUVA 2. Esimerkin 1.10 kuvauksen $x \mapsto f(x) = x + x^2$ graafinen analyysi.

Esimerkki 1.10. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^2$. Tällöin $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$, joten kiintopisteen 0 luonnetta ei voi päätellä Proposition 1.4 avulla. Nyt kuitenkin pätee kaikille $f(x) = x + x^2 > x$ kaikille $x \neq 0$. Siis kaikille $x > 0$ pätee

$$0 < x < f(x) < f^2(x) < \dots < f^k(x) < f^{k+1}(x) < \dots,$$

joten $f^k(x) \not\rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Sen sijaan kaikille $-1 < x < 0$ pätee $x < f(x) < 0$, joten jono $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti jotain raja-arvoa x_∞ . Kuvauksen f jatkuvuuden nojalla $f(x_\infty) = x_\infty$ ja koska 0 on ainoa kiintopiste, pätee siis $f^k(x) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$.

1.4. **Dynamiikkaa kompleksitasossa.** [‡] Tarkastellaan funktiota $P_0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P_0(z) = z^2$. Muista: Jos $z = x + iy$ ja $w = u + iv$ ovat kompleksilukuja, niin

$$zw = xu - yv + i(xv + yu)$$

ja erityisesti

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Napakoordinaateissa

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) = e^{i\phi},$$

joten on helppo nähdä, että

$$P(z) = z^2 = r^2(\cos(2\phi) + i \sin(2\phi)) = e^{i2\phi}.$$

Tästä muodosta näkee, että joukot

$$\begin{aligned} B(0, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \\ S(0, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad \text{ja} \\ \mathbb{C} - \bar{B}(0, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \end{aligned}$$

ovat invariantteja ja että pisteet 0 ja 1 ovat kiintopisteitä. Kaikille joukon $\mathbb{C} - \bar{B}(0, 1)$ pisteille pätee $|P_0^n(z)| = |z|^n \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$.

Polynomien P_0 dynamiikka näyttää siis melko yksinkertaiselta. Tosin, kun myöhemmin kurssilla tarkastelemme lähemmin kuvauksen P_0 rajoittumaa ympyrälle $S(0, 1)$, huomaamme, että tämänkin kuvauksen dynamiikka on melko runsasta. Osoitamme itse asiassa, että $P_0: S(0, 1) \rightarrow S(0, 1)$ on kaoottinen dynaaminen systeemi kunhan ensin määrittelemme kaaoksen käsitteen luvussa 6.

Polynomifunktioiden $P_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P_c(z) = z^2 + c$ dynamiikka sen sijaan on ilmeisen mielenkiintoista. Esimerkiksi polynomien $P_c(x)$ täytetty Julian joukko

$$K_c = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{O}_{P_c}(z) \text{ on rajoitettu}\}$$

ja Mandelbrotin joukko

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : K_c \text{ on yhtenäinen}\}$$

ovat mielenkiintoisia fraktaaleja lukuunottamatta joukkoa K_0 , joka on suljettu yksikkökierros, kuten edellä nähtiin.[§]

Julian ja Mandelbrotin joukkojen käsittely edellyttää hieman edistyneempää kompleksianalyysin tuntemusta. Tällä kurssilla emme perehdy kompleksidynamiikan edistyneempiin osiin.

Harjoitustehtäviä.

1.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Osoita, että kuvauksella f on kiintopiste,

- (1) jos $f(I) \subset I$ ja
- (2) jos $I \subset f(I)$.

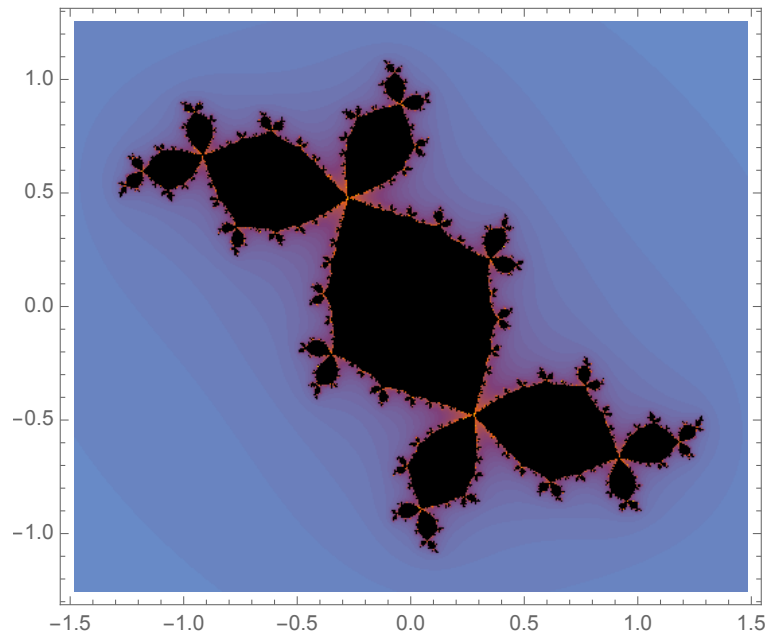
Osoita esimerkkien avulla, että väliä I koskevat oletukset ovat tarpeellisia.

1.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä suljettu joukko ja olkoon $f: A \rightarrow A$ jatkuva kuvaus. Osoita, että kuvauksen f kiintopisteiden joukko on suljettu.

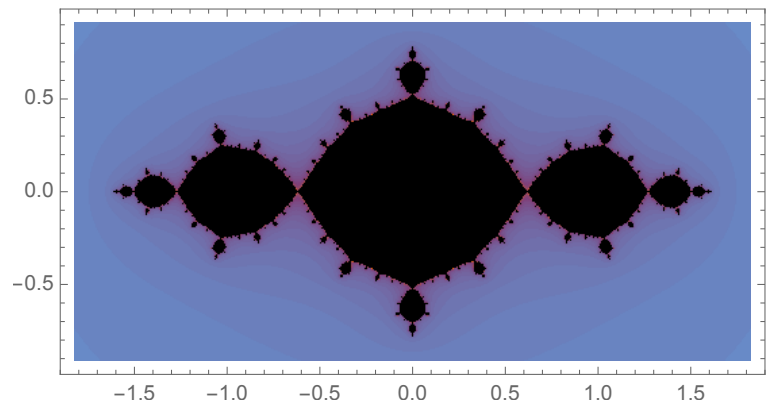
[‡]Kompleksilukujen perusasioita voi kerrata tai opiskella esimerkiksi lähteestä <http://users.jyu.fi/~juhaleh/kompleksiluvuista.pdf>

[§]Näihin fraktaaleihin voi tutustua esimerkiksi demonstraatiolla <http://demonstrations.wolfram.com/JuliaSetsAndTheMandelbrotSet/>.

¹Vihje: Kurssit Raja-arvo ja jatkuvuus ja Reaalimuuttujan analyysin perusteet.



KUVA 3. Douadyn jänis $K_{-0.123+0.745i}$.



KUVA 4. K_{-1} .

1.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus. Osoita, että kuvauksen f kiintopisteiden joukko on suljettu.

1.4. Todista Proposition 1.4 toinen väite.

1.5. Todista Propositio 1.6.

1.6. Todista Lemma 1.9.

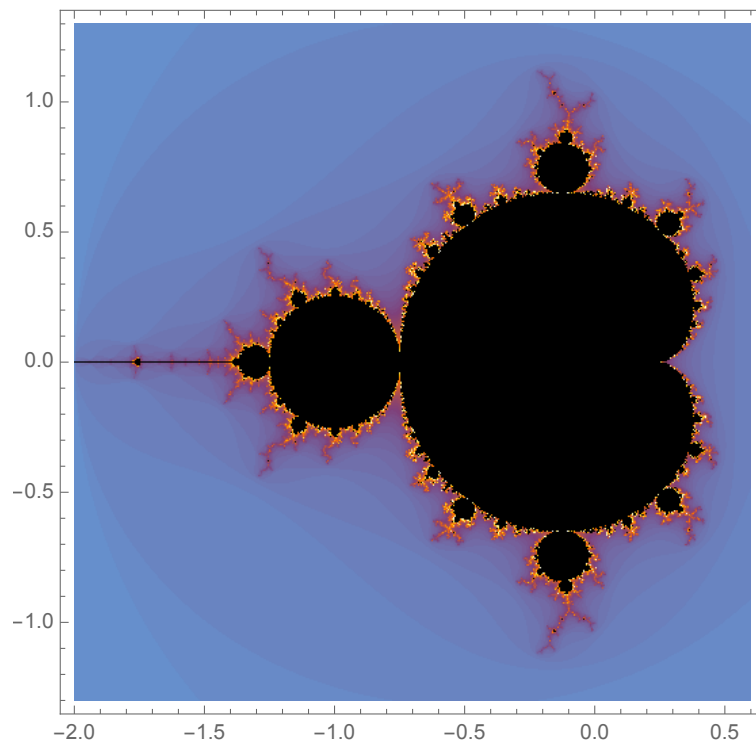
1.7. Olkoon $A \subset [0, 1]$ suljettu joukko, $A \neq \emptyset$. Osoita, että on kasvava kuvaus $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, jonka kiintopisteiden joukko on A .

1.8. Olkoon $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ kasvava ja olkoon $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vähenevä. Osoita, että kuvauksen f jokainen jaksollinen piste on kiintopiste ja että kuvauksen g jokaisen jaksollisen pisteen jakso on 1 tai 2.

1.9. Olkoot $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + x^3, \\ f_2(x) &= x - x^3 \end{aligned}$$

⁷Vihje: Lemma 1.9/Tehtävä 1.6.



KUVA 5. Mandelbrotin joukko

ja

$$f_3(x) = x - x^2.$$

Piste 0 on kaikkien kuvausten f_1 , f_2 ja f_3 kiintopiste. Kuvaile lähellä origoa olevien pisteiden käyttäytyminen näitä funktioita iteroitaessa?

1.10. Olkoon $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \pi \cos x.$$

Montako kiintopistettä kuvauksella f on? Määritä kiintopisteiden tyypit. Onko dynaamisella systeemillä $(f, [-\pi, \pi])$ pisteitä, joiden jakso on 2? Havainnollista tilannetta graafisella analyysillä.

1.11. Onko piste $1 \in \mathbb{C}$ dynaamisen systeemin $P_0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lokaalisti hylkivä kiintopiste? Onko se hylkivä kiintopiste?

2. KUTISTAVAT KUKAUKSET

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvauk $F: X \rightarrow Y$ on K - Lipschitz-kuvauk tai K -Lipschitz-jatkuva, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille $x, y \in X$. Jos F on K -Lipschitz jollain $K > 0$, niin sanotaan, että F on Lipschitz-jatkuva. Jos F on K -Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on (K) -kutistava.

Lause 2.1 (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause). *Olkoon X täydellinen metrisen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F: X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste. Jos F on K -kutistava ja x_0 on sen kiintopiste, niin*

$$d(x_0, F^k(x)) \leq K^k d(x_0, x)$$

kaikille $x \in X$.

Todistus. Olkoon $x \in X$, ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^\infty$ on Cauchyn jono, ja koska X on täydellinen, jono $(F^j(x))_{j=1}^\infty$ suppenee kohti jotain pistettä $x_\infty \in X$.

Piste x_∞ on kuvauksen F kiintopiste, sillä kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} d(x_\infty, F(x_\infty)) &\leq d(x_\infty, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_\infty)) \\ &\leq (1+K)d(x_\infty, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $j \rightarrow \infty$. Metriikan positiivisuudesta seuraa, että $x_\infty = F(x_\infty)$.

Osoitetaan vielä, että kiintopisteitä on täsmälleen yksi. Jos x_∞ ja y_∞ ovat kiintopisteitä, niin

$$Kd(x_\infty, y_\infty) \geq d(F(x_\infty), F(y_\infty)) = d(x_\infty, y_\infty),$$

joten $d(x_\infty, y_\infty) = 0$, ja siis $x_\infty = y_\infty$.

Ekspontiaalinen suppenemisnopeus kiintopisteeseen on helppo todeta: Jos x_0 on kiintopiste, niin kaikille $x \in X$ pätee

$$d(F^k(x), x_0) = d(F^k(x), F^k(x_0)) \leq K^k d(F^k(x), x_0). \quad \square$$

Seuraavissa luvuissa sovellamme kutistavia kuvauksia differentiaaliyhtälöiden teoriaan ja numeeriseen analyysiin.

2.1. Picardin iteraatio. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja ja $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvauk. Merkintä $\dot{x}(t) = x'(t)$ tarkoittaa vektoriarvoisen kuvauksen $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}$ derivaattaa.

Differentiaaliyhtälön

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, t),$$

ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ kaikilla $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$. Komponenteittain kirjoitettuna yhtälö (1) on differentiaaliyhtälöryhmä (1) on

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases}$$

Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan t arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois ja tarkastellaan kuvauksen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ määräämää *autonoma* differentiaaliyhtälöä

$$(3) \quad \dot{x} = f(x)$$

Autonomisen differentiaaliyhtälön (3) ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t))$ $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$.

Todistamme kutistusperiaatteen avulla differentiaaliyhtälöiden alkuarvotehtävien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen. Todistus on itse asiassa sama Picardin iteraatio, jolla yksiulotteinen tapaus on tapana todistaa differentiaaliyhtälöiden kurssilla.

Lause 2.2 (OY-lause). *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, ja olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $x \mapsto f(t, x)$ on M -Lipschitz jokaisella $t \in I$. Jokaisella $(a, b) \in I \times U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Todistamme lauseen tapauksessa, jossa $U = \mathbb{R}^n$ ja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on M -Lipschitz.*

Valitaan $0 < \delta < \frac{1}{M}$. Olkoon $(a, b) \in]a - \delta, a + \delta[\times \mathbb{R}^n$. *Picardin operaattori* on kuvaus $\mathcal{P}_{a,b}: C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$, joka määritellään asettamalla

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds$$

kaikille $\phi \in C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$.

Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

Lemma 2.3. *Kuvaus $\phi: [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on alkuarvotehtävän (4) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin $\mathcal{P}_{a,b}$ kiintopiste.*

Todistus. Kuvaus ϕ on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$(5) \quad \phi(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Jos ϕ on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon $\phi(a) = b$. Lisäksi kuvaus ϕ on differentioituva ja toteuttaa ehdon $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t))$ analyysin peruslauseen nojalla.

Toisaalta, jos ϕ on alkuarvotehtävän (4) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, niin kaikilla $t \in]a - \delta, a + \delta[$ pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s) ds = \phi(t),$$

*Yleisen tapauksen todistus samalla idealla esitetään esimerkiksi kirjassa [HK].

joten ϕ on kiintopiste. □

Lemma 2.4. *Picardin kuvaus on kutistava maksimimetriikan suhteen.*

Todistus. Käyttämällä oletusta Lipschitz-jatkuvuudesta funktion f toisen komponentin suhteen saamme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\| &= \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\| \\ &\leq \max_{|t-a| \leq \delta} \int_a^t \|f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \\ &\leq \delta M \|\phi - \psi\|. \end{aligned} \quad \square$$

Harjoituksissa osoitetaan, että $C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksimimetriikalla on täydellinen metrinen avaruus. Lemman 2.4 ja Lauseen 2.1 mukaan Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 2.3 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (4) ainoa ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$. □

Lausetta 2.2 voi soveltaa aina, kun $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on C^1 , sillä $f|_B$ on Lipschitz-jatkuva, kun $B \subset U$ on suljettu pallo.

Seuraus 2.5 (Autonominen OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -kuvaus. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu. □

Esimerkki 2.6. Etsitään alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ratkaisua Picardin iteraatiolla: Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio $y_0(t) = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t, \\ y_2(t) &= \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

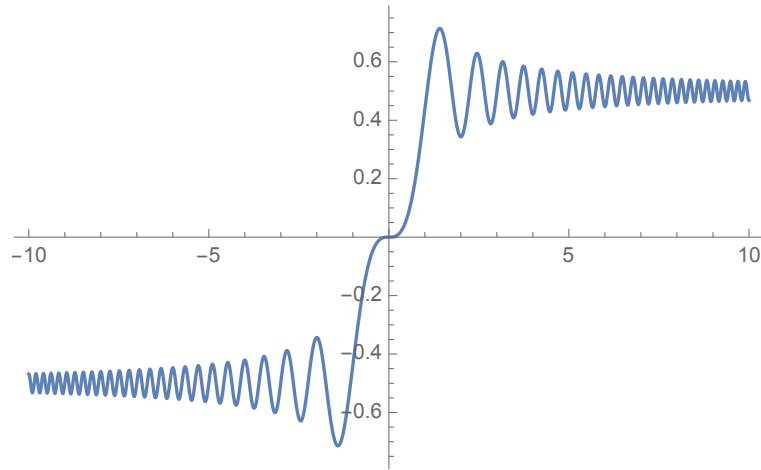
ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}.$$

Kuvausten y_k muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

2.2. Newtonin menetelmä. Derivoituvan funktion nollakohtia voi etsiä numeerisesti seuraavalla klassisella *Newtonin menetelmällä*: Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva. Arvataan, että pisteen x_0 lähellä voisi olla funktion f nollakohta. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$



KUVA 6. Fresnelin S -funktio.

jossa tangenttisuora leikkaa x -akselin. Iteroidaan tätä prosessia: Oletetaan, että piste x_k on konstruoitu. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_k, f(x_k))$. Oteetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

jossa tangenttisuora leikkaa x -akselin. Näin voidaan tehdä tietenkin vain, jos $f'(x_k) \neq 0$.

Geometrisen tarkastelun sijaan Newtonin menetelmää voidaankin siis tarkastella kuvauksen

$$x \mapsto F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterointina sellaisessa välin I osajoukossa, jossa se mahdollisesti määrittelee dynaamisen systeemin. Kuvauksen F kiintopisteessä x_0 pätee $x_0 = F(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, siis $f(x_0) = 0$.

Esimerkki 2.7. Esimerkiksi optiikassa esiintyvä *Fresnelin S -funktio* $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{R}$

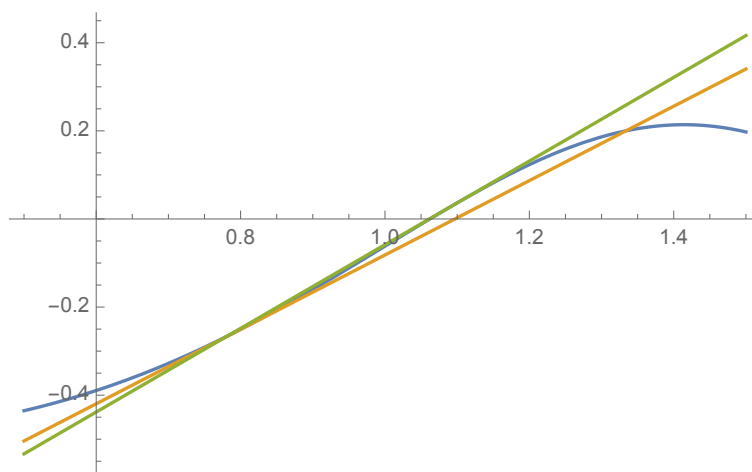
$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$$

Etsitään Newtonin menetelmällä likiarvoa pienimmälle positiiviselle muuttujan x arvolle, jolla $S(x) = \frac{1}{2}$. Olkoon siis $h = S - \frac{1}{2}$. Arvataan kuvien 6 ja 7 perusteella, että funktion h nollakohta on pisteen $x_0 = 0.8$ lähellä. Olkoon $F_h(t) = t - \frac{h(t)}{h'(t)}$. Nyt

k	t	$h(t)$	$F_h(t)$
	0.8	-0.251	1.09687
1	1.09687	0.0335346	1.06156
2	1.06156	-0.000585372	1.06215
3	1.06215	-1.18172 10^{-7}	1.06215

Kolmas ja neljäs iteraatti antavat siis saman arvon viiden desimaalin tarkkuudella. Näyttää siltä, että likiarvo jonon $(F_h^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvolle on löytynyt ja että se on funktion h nollakohta.

Osoitamme seuraavaksi, että sopivilla oletuksilla Newtonin menetelmä antaa hyvän likiarvon nollakohdalle erittäin nopeasti.



KUVA 7. Fresnelin S -funktion $\frac{1}{2}$ -arvon etsiminen Newtonin menetelmällä graafisesti.

Lause 2.8 (Newtonin menetelmä). *Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Olkoon $J_0 \subset I$ suljettu ja rajoitettu väli. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä J_0 ja että sen derivaatalla ei ole nollakohtaa välillä J_0 . Olkoon $F: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Tällöin on jokin väli $J \subset J_0 \subset I$ siten, että jono $F^k(x)$ suppenee kohti funktion f nollakohtaa eksponentiaalisella nopeudella kaikilla $x \in J$.

Todistus. Koska $F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$, niin sen kiintopisteessä x_0 , joka on funktion f nollakohta, pätee $F'(x_0) = 0$. Siis jokaisella $0 < c < 1$ on pisteen x_0 ympäristö, jossa pätee $|F'(x)| \leq c$. Tässä ympäristössä F on c -kutistava Proposition 1.4 nojalla. \square

Esimerkki 2.7 jatkuu. Ei ole kovin vaikea tarkastaa, että Newtonin menetelmässä käytettävä kuvaus

$$F'_h(x) = \pi t \left(S(x) - \frac{1}{2} \right) \cot \frac{\pi t^2}{2}$$

toteuttaa $|F'_h(x)| < \frac{1}{2}$ välillä $[0.8, 1.2]$. Koska funktion S nollakohta x_∞ on tällä välillä, pätee $|0.8 - x_\infty| \leq 0.4$. Lauseen 2.8 nojalla pätee

$$(7) \quad |F_h^k(0.8) - x_\infty| \leq \frac{1}{5} \frac{1}{2^k} < 0.001$$

kun $k \geq 8$. Edellä tehtyjen kokeilujen nojalla iteraatit suppenevat kohti nollakohtaa huomattavasti nopeammin. Arviota voisi tarkentaa parantamalla derivaatan $F'_h(x)$ itseisarvon arviota iteraation edetessä. Esimerkiksi tiedetään, että $|F_h^2(0.8) - x_\infty| < 0.1$, joten $x_\infty \in [0.96, 1, 17]$ ja tällä välillä $|F'_h(x)| < \frac{1}{4}$ ja niin edelleen. Tyydymme kuitenkin tällä kertaa hieman karkeaan eksponentiaaliseen arvioon (7).

Harjoitustehtäviä.

2.1. Osoita, että lauseke

$$d(f, g) = \max_{s \in [a, b]} |f(s) - g(s)|$$

on etäisyysfunktio jatkuvien funktioiden avaruudessa $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

2.2. Osoita, että $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d)$ on täydellinen metrinen avaruus, kun d on tehtävässä 2.1 määritelty etäisyysfunktio.

2.3. Etsi alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ratkaisua Picardin iteraatiolla kolmen iteraation verran. Alkuarvotehtävän ratkaisun voi arvata kolmen iteraation jälkeen tai laskea muilla menetelmillä, jos tuntee differentiaaliyhtälöiden ratkaisutekniikoita.

2.4. Laske Newtonin menetelmän avulla luvun $\sqrt{2}$ likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella. Perustele arvion tarkkuus.

2.5. Laske Newtonin menetelmän avulla luvun π likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella. Perustele arvion tarkkuus.

⁴Vihje: Etsi likiarvo polynomifunktion $x \mapsto x^2 - 2$ nollakohdalle, jonka tiedetään olevan välillä $[1, 2]$.

⁵Vihje: $\sin(\pi) = 0$.

3. YMPYRÄN KIERROT

Parametrisoidaan ympyrä

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

kuvauksella $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$\Phi(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) = \cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s) = e^{i2\pi s}.$$

Tällöin $\Phi(s+k) = \Phi(s)$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Samastamme ympyrän \mathbb{S}^1 tekijäjoukon \mathbb{R}/\mathbb{Z} kanssa, missä s ja t ovat samassa ekvivalenssiluokassa $[s] = s + \mathbb{Z}$, jos ja vain jos $s - t \in \mathbb{Z}$. Huomaa, että $\Phi(s) = \Phi(t)$, jos ja vain jos $s - t \in \mathbb{Z}$.

Tehdään ympyrästä metrinen avaruus asettamalla pisteiden $[s], [t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ etäisyydeksi

$$(8) \quad d([s], [t]) = \min_{s' \in [s], t' \in [t]} \{|s' - t'|, 1 - |s' - t'|\} = \min \{|[s] - [t]|, 1 - |[s] - [t]|\}.$$

Tässä $[x]$ on reaaliluvun x kokonaisosa

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\},$$

joka antaa ekvivalenssiluokalle $[s]$ yksikäsitteisen edustajan $[s] \in [0, 1[$. Jos ympyrä ajatellaan kompleksitason osajoukkona ja $u = \Phi(s), v = \Phi(t) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, niin

$$d([s], [t]) = \frac{\angle(\Phi(s), \Phi(t))}{2\pi} = \frac{|\text{Arg}(u/v)|}{2\pi},$$

missä $\text{Arg } z \in] - \pi, \pi]$ on kompleksiluvun $z \neq 0$ argumentin päähaara, yksikäsitteinen luku välillä $] - \pi, \pi]$, jolle pätee $z = |z| e^{i \text{Arg } z}$.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Ympyrän \mathbb{S}^1 kierto $R_\alpha: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ määritellään ympyrän mallissa \mathbb{R}/\mathbb{Z} asettamalla

$$R_\alpha([s]) = [s + \alpha]$$

kaikille $s \in \mathbb{R}$. Tämä määritelmä on hyvin asetettu, sillä jos $k \in \mathbb{Z}$, niin pätee

$$R_\alpha[s + k] = [s + k + \alpha] = [s + \alpha] = R_\alpha[s].$$

Euklidisessa tasossa kierto on ortogonaalinen lineaarikuvaus, jota esittää standardikannassa matriisi

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\pi \alpha) & -\sin(2\pi \alpha) \\ \sin(2\pi \alpha) & \cos(2\pi \alpha) \end{pmatrix}$$

ja kompleksiluvuilla

$$R_\alpha(z) = e^{i2\pi\alpha} z$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. On helppo tarkastaa, että ympyrän kierto on isometria: kaikille $s, t \in \mathbb{S}^1$ pätee

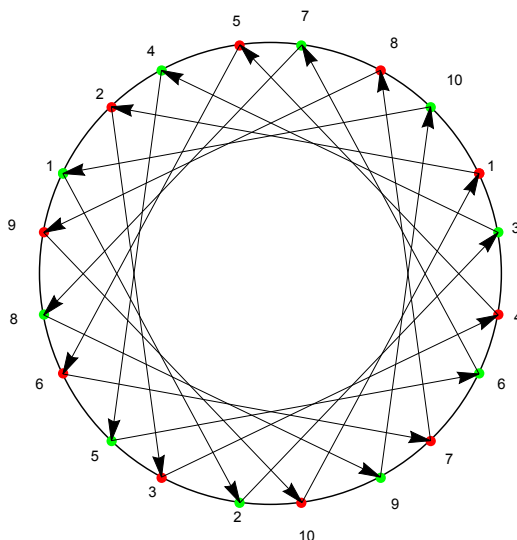
$$d(R_\alpha(s), R_\alpha(t)) = d(s, t).$$

Kierron asympotoottinen käyttäytyminen riippuu vahvasti kulmasta α . Sanomme, että kierto R_α on *rationaalinen*, jos $\alpha \in \mathbb{Q}$ ja *irrationaalinen*, jos $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Joukkoa $\Phi(I)$ sanotaan ympyrän \mathbb{S}^1 väliksi. Yleensä kutsumme väliä $\Phi(I)$ yksinkertaisemmin ympyrän väliksi I . Erityisesti, jos $a, b \in \mathbb{R}$, tarkoitamme ympyrän välillä $[a, b]$ joukkoa $\Phi([a, b])$.

Propositio 3.1. (1) *Rationaalisen kierron kaikki radat $x \in \mathbb{S}^1$ ovat jaksollisia. Jos $\alpha \in \mathbb{Q}$ ja $\alpha = \frac{p}{q}$, missä $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja lukujen p ja q suurin yhteinen tekijä on 1, niin jokaisen pisteen $x \in \mathbb{S}^1$ jakso kierrolla R_α on q .*

(2) *Irrationaalisen kierron kaikki radat ovat tiheitä.*



KUVA 8. Rationaalisen kierron $R_{\frac{3}{10}}$ radat ovat 10-jaksollisia.

Todistus. (1) Huomataan, että $R_{\frac{p}{q}}^q([s]) = [s + p] = [s]$ kaikille s . Jos rationaaliluku $\frac{p}{q}$ on supistetussa muodossa, niin $k \frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$, kun $1 \leq k < q$.

(2) Jos olisi $x \in \mathbb{S}$, jolle $\overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(x)} \neq \mathbb{S}^1$, niin olisi jokin avoin väli

$$\emptyset \neq U \subset \mathbb{S} - \overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(x)}.$$

Olkoon U inklusion suhteen maksimaalinen tällainen väli. Tällöin $R_\alpha^k(U) \cap R_\alpha^\ell(U) = \emptyset$ kaikilla $k \neq \ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Jos nimittäin $R_\alpha^k(U) = R_\alpha^\ell(U)$, niin $R_\alpha^{k-\ell} = \text{id}$, mikä on mahdotonta. Koska U on valittu maksimaaliseksi, niin välit eivät voi leikata muulla tavalla. Mutta nythän joukko $\bigcup_{k=0}^{\infty} R_\alpha^k(U)$ koostuu keskenään samanpituuisista erillisistä väleistä, koska kierrot ovat ympyrän \mathbb{S}^1 isometrioita. Siis sen pituus on ääretön. Tämä on mahdotonta, koska ympyrän pituus on 1. \square

3.1. Tasainen jakautuminen. Tarkastelemme seuraavassa lähemmin, miten pisteen rata jakautuu ympyrälle irrationaalisella kierrolla. Proposition 3.1 nojalla rata on tiheä ja nyt osoitamme, että se on tiheä hyvin tasaisella tavalla.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli ja olkoon

$$\mathcal{N}_\Delta(n, x) = \#\{k \in [0, n] \cap \mathbb{N} : R_\alpha^k(x) \in \Delta\}.$$

Funktio $\rho : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$,

$$\rho_\Delta(n, x) = \frac{1}{n} \mathcal{N}_\Delta(n, x)$$

on *suhteellinen taajuus*, jolla pisteen x positiivisen radan alkuosa iteraattiin $R_\alpha^n(x)$ saakka vierailee välillä Δ . Olkoon välin $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ pituus $\lambda(\Delta)$.

Lemma 3.2. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoot $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{S}^1$ välejä. Jos $\lambda(\Delta_1) < \lambda(\Delta_2)$, niin on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathcal{N}_{\Delta_1}(n, x) \leq \mathcal{N}_{\Delta_2}(n + N, x)$ kaikille $x \in \mathbb{S}^1$ ja kaikille $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. \square

Haluamme osoittaa, että jono $(\rho_\Delta(n, x))_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}$ suppenee kohti raja-arvoa, joka on riippumaton pisteestä $x \in \mathbb{S}^1$. Tässä tarkastelussa on sujuvaa käyttää reaalilukujonon $(a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}$ *yläraja-arvoa*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} a_m = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} a_m$$

ja alaraja-arvoa

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} a_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} a_m,$$

jotka jokaisella jonolla on laajennetussa reaalilukujen joukossa

$$[-\infty, \infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Reaalilukujonolla $(a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}$ on raja-arvo täsmälleen silloin, kun sen ylä- ja alaraja-arvot yhtyvät. Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Lemma 3.3. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli. Jos $\lambda(\Delta) = \frac{1}{k}$, niin*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \leq \frac{1}{k-1}.$$

Todistus. Olkoot $V_j = [\frac{j-1}{k-1}, \frac{j}{k-1}] \subset \mathbb{S}^1$. Tällöin välit V_j ovat erillisiä ja

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{k-1} = \mathbb{S}^1.$$

Lemman 3.2 nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathcal{N}_\Delta(x, n) \leq \mathcal{N}_{V_j}(x, n + N)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $j \in 1, 2, \dots, k-1$. Siispä

$$(k-1)\mathcal{N}_\Delta(x, n) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{N}_{V_j}(x, n + N) = \mathcal{N}_{\mathbb{S}^1}(x, n + N) = n + N,$$

joten

$$(k-1)\rho_\Delta(n, x) \leq \frac{n + N}{n},$$

mistä väite seuraa, koska $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+N}{n} = 1$. □

Lause 3.4. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(n, x) = \lambda(\Delta).$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon Δ' väli, joka sisältää välin Δ siten, että jollain $\ell, k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\lambda(\Delta') = \frac{\ell}{k} < \lambda(\Delta) + \epsilon.$$

Nyt jakamalla Δ' yhtä pitkiin osaväleihin, joita on ℓ kappaletta, saadaan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta'}(x, n) \leq \frac{\ell}{k-1} \leq (\lambda(\Delta) + \epsilon) \frac{k}{k-1}$$

Lemman 3.3 ja suhteellisen taajuuden additiivisuuden nojalla. Kun $\epsilon \rightarrow 0$, välttämättä $k \rightarrow \infty$, joten

$$(9) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \leq \lambda(\Delta).$$

Välin Δ komplementin tarkasteleminen antaa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) \leq \lambda(\mathbb{S}^1 - \Delta).$$

Koska aina pätee $\rho_\Delta(x, n) + \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) = 1$, niin

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) = 1,$$

ja saamme

$$(10) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \geq 1 - \lambda(\mathbb{S}^1 - \Delta) = \lambda(\Delta).$$

Väite seuraa epäyhtälöistä (9) ja (10). □

Lauseen 3.4 nojalla sanotaan, että irrationaalisen kierron rata on *tasaisesti jakautunut* ympyrällä. Väite yleistyy välien karakterististen funktioiden avulla integroituvia funktioita koskevaksi:

Lause 3.5. *Olkon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Riemann-integroituville funktioille $\phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ pätee*

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(R_\alpha^n(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi(s) ds.$$

Todistus. Olkon $\mathbb{1}_A$ joukon A karakteristinen funktio eli indikaattorifunktio, joka saa arvon 1 joukossa A ja arvon 0 sen komplementissa. Ehto $R_\alpha^k(x) \in \Delta$ on yhtäpitävä ehdon $\mathbb{1}_\Delta(R_\alpha^k(x)) = 1$ kanssa. Siispä Lauseen 3.4 väite on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_\Delta(R_\alpha^n(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \mathbb{1}_\Delta(s) ds.$$

Funktion ϕ Riemann-integraali määritellään muotoa

$$\sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{\Delta_k}$$

olevien porraskätköiden avulla, joille väite pätee lineaarisuuden nojalla. Yksityiskohtainen todistus esitetään esimerkiksi lähteessä [HK, Thm. 4.1.15]. \square

Koska ympyrän \mathbb{S}^1 pituudeksi on sovittu 1, niin yhtälön (11) oikealla puolella esiintyvä integraali $\int_{\mathbb{S}^1} \phi(s) ds$ on funktion ϕ *avaruuskeskiarvo* ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(R_\alpha^n(x))$$

on sen *avaruuskeskiarvo*. Jos X on kompakti metrinen avaruus ja $F: X \rightarrow X$ on jatkuva kuvaus, sanotaan, että F on *yksikäsitteisesti ergodinen*, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(R_\alpha^n(x))$$

suppenee tasaisesti kohti vakiofunktioita kaikilla jatkuvilla funktioilla $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$. Koska jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia, Lauseen 3.5 mukaan siis ympyrän \mathbb{S}^1 irrationaaliset kierrot ovat yksikäsitteisesti ergodisia.

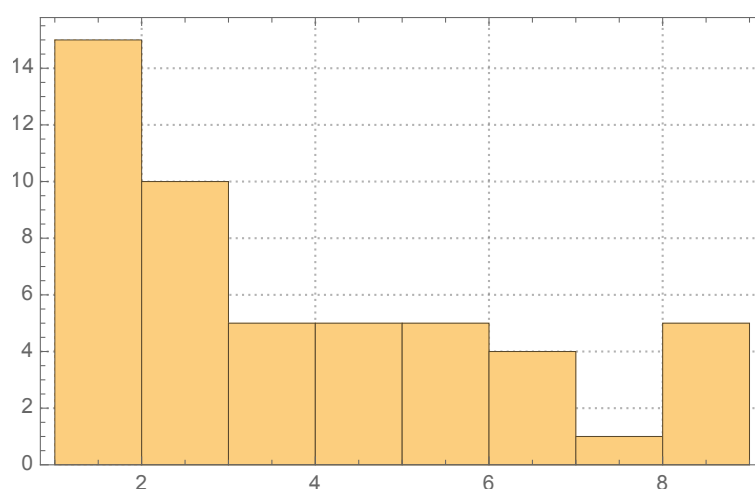
3.2. Kakkosen potenssit ja Benfordin laki. Benford [Ben] havaitsi, että monissa aineistoissa esiintyvien lukujen ensimmäisen numeron jakauma ei suinkaan ole tasainen vaan luvun 1 esiintymistiheys on noin 0.3.* Tarkastelemme yhtä tällaista aineistoa ja selitämme Benfordin havaitseman jakauman tässä tapauksessa dynamiikan keinoilla.

Luvun 2 ensimmäiset 50 potenssia ovat

*Itse asiassa Newcomb oli tehnyt saman havainnon jo vuonna 1881 mutta ilmiö on tullut nimetyksi Benfordin mukaan. Esimerkkejä Benfordin lain mukaan käyttäytyvistä tilastoista on esitelty verkkosivulla <http://www.testingbenfordslaw.com/>.

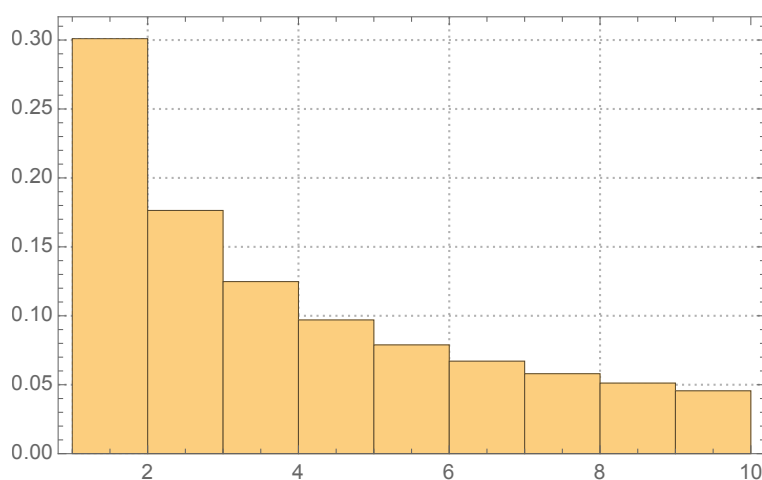
2	2048	2097152	2147483648	2199023255552
4	4096	4194304	4294967296	4398046511104
8	8192	8388608	8589934592	8796093022208
16	16384	16777216	17179869184	17592186044416
32	32768	33554432	34359738368	35184372088832
64	65536	67108864	68719476736	70368744177664
128	131072	134217728	137438953472	140737488355328
256	262144	268435456	274877906944	281474976710656
512	524288	536870912	549755813888	562949953421312
1024	1048576	1073741824	1099511627776	1125899906842624

Näiden lukujen ensimmäisten numeroiden jakauma joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ näyttää mielenkiintoiselta. Ensimmäisen 40 numeron joukossa ei esiinny 7 eikä 9. Vasta luvun 2^{46} ensimmäinen numero on 7!



KUVA 9. Lukujen 2^n ensimmäisten numerojen jakauma, $1 \leq n \leq 50$.

Korkeammilla potensseilla kuitenkin esiintyy kaikkia eri numeroita ja 10000 ensimmäisen näin muodostetun numeron jakauma esitettynä eri numeroiden suhteellisena esiintymistiheytenä näyttää vakiintuvan kohti tiettyä jakaumaa:

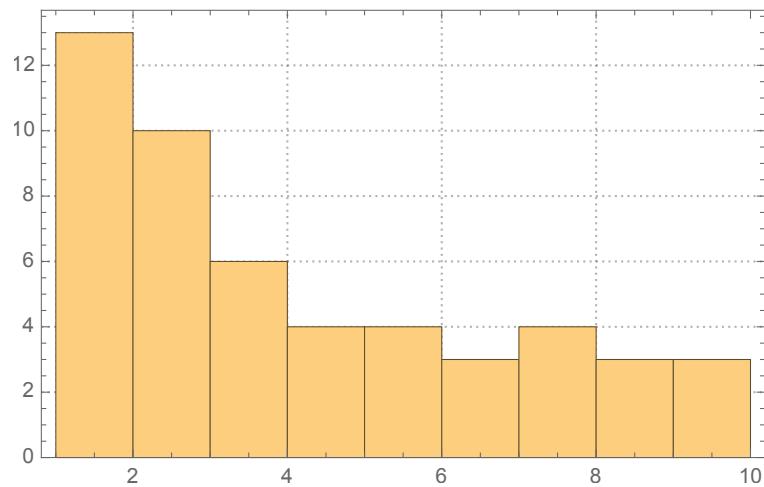


KUVA 10. Ensimmäisten numeroiden suhteelliset osuudet luvuilla 2^k , kun $k \leq 10000$.

Luvun 3 ensimmäisten 50 potenssin ensimmäisten numeroiden sarja ei näytä yhtä hyvin järjestyneeltä kuin luvun 2 tapauksessa:

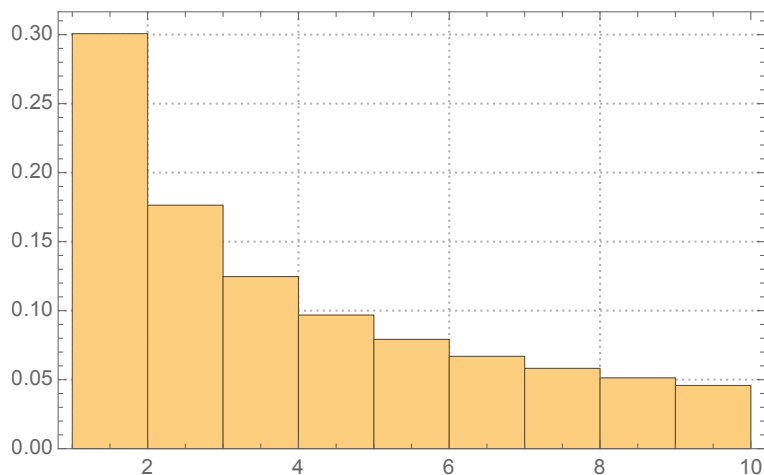
3	177147	10460353203	617673396283947	36472996377170786403
9	531441	31381059609	1853020188851841	109418989131512359209
27	1594323	94143178827	5559060566555523	328256967394537077627
81	4782969	282429536481	16677181699666569	984770902183611232881
243	14348907	847288609443	50031545098999707	2954312706550833698643
729	43046721	2541865828329	150094635296999121	8862938119652501095929
2187	129140163	7625597484987	450283905890997363	26588814358957503287787
6561	387420489	22876792454961	1350851717672992089	79766443076872509863361
19683	1162261467	68630377364883	4052555153018976267	239299329230617529590083
59049	3486784401	205891132094649	12157665459056928801	717897987691852588770249

Näiden lukujen ensimmäisten numeroiden jakauma näyttää karkeasti samanlaiselta kuin kakkosen potensseille



KUVA 11. Lukujen 3^n ensimmäisten numerojen jakauma, $1 \leq n \leq 50$.

ja 10000 numeron jakauma näyttää lähestyvän samaa jakaumaa kuin edellä kuten kuvien 10 ja 12 vertailu osoittaa.



KUVA 12. Ensimmäisten numeroiden suhteelliset osuudet luvuilla 3^k , kun $k \leq 10000$.

Seuraava lause osoittaa tekemämme havainnon oikeaan osuneeksi ja että potenssien ensimmäiset numerot todellakin noudattavat Benfordin lakia.

Seuraus 3.6. *Olkoon $b \in \mathbb{N} - 10\mathbb{N}$, $b \geq 2$. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{m \in \mathbb{N} \cap [0, n] : \text{luvun } b^m \text{ ensimmäinen numero on } k\}}{n} = \log_{10}(k) - \log_{10}(k-1).$$

Todistus. Luvun b^n ensimmäinen numero on $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, jos ja vain jos

$$k \cdot 10^\ell \leq b^n \leq (k+1) \cdot 10^\ell$$

jollain $\ell \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen

$$(12) \quad \log_{10} k + \ell \leq n \log_{10} b < \log_{10}(k+1) + \ell.$$

Välit

$$L_k = [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)[,$$

$k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ jakavat ympyrän \mathbb{S}^1 kymmeneen osaan, joiden pituudet ovat $\log_{10}(k) - \log_{10}(k-1)$. Epäyhtälöpari (12) voidaan ilmaista ympyrälle kuvattuna muodossa

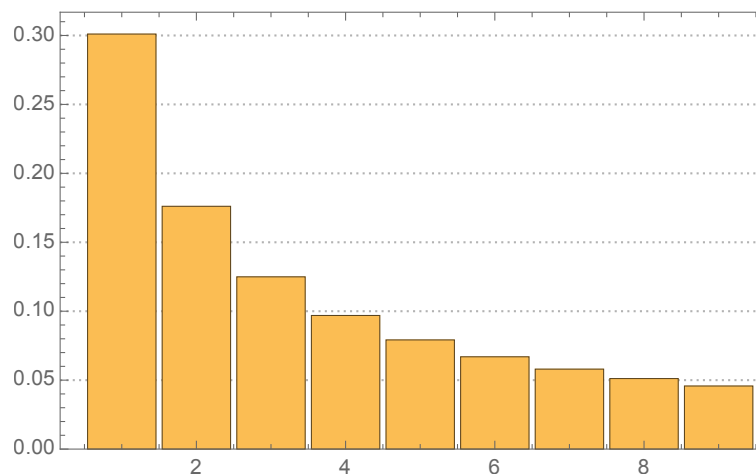
$$R_{\log_{10} 2}^n([0]) = [n \log_{10} b] \in L_k.$$

Oletuksen nojalla $\alpha = \log_{10} b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, joten kierron R_α rata on tasaisesti jakautunut. Väite seuraa tasaisesta jakautumisesta, Lause 3.4. \square

Kuten pitääkin, välien L_k pituuksista

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

muodostettu pylväsdiagrammi (Kuva 13) muistuttaa hyvin tarkasti Kuvien 10 ja 12 jakaumia.



KUVA 13.

Harjoitustehtäviä.

3.1. Osoita, että lauseke (8) määrittelee etäisyysfunktion ympyrällä $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Osoita, että ympyrän kierrot ovat isometrioita.

3.2. Todista Lemma 3.2.

3.3. Osoita, että reaalityön $(a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}$ on yläraja-arvo ja alaraja-arvo laajennuksessa reaalityön joukossa $[-\infty, \infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

3.4. Osoita, että reaalilukujonolla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on raja-arvo täsmälleen silloin, kun sen yläraja-arvo ja alaraja-arvo ovat samat.

3.5. Olkoon $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reaalinen lukujono, jolle $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$. Olkoon $b_n = 1 - a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

3.6. Olkoon $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Osoita, että on $n \in \mathbb{N}$, jolle luvun 2^n ensimmäiset numerot ovat k . (Esimerkiksi, jos $k = 5497$, niin luvuksi n käy 39, sillä $2^{39} = 549755813888$. Ratkaisu ei toki ole yksikäsitteinen.)

4. KULMAN m -KERTAISTAVA KUVAUS

Luvuissa 2 ja 3 tarkasteleva dynamiikka on hyvin rauhallisesti käyttäytyvää: Kutistavien kuvausten tapauksessa kaikkien pisteiden radat lähestyvät samaa kiintopistettä eksponentiaalisella nopeudella ja ympyrän kierrolla kaikki pisteet käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla. Tästä luvusta alkaen tarkastelemme monimutkaisemmin käyttäytyviä systeemejä.

4.1. Kulman m -kertaistava kuvaus. Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Olkoon $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kulman m -kertaistava kuvaus, jonka lauseke kulmaparametrin $s \in \mathbb{R}$ avulla lausuttuna on

$$E_m([s]) = [ms].$$

Kompleksilukujen avulla ilmaistuna E_m on kuvauksen $z \mapsto z^m$ rajoittuma yksikköympyrälle.

Lemma 4.1. *Jokaisella pisteellä $p \in \mathbb{S}^1$ on täsmälleen m alkukuvaa kuvauksella E_m .*

Todistus. Olkoon $p = [s] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Havaitaan, että $E_m\left(\left[\frac{s+k}{m}\right]\right) = [s]$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Luvut $\frac{s+k}{m} \in [0, 1[$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, antavat jokaiselle ekvivalenssiluokalle täsmälleen yhden edustajan. \square

Harjoituksissa osoitetaan, että

$$\mathcal{P}_n(E_m) = \left\{ \left[\frac{k}{m^n - 1} \right] \in \mathbb{S}^1 : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Joukossa \mathcal{P}_n on $m^n - 1$ pistettä, jotka jakautuvat ympyrälle tasaisin välein. Ne jakavat ympyrän \mathbb{S}^1 väleihin, joiden pituus on $\frac{1}{m^n - 1}$. On helppo tarkastaa, että jaksollisten pisteiden joukko

$$\mathcal{P}(E_m) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(E_m)$$

on tiheä.

Esimerkki 4.2. Kuvauksen E_2 kiintopisteiden joukko on $\mathcal{P}_1(E_2) = \{0\}$ ja 2-jaksollisten pisteiden joukko

$$\mathcal{P}_2(E_2) = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

koostuu kiintopisteestä 0 ja 2-jaksollisesta radasta $\frac{1}{3} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{2}{3}$. Joukossa $\mathcal{P}_3(E_2)$ on 7 pistettä: kiintopiste 0 ja kahden 3-jaksollisen radan $\frac{1}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{2}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{4}{7}$ ja $\frac{3}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{6}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{5}{7}$ pisteet.

Kaikille jonoille $(b_i)_{i=1}^\infty$, missä $b_i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ pätee

$$E_m\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{m^i}\right]\right) = \left[b_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{m^i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{m^i}\right],$$

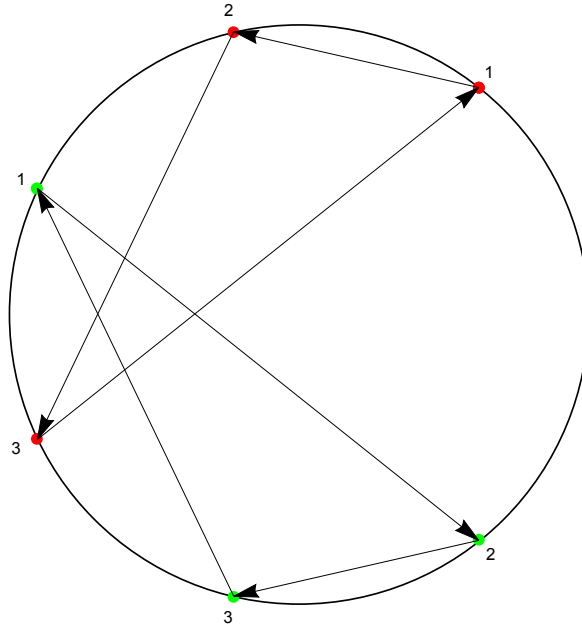
ja erityisesti

$$E_m^N\left(\left[\sum_{i=1}^N \frac{b_i}{m^i}\right]\right) = E_m^N\left(\left[\sum_{i=1}^N \frac{b_i m^{N-i}}{m^N}\right]\right) = [0]$$

kaikille $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. Kulman m -kertaistava kuvaus käyttäytyy siis hyvin reaalilukujen m -kantaisen esityksen kanssa.

Reaalilukuväliä $\left[\frac{k}{m^N}, \frac{k+1}{m^N}\right]$ ja ympyrän \mathbb{S}^1 väliä

$$J = J_{m^N}^k = \left[\frac{k}{m^N}, \frac{k+1}{m^N} \right]$$



sanotaan *m*-adiseksi väliksi.* Koska jokainen piste $x \in \mathbb{S}^1$ sisältyy äärettömän moneen sisäkkäiseen *m*-adiseen väliin, jotka kuvautuvat koko ympyräksi kuvauksen E_m sopivilla iteraateilla, on jokaisella tällaisella välillä piste, joka kuvautuu toiselle puolelle ympyrää kuin x . Sanotaan, että systeemi (E_m, \mathbb{S}^1) riippuu herkästi alkuarvoista.

Esimerkki 4.3. Kuvauksen E_m ratoja voi tarkastella *m*-adisten välien avulla. Rajoitutaan yksinkertaistamisen vuoksi tutkimaan kuvausta E_2 . Jokainen ympyrän piste voidaan esittää muodossa

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} \right]$$

ja kuvaus E_2 sopii tämän esityksen kanssa hyvin yhteen. Pätee nimittäin

$$E_2\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{2^i}\right].$$

Tämän havainnon avulla voi määrittää pisteitä, joiden radoilla on haluttuja ominaisuuksia: Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ jono, joka saadaan luettelemalla peräkkäin kaikki äärelliset jonot, jotka voidaan muodostaa numeroista 0 ja 1:

$$(13) \quad 010001101110000001010011100101110111 \dots$$

Olkoon

$$p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \right] \in \mathbb{S}^1.$$

Huomaamme, että

$$J_{2^N}^k = \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N} \right] = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^N} \right] : \sum_{i=1}^N b_i 2^{N-i} = k \right\}.$$

Siis sopivalla $M \in \mathbb{N}$ pätee $E_2^M(p) \in J_{2^N}^k$ mille tahansa dyadiselle välille, joten pisteen p rata on tiheä. Vastaavalla tavalla voidaan antaa esimerkki tiheästä radasta kuvaukselle E_m , kun $m \geq 3$, luettelemalla kaikki äärelliset jonot, jotka voidaan muodostaa numeroista $0, 1, 2, \dots, m$.

*Kun $m = 2$, puhutaan *dyadisista* väleistä.

Jonon (13) avulla saadaan esimerkki ehkä vielä mielenkiintoisemmasta radasta kuvaukselle E_3 . Johdantona tätä varten käsitellään tärkeää reaalilukujen osajoukkoa:

Esimerkki 4.4. *Cantorin joukkoa*

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]$$

kannattaa ajatella äärettömänä leikkauksena seuraavasti: Olkoot $I_0 = [0, 1]$, $I_1^0 = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_1^1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Välit I_1^0 ja I_1^1 ovat siis ne kaksi suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun välistä I_0 poistetaan keskeltä avoin väli $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Olkoot

$$I_2^0 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right], \quad I_2^1 = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right], \quad I_2^2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right], \quad I_2^3 = \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$$

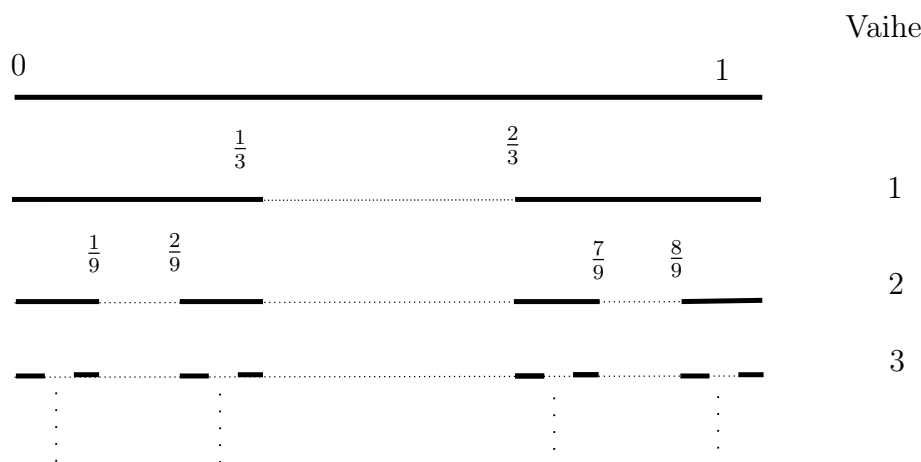
ne neljä suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun väleistä I_1^0 ja I_1^1 poistetaan keskeltä avoimet välit, joiden pituus on $\frac{1}{3^2}$. Jatketaan induktiolla: Vaiheessa n on 2^n suljettua väliä $I_n^0, I_n^1, \dots, I_n^{2^n-1}$. Jokaisen välin I_n^k pituus on 3^{-n} . Näistä väleistä muodostetaan vaiheen $n+1$ välit poistamalla jokaisesta keskeltä avoin väli, jonka pituus on $3^{-(n+1)}$.

Olkoon

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k.$$

Tällöin

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k.$$



Koska K on joukon K_n osajoukko jokaisella $k \in \mathbb{N}$, ja välien I_n^k pituuksien summa on $(\frac{2}{3})^n$, niin Cantorin joukko K on nollamittainen joukko.

Jos valitsemme sisäkkäisen jonon Cantorin joukon konstruktiossa esiintyviä jonoja $I_1^{k(1)} \supset I_2^{k(2)} \supset I_3^{k(3)} \supset \dots$, niin analyysin kurseilla käsiteltävän *sisäkkäisten välien periaatteen* nojalla $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i^{k(i)}$ on yhden pisteen joukko jokaisella tällaisella välien muodostamalla jonolla. Selvästi kahta eri jonoa vastaa kaksi eri pistettä koska jossain vaiheessa toiseen jonoon on valittu kahdesta mahdollisesta välistä oikeanpuoleinen ja toiseen vasemmanpuoleinen. Toisaalta jokainen piste määrää täsmälleen yhden jonon $(I_i^{k(i)})_{i=1}^{\infty}$.

Jokaiseen Cantorin joukon pisteeseen voidaan liittää yksikäsitteinen *osoite*, joka on jono $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, missä $a_k = 0$, jos k . vaiheessa valitaan vasemmanpuoleinen kahdesta mahdollisesta jonosta ja $a_k = 1$, jos k . vaiheessa valitaan oikeanpuoleinen väli. Jos $x \in I_k^{\ell}$, niin äärellisen pituiseksi katkaistu koodi $a_1 a_2 \dots a_k$ on luvun ℓ binääriesitys.

Harjoitustehtäviä.

4.1. Osoita, että pisteet $[\frac{k}{2^n-1}] \in \mathbb{S}^1$ ovat jaksollisia kuvaukselle E_2 kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Osoita, että muita jaksollisia pisteitä ei ole.

4.2. Osoita, että kuvauksen E_m jaksollisten pisteiden joukko on tiheä.

4.3. Määritä kaikki systeemin $E_3: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ radat, joiden jaksot ovat 1, 2 tai 3.

4.4. Olkoon $x \in \mathbb{S}^1$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Osoita, että välillä $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ on kuvauksen E_2 jaksollisia pisteitä ja pisteitä, joiden rata kuvauksella E_2 on tiheä.

4.5. Osoita, että Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko $K \subset \mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

4.6. Osoita, että

$$[K] = \left\{ x \in \mathbb{S}^1 : E_3^k(x) \notin \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[\quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

4.7. Olkoon

$$[K] = \{[x] \in \mathbb{S}^1 : x \in K\}.$$

Olkoon $s: [K] \rightarrow \mathbb{S}^1$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$s\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i/2}{2^i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}\right].$$

Osoita, että s on hyvin määritelty jatkuva surjektio, joka ei ole injektio. Osana tätä osoita, että pisteillä, jotka ovat muotoa $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ on kaksi binääristä esitystä. Osoita, että

$$s \circ E_3 = E_2 \circ s.$$

5. JONOAVARUUDET JA VASEN SIIRTO

Olkoon \mathcal{A} äärellinen joukko, jossa on ainakin kaksi alkioita. Kutsumme joukkoa \mathcal{A} *aakkostoksi* ja sen alkioita *symboleiksi* tai *kirjaimiksi*. *Yksipuolinen jonoavaruus* aakkostolle \mathcal{A} on

$$\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\omega: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}\} = \{a_0 a_1 a_2 \cdots : a_i \in \mathcal{A} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\}$$

ja *kaksipuolinen jonoavaruus* on

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \{\omega: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}\} = \{\cdots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \cdots : a_i \in \mathcal{A} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Hyvin usein valitsemme $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots, N-1\} = [0, N-1] \cap \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Tällöin käytämme merkintöjä

$$\Sigma_N = \{\omega: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}\}$$

ja

$$\Omega_N = \{\omega: \mathbb{Z} \rightarrow [0, N-1] \cap \mathbb{N}\}.$$

Tilanteesta ja mieltymyksistä riippuen jonoavaruuden alkioita voi käsitellä jonoina tai kuvauksina. Merkintöjen helpottamiseksi sovimme, että \bar{a}_n on äärellinen sana $aa \cdots a$, jossa symboli a esiintyy n kertaa ja että \bar{a} on tarpeen mukaan joko vasemmalta, oikealta tai molemmista suunnista ääretön sana, jossa esiintyy ainoastaan symboli a . Yleisemmin, jos w on jokin äärellinen sana, \bar{w} on tarpeen mukaan joko vasemmalta, oikealta tai molemmista suunnista ääretön sana, jossa toistuu äärellinen sana w äärettömän monta kertaa peräkkäin.

Kaksipuolisen jonoavaruuden alkion $\omega \in \Omega_N$ kirjoittaminen jonona on itse asiassa hieman hankalaa koska on jollain tavalla sovittava, mikä jonon indeksointi on. Toisin sanoen tarvitaan jonkinlainen osoitin, joka kertoo, missä kohtaa jonoa on $\omega(0)$. Yksipuolisessa jonoavaruudessa ei ole tätä ongelmaa.

Varustetaan avaruudet Σ_N ja Ω_N metriikoilla d , jotka määritellään asettamalla $d(\omega, \omega) = 0$ kaikille $\omega \in \Sigma_N$ ja $\omega \in \Omega_N$ ja kaikille $\omega \neq \omega'$

$$(14) \quad d(\omega, \omega') = \sup_i \frac{\delta(\omega(i), \omega'(i))}{2^{|i|}} = 2^{-m(\omega, \omega')}$$

missä

$$m(\omega, \omega') = \min \{|k| : \omega(k) \neq \omega'(k)\}.$$

Esimerkki 5.1. (1) $d(\bar{0}, 0001\bar{0}) = \frac{1}{8}$.

(2) Olkoon $\omega \in \Sigma_N$. Määritellään alkiot $\omega_n \in \Sigma_N$ asettamalla

$$\omega_n(k) = \begin{cases} \omega(k) & \text{kaikilla } k \neq n \\ \omega(n) + 1 \pmod N, & \text{kun } k = n. \end{cases}$$

jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Nyt $d(\omega, \omega_n) = 2^{-n}$ ja $\omega_n \rightarrow \omega$, kun $n \rightarrow \infty$.

Esimerkki 5.2. (1) Metriikan määritelmän nojalla kahden pisteen etäisyys on aina 2^{-i} jollain $i \in \mathbb{N}$.

(2) $\bar{B}(\omega, 1)$ on koko avaruus millä tahansa keskipisteellä $\omega \in \Sigma_N$ tai $\omega \in \Omega_N$.

(3) Olkoon $\omega \in \Sigma_N$. Tällöin

$$B(\omega, 1) = \{\omega' \in \Sigma_N : \omega'(0) = \omega(0)\}.$$

(4) Olkoon $\omega \in \Omega_N$. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\bar{B}(\omega, 2^{-k}) = \{\omega' \in \Omega_N : \omega'|_{[-k+1, k-1]} = \omega|_{[-k+1, k-1]}\}.$$

Lemma 5.3. *Avaruudet (Σ_N, d) ja (Ω_N, d) ovat ultrametrisiä avaruuksia.**

*Katso liite A

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 5.4. *Seuraavat väitteet pätevät jonoavaruuksissa Σ_N ja Ω_N .*

- (1) *Jokaisen pallon jokainen piste on sen keskipiste.*
- (2) *Avoimet pallot ovat suljettuja palloja ja suljetut pallot ovat avoimia palloja. Kaikilla $2^{-n} \leq r < 2^{-n+1}$ ja $2^{-n} < s \leq 2^{-n+1}$ pätee avaruudessa Σ_N*

$$\overline{B}(0, r) = B(0, s) = \{\omega \in \Sigma_N : \omega|_{[0, n]} = 0\}$$

Kaksipuolisten jonojen avaruudessa Ω_N pätee

$$\overline{B}(0, r) = B(0, s) = \{\omega \in \Omega_N : \omega|_{[-n, n]} = 0\}$$

Todistus. (1) Olkoon $x \in \Sigma_N$ ja olkoon $r > 0$. Olkoot $y, z \in B(x, r)$. Tällöin ultrametrisyyden nojalla

$$d(y, z) = \max(d(y, x), d(x, z)) < r.$$

Siis $B(x, r) \subset B(y, r)$. Samalla päättelyllä vaihtamalla pisteiden x ja y roolit saadaan $B(y, r) \subset B(x, r)$. Väite todistetaan samalla tavalla kaksipuoleisessa jonoavaruudessa.

(2) Harjoitustehtävä. □

Seuraavat merkinnät ovat käyttökelpoisia: Olkoon $n = (n_1 < n_2 < \dots < n_K)$ luonnollisten lukujen tai kokonaislukujen järjestetty äärellinen jono ja olkoon $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K) \in \mathcal{A}^K$. Joukot

$$C_\alpha^m = \{\omega \in \Sigma_N : \omega(n_i) = \alpha_i\}$$

ja

$$C_\alpha^m = \{\omega \in \Omega_N : \omega(n_i) = \alpha_i\}$$

ovat *sylintereitä*. Joskus, erityisesti yksipulisten jonojen avaruudessa käytetään merkintää

$$[\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n] = C_\alpha^{[0, n] \cap \mathbb{N}}.$$

Esimerkki 5.5. Proposition 5.4 nojalla jonoavaruudessa Σ_N pätee $B(0, 2^{-(n+1)}) = C_{\vec{0}_n}^{[0, n]}$ ja jonoavaruudessa Σ_N pätee $B(0, 2^{-(n+1)}) = C_{\vec{0}_{2n+1}}^{[-n, n]}$

Lemma 5.6. *Avaruuden Σ_N pallot ovat sylintereitä $C_\alpha^{[0, K] \cap \mathbb{N}}$. Avaruuden Ω_N pallot ovat symmetrisiä sylintereitä $C_\alpha^{[-K, K] \cap \mathbb{Z}}$. □*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraava tulos, joka kokoaa jonoavaruuksien topologisia perusominaisuuksia. Metrinen avaruuden X piste x on *eristetty*, jos on $r > 0$, jolle $B(x, r) = \{x\}$. Jos metrissä avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä, sanotaan, että X on *perfekti*.

Propositio 5.7. *Avaruudet (Σ_N, d) ja (Ω_N, d) ovat kompakteja, täydellisiä, ja perfektejä metrisiä avaruuksia.*

Todistus. Kompaktius todistetaan harjoitustehtävänä.

Täydellisyys seuraa jonokompaktiudesta: Jos Cauchyn jonolla on suppeneva osajono, niin jono suppenee. Väitteen voi todistaa myös konstruktiolla: Olkoon $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono avaruudessa Ω_N . Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on $M_k \in \mathbb{N}$ siten, että pätee $\omega_m|_{[-k, k]}$ on vakio kaikille $m \geq M_k$. Asetetaan $\omega(\pm k) = \omega_{M_k}(\pm k)$. Selvästi ω on tarkasteltavan jonon raja-arvo.

Yksipuolinen jonoavaruus Σ_N on perfekti esimerkin 5.1 nojalla. Kaksipuolisten jonojen tapaus todistetaan samaan tapaan. □

Kuvauksia $\sigma = \sigma_N: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma = \sigma_N: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$, jotka määritellään asettamalla

$$\sigma(\omega)(k) = \omega(k+1)$$

kaikille $k \in \mathbb{N}$ tai $k \in \mathbb{Z}$, kutsutaan *vasemmaksi siirroksi* tai *topologiseksi Bernoullin siirroksi*. Yksipuolisen jonoavaruuden vasen siirto on surjektio ja kaksipuolisen jonoavaruuden vasen siirto on bijektio, sen käänteiskuvaus on *oikea siirto*

$$\sigma^{-1}(\omega)(k) = \omega(k-1)$$

Jonoavaruuden Σ_N osajoukko X on *siirtoinvariantti*, jos $\sigma(X) \subset X$ ja jonoavaruuden Ω_N osajoukko X on *siirtoinvariantti*, jos $\sigma(X) = X$. Jos X on jonoavaruuden siirtoinvariantti osajoukko, niin $\sigma|_X$ määrää dynaamisen systeemin, jota kutsutaan *symboliseksi dynaamiseksi systeemiksi*.

Jos L -Lipschitz-kuvaus f on bijektio ja jos sen käänteiskuvaus on L -Lipschitz-kuvaus, niin f on L -biLipschitz-kuvaus.

Propositio 5.8. *Vasen siirto $\sigma: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ on 2-Lipschitz-kuvaus. Vasen siirto $\sigma: \Omega_n \rightarrow \Omega_n$ on 2-biLipschitz-kuvaus.*

Todistus. Olkoot $\omega, \omega' \in \Sigma_N$ jonoja, joiden etäisyys on 2^{-k} . Tällöin siis $\omega|_{[0, k-1] \cap \mathbb{N}} = \omega'|_{[0, k-1] \cap \mathbb{N}}$ ja $\omega(k) \neq \omega'(k)$. Vastaavasti $\sigma(\omega)|_{[0, k-2] \cap \mathbb{N}} = \sigma(\omega')|_{[0, k-2] \cap \mathbb{N}}$ ja $\sigma(\omega)(k-1) \neq \sigma(\omega')(k-1)$, joten

$$d(\sigma(\omega), \sigma(\omega')) = 2^{-(k-1)} = 2 \cdot 2^{-k} = 2d(\omega, \omega').$$

Väite kaksipuolisille jonoille todistetaan samaan tapaan. □

Propositio 5.9. *Siirroille $\sigma: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_n \rightarrow \Omega_N$ pätee $\#\mathcal{P}_n(\sigma) = N^n$. Molemmilla systeemeillä jaksollisten pisteiden joukko on tiheä.*

Todistus. Olkoon W_n niiden äärellisten sanojen joukko, joiden pituus on n . Selvästi $\#W_n = N^n$ ja pätee

$$\mathcal{P}_n = \{\bar{w} \in \Omega_N : w \in W_n\}.$$

Olkoon $\omega \in \Omega_N$ ja olkoon $w_n = \omega|_{[-n, n] \cap \mathbb{Z}}$. Selvästi $\bar{w}_n \rightarrow \omega$, kun $n \rightarrow \infty$. Koska \bar{w}_n on jaksollinen, jaksollisten pisteiden tiheys seuraa kaksipuolisille jonoille. Yksipuolisten jonojen väite todistetaan vastaavalla tavalla. □

Propositio 5.10. *Siirroilla $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ on tiheitä ratoja.*

Todistus. Esimerkissä 4.3 käsitellyt jonot antavat esimerkkejä pisteistä, joiden rata on tiheä avaruuksissa Σ_N . Kaksipuolisten jonojen tapaus todistetaan samaan tapaan. □

Olkoot $\omega, \omega' \in \Sigma_N$, $\omega \neq \omega'$. Tällöin on $k \in \mathbb{N}$, jolle $\omega(k) \neq \omega'(k)$. Siis $d(\sigma^k \omega, \sigma^k \omega') = 1$. Erityisesti, jos ω ja ω' ovat lähellä toisiaan, niin $\omega|_{[0, N]} = \omega'|_{[0, N]}$ jollain N mutta $\omega(m(\omega, \omega')) \neq \omega'(m(\omega, \omega'))$. Siis $d(\sigma^{m(\omega, \omega')} \omega, \sigma^{m(\omega, \omega')} \omega') = 1$ ja näemme, että Bernoullin siirto riippuu herkästi alkuarvosta samaan tapaan kuin kulman m -kertaistavat kuvaukset.

Harjoitustehtäviä.

5.1. Osoita, että lauseke (14) määrittelee etäisyysfunktion.

5.2. Osoita, että jonoavaruudet ovat ultrametrisiä avaruuksia.

5.3. Osoita, että jonoavaruudet Σ_N ovat ylinumeroituvia.

5.4. Olkoot $x, y \in \Sigma_2$ ja olkoot $r \leq s$. Mitä voit sanoa leikkausjoukosta $B(x, r) \cap B(y, s)$?

5.5. Todista Proposition 5.4 kohta (2).

³Vihje: Cantorin diagonaalitodistus

5.6. Osoita, että jonoavaruuksien pallot ovat sylintereitä.

5.7. Osoita, että jokaisella jonoavaruuden Σ_2 jonolla on suppeneva osajono. Tämä osoittaa, että metrinen avaruus Σ_2 on kompakti.

5.8. Osoita, että avaruudet Ω_2 ja Σ_2 ovat homeomorfiset. Tämä osoittaa, että metrinen avaruus Ω_2 on kompakti.

5.9. Anna esimerkki pisteestä $\alpha \in \Omega_{\{0,1\}}$, jonka rata on tiheä vasemmalla siirrolla σ .

5.10. Osoita, että sylinterit ovat avoimia ja suljettuja joukkoja.

Olkoon $F_N: \Sigma_N \rightarrow [0, 1]$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$F_N(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega(k)}{N^{k+1}}$$

kaikille $\omega \in \Sigma_N$.

5.11. Osoita, että kuvaus F_N on jatkuva surjektio.

5.12. Olkoon $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ympyrän parametrisointi, joka määriteltiin luvun 3 alussa ja olkoon $E_N: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kulman N -kertaistava kuvaus. Osoita, että

$$E_N \circ \Phi \circ F_N = \Phi \circ F_N \circ \sigma.$$

Määritellään kuvaus $\alpha: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ asettamalla

$$\alpha(\omega)(i) = \begin{cases} 1 - \omega(i), & \text{jos } \omega(j) = 1 \text{ kaikille } j < i, \\ \omega(i) & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkiksi siis $\alpha(\bar{0}) = \bar{10}$ koska ei ole luonnollisia lukuja $j < 0$. Siis kaikille sellaisille luvuille pätee mikä tahansa väite.

5.13. Osoita, että α on bijektio ja määritä sen käänteiskuvaus.

Osoita, että α kuvaa sylinterit $C_\alpha^{[0,k]}$ sylintereiksi.

Osoita, että α on homeomorfismi.

Osoita, että α on topologisesti transitiivinen.

Miten α liittyy kuvaukseen $x \mapsto x + 1$, kun luonnolliset luvut esitetään 2-kantaisesti?

⁷Vihje: Olkoon $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ ääretön jono. Tällöin äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 0$ tai äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 1$. Siirry osajonoon ja tarkastele jonon alkioden arvoja $\omega_n(1)$.

⁸Vihje: Miten kaksipuolinen jono kuvataan yksipuoliseksi jonoksi?

6. TOPOLOGISET OMINAISUUDET, KAAOS

Edellä tarkastelemamme esimerkit kulman m -kertaistavista kuvauksista ja Bernoullin siirroista paljastavat, että nämä dynaamiset systeemit ovat ”dynamiikaltaan runsaampia” ja jossain määrin vaikeammin hallittavia kuin kutistavat kuvaukset ja ympyrän kierrot. Dynaamisilla systeemeillä (E_m, \mathbb{S}^1) ja (σ, Σ_N) on ainakin seuraavat ominaisuudet

- jaksollisten pisteiden joukko on tiheä,
- systeemillä on tiheitä positiivisia ratoja,
- pisteillä, joiden etäisyys on hyvin pieni, voi olla keskenään täysin erilainen asymp-toottinen käyttäytyminen.

Tässä luvussa tarkastelemme dynaamisten systeemien ominaisuuksia abstraktimmin kuin aiemmissa.

6.1. Topologinen transitiivisuus. Diskreetti dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ on *topologisesti transitiivinen*, jos kaikille avoimille epätyhjille joukoille $U, V \subset X$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.^{*} Se on *topologisesti sekoittava*, jos kaikille avoimille epätyhjille joukoille $U, V \subset X$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ kaikille $n \geq N$. Topologisesti sekoittavat systeemit ovat topologisesti transitiivisia.

Esimerkki 6.1. Esimerkin 4.2 jälkeen osoitimme, että kuvaus E_m on topologisesti sekoittava.

Propositio 6.2. *Vasemmat siirrot $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ ovat topologisesti sekoittavia.*

Todistus. Yksipuolisen jonoavaruuden tapaus on helppo: Jos $U \subset \Sigma_N$ on epätyhjä avoin joukko, niin U sisältää jonkin sylinterin $C_\alpha^{[0, M]}$ jollain $M \in \mathbb{N}$. Koska $\sigma^{M+1}(C_\alpha^{[0, M]}) = \Sigma_N$, niin pätee $\sigma^{M+1}(U) = \Sigma_N$, mistä väite seuraa.

Olkoot $U, V \subset \Omega_N$ epätyhjiä avoimia joukkoja. Tällöin U sisältää jonkin symmetrisen sylinterin $C_\alpha^{[-M_U, M_U]}$ ja V sisältää jonkin symmetrisen sylinterin $C_\beta^{[-M_V, M_V]}$ joillain $M_U, M_V \in \mathbb{N}$. Kun $n \geq n_0 = 2(\max(M_U, M_V) + 1)$, niin

$$\sigma^n(C_\alpha^{[-M_U, M_U]}) \cap C_\beta^{[-M_V, M_V]} = C_{\alpha \cup \beta}^{[-M_U - n_0, M_U - n_0] \cup [-M_V, M_V]}$$

on sylinteri, erityisesti siis epätyhjä joukko, joka sisältyy leikkaukseen $\sigma^n(U) \cap V$. □

Tarkastelemme seuraavaksi topologista transitiivisuutta. Metrinen avaruus on *separoituva*, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Esimerkki 6.3. (1) Separoituvia metrisiä avaruuksia ovat esimerkiksi kaikki euklidiset avaruudet koska $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

(2) Kompaktit metriset avaruudet kuten \mathbb{S}^1 ja jonoavaruudet Σ_N ja Ω_N . Nämä esimerkit ovat separoituvia silläkin perusteella, että olemme käsitelleet dynaamisia systeemejä, joilla on näissä avaruuksissa tiheitä ratoja.

(3) Ylinumeroituva diskreetti metrinen avaruus ei ole separoituva.

Jos X ei ole separoituva, niin millään diskreetillä dynaamisella systeemillä $f: X \rightarrow X$ ei ole tiheää rataa koska pisteen rata on numeroituva tai äärellinen joukko. Separoituvassa tilanteessa topologinen transitiivisuus ja tiheä rata ovat lähes ekvivalentteja kuten seuraava tulos osoittaa.

^{*}Jos f on homeomorfismi, topologisen transitiivisuuden määritelmässä on tapana sallia $N \in \mathbb{Z}$. Määritelmä on kuitenkin valitsemamme kanssa yhtäpitävä esimerkiksi separoituvissa kompakteissa metrisissä avaruuksissa, katso [BS, Prop. 2.2.2], [HK, Prop. 7.2.2].

Lause 6.4. Olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Jos systeemillä $f: X \rightarrow X$ on tiheä rata ja avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä, niin f on topologisesti transitiivinen. Jos X on täydellinen ja separoituva ja f on topologisesti transitiivinen, niin sillä on tiheä rata.

Todistus. Oletetaan, että on $x \in X$, jolle $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$. Olkoot U ja V epätyhjiä avoimia joukkoja. Tällöin on $n_U \in \mathbb{N}$ siten, että $y_U = f^{n_U}(x) \in U$. Pisteen y_U rata on tiheä koska metrisessä avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä. Siis on N_V siten, että $f^{N_V}(y_U) \in V$, mikä osoittaa, että f on topologisesti transitiivinen.

Oletetaan sitten, että f on topologisesti transitiivinen. Olkoon A metrisen avaruuden X numeroituva tiheä osajoukko. Olkoon

$$\{U_k : k \in \mathbb{N}\} = \{B(a, r) : a \in A, r \in \mathbb{Q}_+\}.$$

Osoitamme, että on $x \in X$, jolle $\mathcal{O}_f^+(x) \cap U_k \neq \emptyset$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska jokainen avoin joukko sisältää ainakin yhden joukon kokoelmasta $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$,[†] niin tällaisen pisteen x rata on tiheä.

Topologisen transitiivisuuden nojalla on $N_1 \in \mathbb{N}$, jolle $f^{N_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Valitaan $a_i \in A$ ja $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$ siten, että $\overline{B(a_1, r_1)} \subset U_1 \cap (f^{N_1})^{-1}(U_2)$. Samoin on $N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $B(a_1, r_1) \cap (f^{N_2})^{-1}(U_3)$ on avoin epätyhjä joukko. Valitaan $a_2 \in A$ ja $0 < r_2 < 2^{-2}$, jne. Näin saadaan Cauchyn jono (a_k) , joka täydellisyyden nojalla suppenee kohti raja-arvoa $a \in X$. Konstruktioista seuraa, että $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(a_k, r_k)}$, joten $f^{N_k}(a) \in U_{k+1}$ kaikilla $k \geq 1$. \square

6.2. Kaaos. Dynaamisten systeemien yhteydessä puhutaan usein hieman epämääräisesti *kaaoksesta* ilman että termin sisältöä kiinnitetään kovin tarkasti. Yksi kaaokselta yleensä edellytettävistä piirteistä on *perhosefekti* eli herkkä riippuvuus alkuarvoista. Dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ riippuu herkästi alkuarvoista, jos systeemillä on *herkkyysvakio* $\Delta > 0$ siten, että jokaisella $x \in X$ ja $\epsilon > 0$ on $y \in B(x, \epsilon)$ ja $N \in \mathbb{N}$, joille $d(f^N(x), f^N(y)) \geq \Delta$. Herkkä riippuvuus alkuarvosta tarkoittaa, että pieni epätarkkuus lähtötilanteessa voi muuttaa tulevaisuuden kokonaan.

Esimerkki 6.5. Lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Lx = 2x$ riippuu herkästi alkuarvosta mutta sitä ei voi pitää kovin ei ole kaoottisena: Kuvauksella on yksi kiintopiste 0 ja kaikki muut pisteet $x \in \mathbb{R}^n$ toteuttavat $\|L^k x\| = 2^k \|x - y\| \rightarrow \infty$, kun $k \rightarrow \infty$.

Yleensä, jos kaaoksen tai kaoottisuuden käsite halutaan määritellä, vaaditaan herkän riippuvuuden lisäksi jotain muita ominaisuuksia. Devaney'n määritelmän [Dev, §1.8] mukaan dynaaminen systeemi on *kaoottinen*, jos

- (1) sen jaksollisten pisteiden joukko on tiheä,
- (2) se on topologisesti transitiivinen ja
- (3) se riippuu herkästi alkuarvoista.

Esimerkki 6.6. (1) Ympyrän kaikki pisteet ovat rationaalisen kierron jaksollisia pisteitä ja irrationaalinen kierto on topologisesti transitiivinen. Kuitenkaan kumpikaan näistä ei ole kaoottinen systeemi: Mikään ympyrän kierto ei riipu herkästi alkuarvosta sillä kierrot ovat ympyrän isometrioita: $d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) = d(x, y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{S}^1$.

(2) Luvussa 4 osoitimme, että kuvauksen $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ jaksollisten pisteiden joukko on tiheä. Olkoon $U \subset \mathbb{S}^1$ avoin epätyhjä joukko. Tällöin U sisältää jonkin *m-adisen välin*. Siis $E_m(U) \subset E_m^N(U) = \mathbb{S}^1$ ja kaikille epätyhjiille $V \subset \mathbb{S}^1$ pätee $E_m^N(U) \cap V = V \neq \emptyset$, joten E_m on topologisesti sekoittava ja siis topologisesti transitiivinen. Sama havainto osoittaa, että lähellä pistettä $x \in \mathbb{S}^1$ on piste y , jolle sopivaa $m \in \mathbb{N}$ pätee $d(E_m^N(x), E_m^N(y)) = \frac{1}{2}$. Dynaaminen systeemi $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ on siis kaoottinen.

[†]itse asiassa äärettömän monta joukkoa

(3) Vasemmat siirrot $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ ovat kaoottisia Propositioiden 5.10 ja 6.2 luvun 5 lopussa tehdyn havainnon nojalla.

Seuraava tulos osoittaa, että herkkä riippuvuus alkuarvoista seuraa kaoottisuuden määritelmästä paitsi triviaaleissa tilanteissa.

Lause 6.7. *Olkkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Oletetaan, että dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ on topologisesti transitiivinen ja sen jaksolliset radat ovat tiheässä. Jos avaruus X ei koostu yhdestä jaksollisesta radasta, niin dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ riippuu herkästi alkuarvosta, erityisesti se on siis kaoottinen.*

Todistus. Olkkoot $q_1, q_2 \in X$ jaksollisia pisteitä, joiden radat ovat erilliset. Olkkoon

$$\Delta = \min\{d(x_1, x_2) : x_i \in \mathcal{O}(q_i)\}/8.$$

Osoitetaan, että Δ on systeemin $f: X \rightarrow X$ herkkyyssvakio.[‡]

Olkkoon $x \in X$. Kolmioepäyhtälön nojalla pätee $d(x, \mathcal{O}(q_1)) \geq 4\Delta$ tai $d(x, \mathcal{O}(q_2)) \geq 4\Delta$. Olkkoon q näin löydetty jaksollinen piste, jolle pätee $d(x, \mathcal{O}(q)) \geq 4\Delta$.

Olkkoon $0 < \epsilon \leq \Delta$. Koska jaksolliset pisteet ovat tiheässä, on jaksollinen piste $p \in B(x, \epsilon)$. Olkkoon pisteen p jakso n .

Olkkoon

$$U = \bigcap_{i=0}^n (f^i)^{-1}(B(f^i(q), \Delta)).$$

Joukko U on äärellisen monen avoimen joukon leikkauksena avoin ja $q \in U$, joten U ei ole tyhjä joukko. Koska systeemillä on tiheä rata, on $y \in B(x, \epsilon)$, jolle pätee $f^k(y) \in U$ jollain $k \in \mathbb{N}$. Olkkoon $N = n(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)$. Tällöin $k \leq N \leq n + k$. Koska N on pisteen p jakson monikerta, pätee $f^N(p) = p$ ja kolmioepäyhtälö antaa

$$(15) \quad d(f^N(p), f^N(y)) \geq d(x, f^{N-k}(q)) - d(f^{N-k}(q), f^N(y)) - d(p, x)$$

Joukon U määritelmän mukaan pätee $f^{N-k}(U) \subset B(f^{N-k}(q), \Delta)$, joten

$$f^N(y) = f^{N-k}(f^k(y)) \in B(f^{N-k}(q), \Delta).$$

Epäyhtälön (15) nojalla siis

$$(16) \quad d(f^N(p), f^N(y)) \geq 4\Delta - \Delta - \Delta = 2\Delta.$$

Jos pätsi, $d(f^N(p), f^N(x)) \leq \Delta$ ja $d(f^N(x), f^N(y)) \leq \Delta$, kolmioepäyhtälö antaisi ristiriidan epäyhtälön (16) kanssa, joten pätee $d(f^N(p), f^N(x)) \geq \Delta$ tai $d(f^N(x), f^N(y)) \geq \Delta$. On siis osoitettu, että on piste $z \in \{p, y\} \subset B(x, \epsilon)$, jolle pätee $d(f^N(z), f^N(x)) \geq \Delta$. \square

Seuraus 6.8. *Olkkoon X ääretön metrinen avaruus, jossa ei ole eristettyjä pisteitä. Olkkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Jos dynaamisella systeemillä $f: X \rightarrow X$ on tiheä rata ja sen jaksolliset radat ovat tiheässä, niin se on kaoottinen.*

Todistus. Seuraa Lauseista 6.4 ja 6.7. \square

Jos dynaaminen systeemi on topologisesti sekoittava pelkän transitiivisuuden sijaan, se riippuu herkästi alkuarvoista ilman oletusta jaksollisten ratojen tiheydestä.

Lause 6.9. *Olkkoon $f: X \rightarrow X$ topologisesti sekoittava. Tällöin f riippuu herkästi alkuarvoista.*

Todistus. Olkkoon $\Delta = \frac{\text{diam } X}{5}$ ja olkkoot $a, b \in X$ siten, että $d(a, b) > 4\Delta$. Osoitamme, että Δ on systeemin herkkyyssvakio. Olkkoon $x \in X$ ja olkkoon U sen ympäristö. Topologisen transitiivisuuden nojalla on $y_a \in U$ ja $N_a \in \mathbb{N}$ siten, että $d(f^{N_a}(y_a), a) < \Delta$ ja $y_b \in U$ ja

[‡]Emme pohdi lainkaan sitä, että vakio ei välttämättä ole suurin mahdollinen.

$N_b \in \mathbb{N}$ siten, että $d(f^{N_b}(y_b), b) < \Delta$. Jos päteisi $d(x, f^{N_a}(y_a)) < \Delta$ ja $d(x, f^{N_b}(y_b)) < \Delta$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(a, b) \leq d(a, y_a) + d(y_a, x) + d(x, y_b) + d(y_b, b) < 4\Delta,$$

mikä on ristiriita. Siis pätee $d(f^{N_a}(y_a), x) \geq \Delta$ tai $d(f^{N_b}(y_b), x) \geq \Delta$. □

Harjoitustehtäviä.

6.1. Olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Olkoon pisteen x positiivinen rata tiheä metrisessä avaruudessa X . Osoita, että jokaisen pisteen $f^N(x)$, $N \in \mathbb{N}$, rata on tiheä, jos avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä. Anna esimerkki tilanteesta, jossa pisteen x positiivinen rata on tiheä mutta jonkin pisteen $f^N(x)$, $N \in \mathbb{N}$, rata ei ole tiheä.

6.2. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Oletetaan, että X ei koostu yhdestä positiivisesta radasta ja että kuvauksella f on puoleensavetävä jaksollinen piste. Osoita, että kuvauksella f ei ole tiheää positiivista rataa.

Pisteen $x \in X$ ω -rajajoukko dynaamisessa systeemissä $f: X \rightarrow X$ on

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}}$$

6.3. Olkoon $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $f(0) = 0$ ja napakoordinaattien avulla

$$f(re^{i\phi}) = \sqrt{r} e^{i2\phi},$$

kun $0 \neq z = r e^{i\phi}$. Määritä ω -rajajoukko $\omega_f(z_0)$ kaikille $z_0 \in \mathbb{C}$.

7. KONJUGOINTI JA SEMIKONJUGOINTI

Tässä luvussa tarkastelemme keinoja, joilla tarkasteltavan dynaamisen systeemin luonnetta voidaan joissain tianteissa tutkia toisen jo ennalta tunnetun dynaamisen systeemin avulla.

Kuvaus $g: Y \rightarrow Y$ on kuvauksen $f: X \rightarrow X$ *topologinen tekijä*, jos on jatkuva surjektio $s: X \rightarrow Y$ siten, että $g \circ s = s \circ f$. Kuvausta s kutsutaan *semikonjugoivaksi kuvaukseksi*.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Jos kuvaus s on homeomorfismi, niin kuvaukset f ja g ovat *konjugaatteja* ja s on *konjugoiva kuvaus*.

Propositio 7.1. *Olkoot $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja olkoon g kuvauksen f topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: X \rightarrow Y$. Tällöin*

- (1) *s kuvaa kuvauksen f jaksolliset radat kuvauksen g jaksollisiksi radoiksi.*
- (2) *s kuvaa kuvauksen f tiheet radat kuvauksen g tiheiksi radoiksi.*
- (3) *jos f on topologisesti transitiivinen, niin g on topologisesti transitiivinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 7.2. Lineaarikuvaus

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -2\sin(2\pi\alpha) \\ \frac{1}{2}\sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on kierron R_α konjugaatti ajateltuna tason \mathbb{R}^2 kuvauksina, konjugoiva kuvaus s on diagonaalimatriisia $\text{diag}(2, 1)$ vastaava kuvaus $x \mapsto (2x_1, x_2)$. Jos α on irrationaaliluku, kuvauksella S_α on tiheä rata ellipsillä $s(\mathbb{S}^1)$, jonka puoliakselit ovat pituuksiltaan 2 ja 1.

Seuraus 7.3. *Olkoot $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja olkoon g kuvauksen f topologinen tekijä. Jos Y ei koostu yhdestä jaksollisesta radasta ja f on kaoottinen, niin g on kaoottinen.*

Todistus. Proposition 7.1 nojalla kuvauksen g jaksolliset radat ovat tiheässä ja sillä on tiheä rata. Lauseen 6.7 nojalla g on kaoottinen. □

Esimerkki 7.4. Tšebyšov^{*}in polynomi P_n on se yksikäsitteinen polynomi, jolle pätee

$$P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

kaikille $\theta \in \mathbb{R}$. Polynomien P_n lausekkeet saadaan de Moivre'n kaavasta:

$$P_2(x) = 2x^2 - 1, \quad P_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad P_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

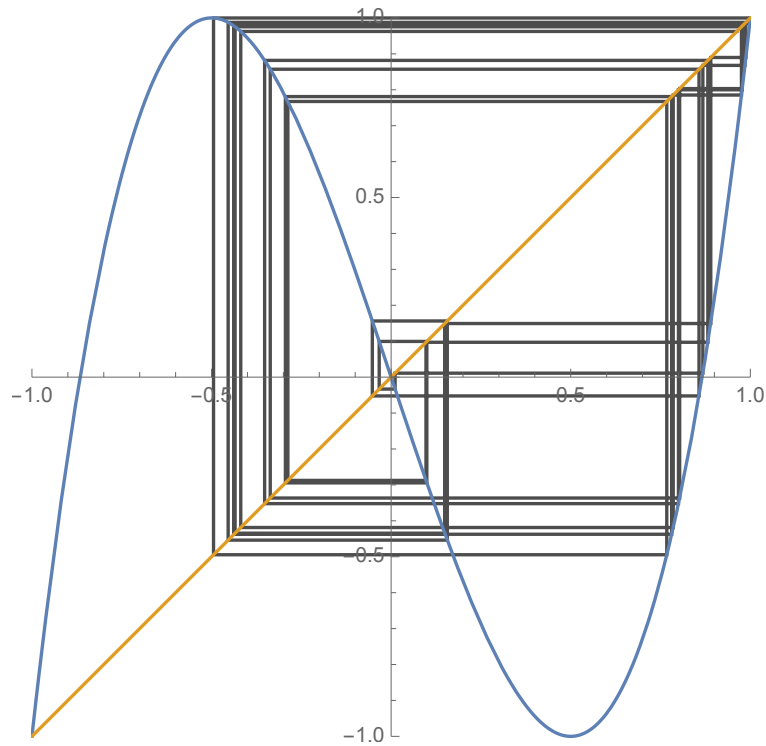
ja niin edelleen.

Määritelmänsä mukaan kuvaus $P_m: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ on kulman m -kertaistaistavan kuvauksen $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: \mathbb{S}^1 \rightarrow [-1, 1]$,

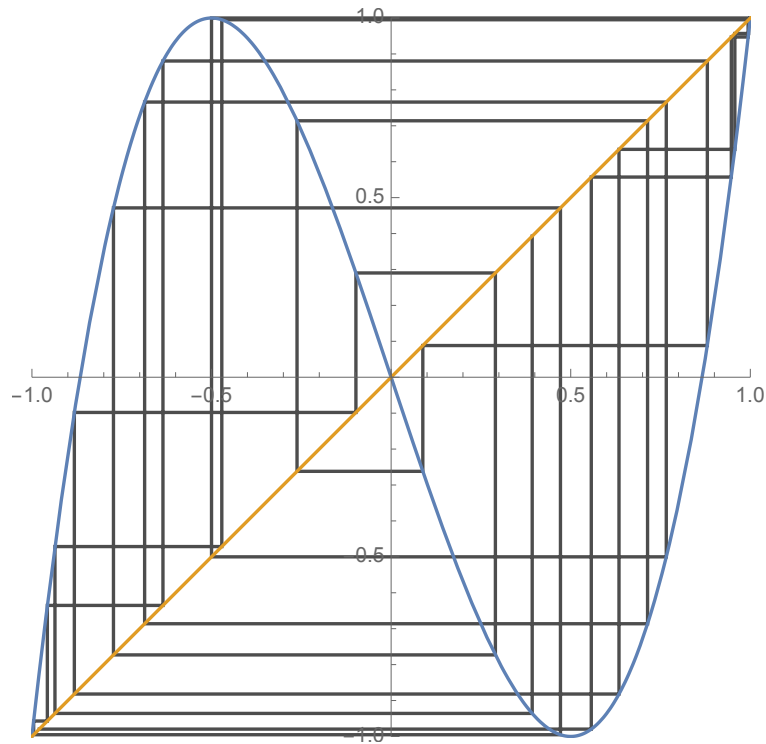
$$s([t]) = \cos(2\pi t).$$

Seurauksen 7.3 ja Esimerkin 6.6(2) nojalla kuvaus $P_m: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ on kaoottinen.

^{*}englanninkielisissä lähteissä nimi esiintyy muodossa Chebyshev



KUVA 15. Pisteen $\cos(2\pi q)$ rataa kuvauksella P_3 , missä q on kuten esimerkiksi 4.5.



KUVA 16. Pistein $\cos(2\pi q')$ rataa kuvauksella P_3 , missä $q' \approx 0.185764$ on luku, jonka esitys kannassa 3 on 0.012000102101112202122.

Esimerkki 7.5. Telttakuvaus $T_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ja logistinen funktio $F_4: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $F_4(x) = 4x(1-x)$ ovat semikonjugaatteja. Kuvaus F_4 on kuvauksen T_2 topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$s(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t)) :$$

Nythän, jos $x \in [0, \frac{1}{2}]$, pätee

$$s \circ T(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t)) = 1 - \cos^2(2\pi x)$$

ja jos $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, niin kosinin jaksollisuuden ja parillisuuden nojalla pätee

$$s \circ T(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi(2-2t))) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi(-2t))) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t)).$$

Toisaalta

$$F_4 \circ s(t) = 4\left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t))\right)\left(1 - \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t))\right) = 1 - \cos^2(2\pi x).$$

Harjoituksissa osoitetaan, että kuvaukset T_2 ja F_4 ovat kaoottisia Seurauksen 7.3 ja Esimerkin 7.4 nojalla.

Esimerkki 7.6. Olkoon $[K] \subset \mathbb{S}^1$ Esimerkissä 4.4 konstruoitu E_3 -invariantti Cantorin joukko. Olkoon $s: [K] \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$s\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i/2}{2^i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}\right].$$

Kuvaus s on jatkuva surjektio, jolle pätee $s \circ E_3 = E_2 \circ s$. Siis kuvaus $E_2: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ on kuvauksen $E_3: [K] \rightarrow [K]$ topologinen tekijä.

7.1. Koodaaminen. Koodaamisella tarkoitetaan dynaamisen systeemin $f: X \rightarrow X$ liittämistä symboliseen dynaamiseen systeemiin jakamalla avaruus X osiin X_1, X_2, \dots, X_{N-1} , joiden leikkausjoukot ovat pieniä, ja tarkastelemalla pisteiden $x \in X$ reittiä kuvauksen f iteraateilla: Jos $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{N-1}$ ja $f^n(x) \in X_{a_n}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ tai $n \in \mathbb{N}$ (riippuen siitä, onko f bijektio vai ei), niin symbolien a_n muodostama jono on pisteen x reitti.

Yleisessä tapauksessa voidaan joutua monenlaisiin vaikeuksiin: Pisteen reitti ei ole yksikäsitteinen, jos joukot X_1, X_2, \dots, X_{N-1} eivät ole erillisiä, ja toisaalta useammallakin eri pisteellä voi olla sama reitti. Seuraava esimerkki antaa onnistuneen koodauksen eli konjugaation symbolisen dynaamisen systeemin kanssa. Tällaisessa tilanteessa X on siis välttämättä homeomorfinen Cantorin joukon osajoukon kanssa.

Esimerkki 7.7. Olkoon $T_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_3(x) = \begin{cases} 3x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Miten rata $(T_3^k(x))_{k=0}^{\infty}$ käyttäytyy muuttujan x eri arvoilla?

- Jos $x < 0$, niin $T_3^k(x) = 3^k x$, ja tällaisen jonon raja-arvo on selvästi $-\infty$.
- Jos $x > 1$, niin $T_3(x) < 0$, joten näilläkin alkuarvoilla jonon raja-arvo on $-\infty$.
- Jos $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, niin $T_3(x) > 1$, joten näilläkin alkuarvoilla jonon raja-arvo on $-\infty$.
- Jos $x \in]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, niin $T_3(x) \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, joten $T_3^2(x) > 1$. Siis näilläkin alkuarvoilla jonon raja-arvo on $-\infty \dots$

Kuitenkin joillakin alkuarvoilla käyttäytyminen on täysin erilaista:

- Systemillä on kaksi kiintopistettä 0 ja $\frac{3}{4}$.
- $(T_3)^m(\frac{1}{3^m}) = 1$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Siis $(T_3)^M(\frac{1}{3^m}) = 0$ kaikilla $M \geq m$, joten nämä jonot ovat vakiojonoja suurilla indekseillä k . Pisteet, jotka ovat muotoa $\frac{1}{3^m}$ ovat systeemin *esikiintopisteitä*.

- $T_3(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$, $T_3(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, $T_3(\frac{1}{12}) = \frac{1}{4}$ ja niin edelleen.
 - Systemillä on runsaasti jaksollisia ratoja esimerkiksi $\frac{3}{10} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \frac{9}{10} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix}$ ja $\frac{3}{28} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \frac{9}{28} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \frac{27}{28}$.
- Ne pisteet, joiden radat sisältyvät väliin $[0, 1]$ muodostavat Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon:

$$\begin{aligned} & [0, 1] - \bigcup_{k=0}^{\infty} (T_3^k)^{-1} \left(\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [\right) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} (T_3^k)^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} : T_3^k(x) \in [0, 1] \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 2\} \right\} = K \end{aligned}$$

Muistamme Esimerkistä 4.4 Cantorin joukon konstruktion

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n,$$

missä K_n koostuu 2^n erillisestä osavälistä I_n^ℓ , joiden jokaisen pituus on 3^{-n} . Erityisesti

$$I_1^0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \text{ja} \quad I_1^1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Käyttämällä esitystä kannassa 3 on helppo tarkastaa, että K on T_3 -invariantti. Telttakuvauksen rajoittuma Cantorin joukkoon riippuu herkästi alkuarvosta: Olkoon $x \in K$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on k, ℓ , joille $x \in I_k^\ell \subset B(x, \epsilon)$. Koska $T^k(I_k^\ell) = [0, 1]$, on $a, b \in B(x, \epsilon)$, joille pätee $T^k(a) = 0$ ja $T^k(b) = 1$. Erityisesti on piste $z \in a, b \subset B(x, \epsilon)$, jolle pätee $|T^k(a) - T^k(z)| \geq \frac{1}{2}$.

Olkoon $S: K \rightarrow \Sigma_2$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $S(x)(i) = a$, jos $T_3^i \in I_1^a$. Kuvaus S on hyvin määritelty, koska K on T_3 -invariantti ja joukot I_1^0 ja I_1^1 ovat erillisiä. Osoitamme, että S on bijektio. Se on injektio: Jos $S(x) = S(y)$, niin pisteet $T_3^n(x)$ ja $T_3^n(y)$ ovat samalla välillä I_1^0 tai I_1^1 kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $x, y \in I_1^a$, $a \in \{0, 1\}$, niin

$$|T_3(x) - T_3(y)| = 3|x - y|,$$

joten

$$|T_3^n(x) - T_3^n(y)| = 3^n|x - y|.$$

Koska K on T_3 -invariantti, pätee $|T_3^n(x) - T_3^n(y)| \leq 1$ kaikilla n , mikä on ristiriita ellei $|x - y| = 0$. Siis $x = y$.

Kuvaus S on myös surjektio: Jokaisen välin $J \subset I_1^0 \cup I_1^1$ alkukuva koostuu kahdesta välistä, joista toinen on välin I_1^0 ja toinen välin I_1^1 osajoukko. Olkoon $\omega \in \Sigma_2$ ja olkoon jokaisella $n \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{w(0)\omega(1)\dots\omega(n)} &= I_1^{\omega(0)} \cap T_3^{-1} I_1^{\omega(1)\dots\omega(n)} \\ &= I_1^{\omega(0)} \cap T_3^{-1} (I_1^{\omega(1)} \cap T_3^{-1} I_1^{\omega(2)\dots\omega(n)}) \\ &= I_1^{\omega(0)} \cap T_3^{-1} (I_1^{\omega(1)}) \cap T_3^{-2} (I_1^{\omega(2)}) \cap \dots \cap T_3^{-n} (I_1^{\omega(n)}) \end{aligned}$$

Välit $I_{w(0)\omega(1)\dots\omega(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ ovat sisäkkäisiä epätyhjiä kompakteja välejä, joten on

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{w(0)\omega(1)\dots\omega(n)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n} (I_1^{\omega(n)}).$$

Konstruktion perusteella $S(x) = \omega$. Koska välit $I_{w(0)\omega(1)\dots\omega(n)}$ ovat Cantorin joukon konstruktiossa esiintyviä n . sukupolven välejä, niiden halkaisija on 3^{-n} . Siispä konstruktio todella antaa vain yhden pisteen x , jolle $S(x) = \omega$.

Harjoituksissa osoitetaan, että S ja sen käänteiskuvaus ovat jatkuvia, joten S on homeomorfismi jonoavaruuden Σ_2 ja Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon välillä.

Tarkastetaan vielä, että dynaamiset systeemit $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ ja $T_3: K \rightarrow K$ ovat konjugaatteja:

$$S \circ T_3 = \sigma \circ S.$$

Olkoon $S(x) = \omega$. Tällöin

$$T_3(\{x\}) = T_3\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n}(I_{\omega(n)})\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n}(I_{\omega(n+1)}) = \{S^{-1}(\sigma(\omega))\},$$

mistä väite seuraa.

Esimerkin 7.7 havainnot voidaan yleistää seuraavasti: Olkoon $\lambda > 0$ ja olkoon telttakuvaus $T_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda - \lambda x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Olkoon $0 < \nu < 1$. Cantorin ν -joukko K_ν määritellään kuten Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko mutta jokaisessa vaiheessa poistetaan osavälien keskeltä avoin väli, jonka pituus on ν kertaa osavälän pituus. Erityisesti siis Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko on Cantorin ν -joukko, kun $\nu = \frac{1}{3}$.

Seuraus 7.8. *Olkoon $\lambda > 2$. Dynaaminen systeemi $T_\lambda: K_{\frac{1}{\lambda}} \rightarrow K_{\frac{1}{\lambda}}$ on konjugaatti vasemman siirron $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kanssa. Erityisesti se on kaoottinen. Lisäksi $\#\mathcal{P}_n(T_\lambda) = 2^n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.* \square

Avaruudet (Σ_N, d) ja (Ω_N, d) ovat homeomorfisia Cantorin joukon K kanssa. Tämä osoitettiin Esimerkissä 7.7 jonoavaruudelle Σ_2 . Homeomorfisuus Cantorin joukon kanssa seuraa abstraktisti kompaktiudesta, perfektiydestä ja täysin epäyhtenäisyydestä, katso esimerkiksi [HY, Thm. 2.97].

Esimerkki 7.9 (Smalen hevosenkenkä). Olkoon $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismi, jolla on seuraava ominaisuus: H kuvaa yksikköneliön $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ hevosenkengäksi, joka kulkee kaksi kertaa vaakasuoraan neliön I^2 läpi kuten kuvassa. Oletamme, että hevosenkenkä muodostetaan näin: Yksikköneliötä venytetään melko tasaisesti ensimmäisen koordinaatin suunnassa ja kavennetaan samaan tapaan toisen koordinaatin suunnassa. Näin saadun kaistaleen oikeanpuoleinen kolmannes leikkaa neliön I^2 alaosaa ja vasen kolmannes leikkaa sen yläosaa. Keskiosa taivutetaan niin, että syntyy hevosenkenkä. Täsmällisellä lausekkeella ei ole suurta merkitystä tarkastelemallemme dynamiikalle. Olkoot leikkauksen $I^2 \cap H(I^2)$ komponentit J_0 (alempi) ja J_1 (ylempi).

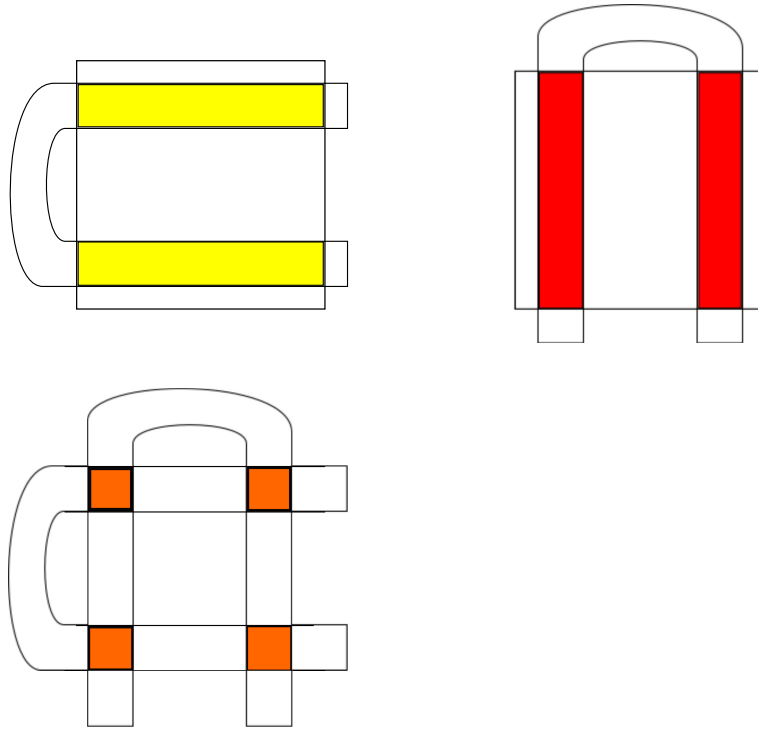
Kuvauksen H käänteiskuvaus on vastaavanlainen hevosenkenkä, jonka leikkaus neliön I^2 kanssa koostuu kahdesta pystysuuntaisesta kaistaleesta.

Oletetaan, että niillä osilla neliötä I^2 , jotka H kuvaa takaisin neliön I^2 sisään, H kutistaa etäisyyksiä toisen koordinaatin suunnassa vähintään vakiolla $\lambda < \frac{1}{3}$ ja vastaavasti niillä osilla, jotka H^{-1} kuvaa takaisin neliön I^2 sisään, H^{-1} kutistaa etäisyyksiä toisen koordinaatin suunnassa vähintään (samalla) vakiolla $\lambda < \frac{1}{3}$.

Kaistaleiden J_0 ja J_1 kuvat leikkaavat neliötä I^2 yhteensä neljässä vaakasuorassa kaistaleessa joukkojen J_0 sisällä siten, että sekä J_0 että J_1 sisältää palan kaistaleen J_0 kuvaa ja palan palan kaistaleen J_1 kuvaa. Positiivisilla iteraateilla H^n saadaan 2^{n+1} kaistaletta vastaavaan tapaan edellisen sukupolven kaistaleiden sisään samalla tavalla kuin Esimerkissä 7.7. Neliön kuvat homeomorfismin H negatiivisilla iteraateilla muodostavat samanlaisen rakennelman pystysuoria sisäkkäisiä kaistaleita.

Huomaamme, että

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^n(I^2) = [0, 1] \times K_1$$



ja

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(I^2) = K_2 \times [0, 1],$$

missä K_1 ja K_2 ovat homeomorfisia Cantorin joukon kanssa. Dynamiikan kannalta mielenkiintoisin joukko on

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H^n(I^2) = K_2 \times K_1,$$

joka on kompakti, täysin epäyhäinen perfekti joukko. Kuten Esimerkissä 7.7 voidaan osoittaa, että pisteen $x \in K_2 \times K_1$ reitti antaa kuvauksen $S: K_2 \times K_1 \rightarrow \Omega_2$ seuraavalla tavalla: Liitämme jokaiseen pisteeseen x kuvauksen $S(x): \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ asettamalla $S(x)(i) = a$, jos $H^i \in J_a$ kullekin $i \in \mathbb{Z}$. Kuten esimerkissä 7.7 osoitetaan, että S on konjugoiva homeomorfismi dynaamisten systeemien $H_{K_2 \times K_1}: K_2 \times K_1 \rightarrow K_2 \times K_1$ ja $\sigma: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ välillä.

Harjoitustehtäviä.

7.1. Todista Propositio 7.1.

7.2. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(a) Osoita, että kuvaus $f|_{]1, \infty[}:]1, \infty[\rightarrow]1, \infty[$ riippuu herkästi alkuarvoista.

(b) Osoita, että kuvaus $f|_{]0, 1[}:]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ ei riipu herkästi alkuarvoista.

7.3. Osoita, että herkkä riippuvuus alkuarvoista ei välttämättä säily konjugoinnissa.

7.4. Olkoot $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Osoita, että kierto $R_{k\alpha}$ on kierron R_α topologinen tekijä.

7.5. Osoita, että topologisesti sekoittavan dynaamisen systeemin topologinen tekijä on topologisesti sekoittava.

7.6. Osoita, että kuvaus $h_1: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$h_1(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$$

on homeomorfismi, joka konjugoi kuvaukset T_2 ja F_4 :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{F_4} & [0, 1] \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_1 \\ [0, 1] & \xrightarrow{T_2} & [0, 1] \end{array}$$

7.7. Etsi homeomorfismi $h_2: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, joka konjugoi kuvauksen F_4 ja toisen Tšebyševin polynomikuvauksen $P_2(x) = 2x^2 - 1$ rajoittuman välille $[-1, 1]$.

7.8. Osoita, että kuvaukset F_4 ja T_2 ovat kaoottisia.

7.9. Tee graafista analyysia telttafunktiolle T_2 ja/tai funktiolle F_4 niin, että joitain erilaisia ratoja havaitaan.

—————

7.10. Osoita, että dynaamisen systeemin $T_3: K \rightarrow K$ reittikuvaus $S: K \rightarrow \Sigma_2$ on homeomorfismi.

7.11. Osoita, että dynaamisella systeemillä $T_3: K \rightarrow K$ on tiheä rata.

⁷Vihje: ensimmäisen asteen polynomifunktio toimii.

8. LOGISTISET KUVAUKSET

Yhdestä reaalisesta parametrilla riippuva parametrisoitu perhe kuvauksia $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ välillä $I \subset \mathbb{R}$ on kahden muuttujan jatkuva funktio $G: \Lambda \times I \rightarrow I$,

$$G(\lambda, x) = g_\lambda(x)$$

missä parametriryhmä $\Lambda \subset \mathbb{R}$ on väli ja $g_\lambda: I \rightarrow I$ on jatkuva funktio jokaisella $\lambda \in \Lambda$.

Esimerkki 8.1. (1) Olkoon $\mu > 0$. Kuvaus $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

on logistinen funktio parametrilla μ . Logistinen perhe on sileä: Kuvaus $(\lambda, x) \mapsto \mu x(1 - x)$ on äärettömän monta kertaa derivoituva.

(2) Luvussa 7 määritellyt telttafunktiot muodostavat kuvausperheen $(T_\lambda)_{\lambda > 0}$.

Tässä luvussa tarkastelemme, miten parametrisoidun perheen kuvausten dynamiikka voi muuttua parametrin muuttuessa. Keskitymme Logistisen perheen tarkasteluun.

Esimerkki 8.2. Samalla tavalla kuin telttakuvausten tilanteessa voidaan osoittaa, että jokaisella parametrilla $\mu > 4$ logistisen funktion F_μ rajoittuma epälineaariseen Cantorin joukkoon

$$K'_\mu = [0, 1] - \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_\mu^k)^{-1} \left(\left] \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}} \right[\right)$$

on topologisesti konjugaatti vasemman siirron $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kanssa. Dynamiikka joukon K'_μ komplementissa on hyvin vakaata ja yksinkertaista. Katso esimerkiksi [Dev, §1.5]. Epälineaariset Cantorin joukko K'_μ on homeomorfinen tavallisen Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon kanssa vaikka sen konstruktio ei ole yhtä säännöllinen.

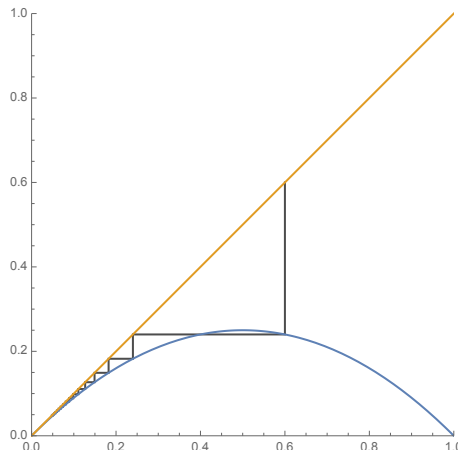
Harjoituksissa osoitettiin, että $F_4: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ on kaoottinen

Tarkastellaan logististen kuvausten perhettä $(F_\mu)_{1 \leq \mu < 4}$. On helppo tarkastaa, että kaikille $x \in \mathbb{R} - [0, 1]$ pätee $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$, kun $n \rightarrow \infty$, joten kaikki mielenkiintoinen dynamiikka tapahtuu yksikköväliä. Kun $1 \leq \mu \leq 4$, kuvauksen F_μ maksimi toteuttaa

$$0 \leq \max_{x \in [0, 1]} F_\mu(x) = F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1$$

ja voimme rajoittua tarkastelemaan dynaamista systeemiä $F_\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

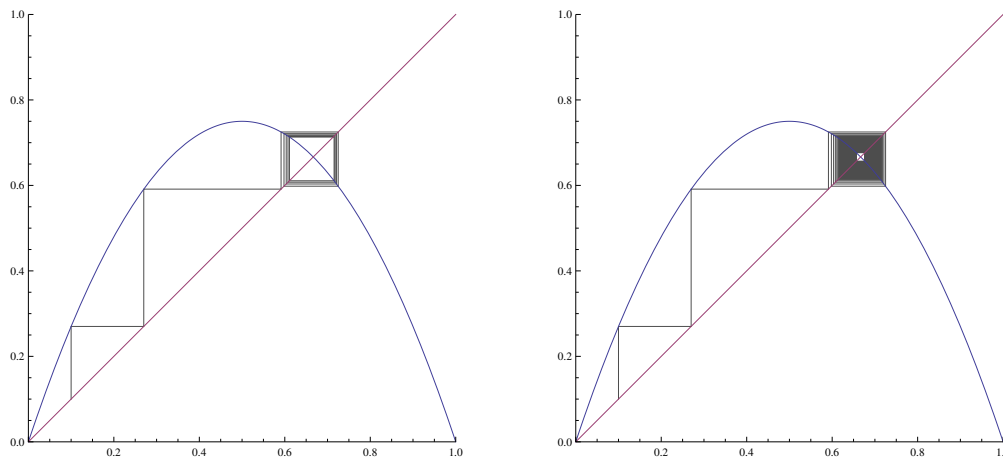
On helppo tarkastaa, että 0 on kuvauksen F_1 epämääräinen kiintopiste. Se hylkii negatiivisia lukuja ja vetää puoleensa kaikkia yksikkövälin pisteitä.



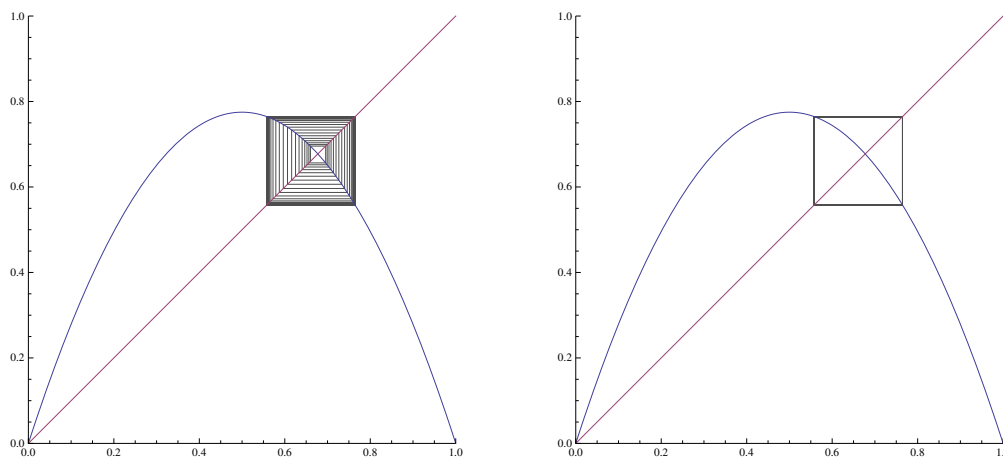
Kuvauksella F_μ on kaksi kiintopistettä 0 ja $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, kun $\mu > 1$. Kun $\mu > 1$, niin 0 on hylkivä kiintopiste. Toinen kiintopiste p_μ on Proposition 1.4 nojalla puoleensavetävä kiintopiste, kun $1 < \mu < 3$ koska tällöin

$$|F'_\mu(p_\mu)| = |\mu - 2\mu p_\mu| = |2 - \mu| < 1.$$

Kun $\mu = 3$, $F'_\mu(p_\mu) = -1$ ja osoittautuu, että $p_3 = \frac{2}{3}$ on puoleensavetävä koko avoimella yksikköväliä. Nyt se ei kuitenkaan vedä pisteitä puoleensa eksponentiaalisella nopeudella vaan huomattavasti hitaammin. Alla oleva kuva näyttää graafisen analyysin ensimmäiset 10 iteraatiota ja ensimmäiset 500 iteraatiota.*



Kun $\mu > 0$, niin $|F'_\mu(p_\mu)| > 1$, joten p_μ on hylkivä. Tämän huomaa myös graafisella analyysillä. Vasen kuva näyttää 500 ensimmäistä iteraatiota alkuarvolla $x = 0.66$, joka on lähellä kiintopistettä ja oikeanpuoleinen kuva näyttää iteraatiot 450-500. Radat lähestyvät

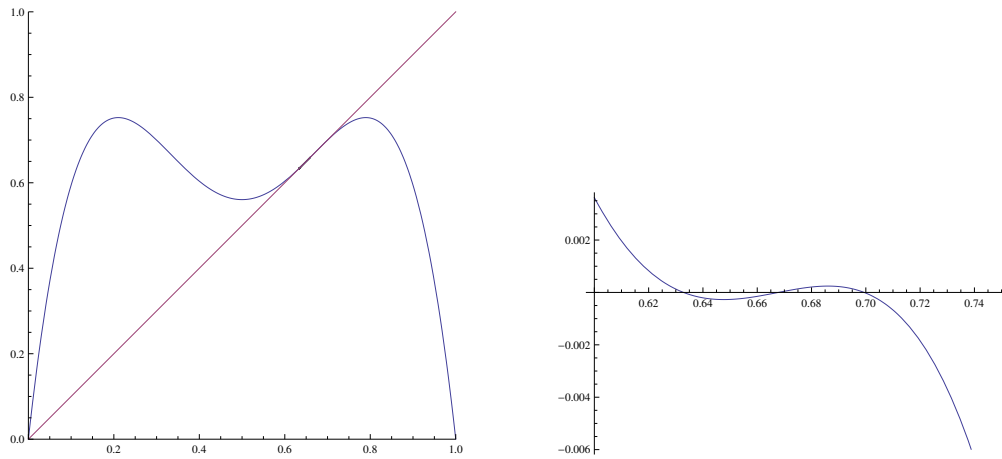


nyt puoleensavetävää rataa, jonka jakso on 2. Tätä ilmentävät myös kuva funktion f^2 graafista ja erotuksesta $f^2 - \text{id}$ (Kuva 17).

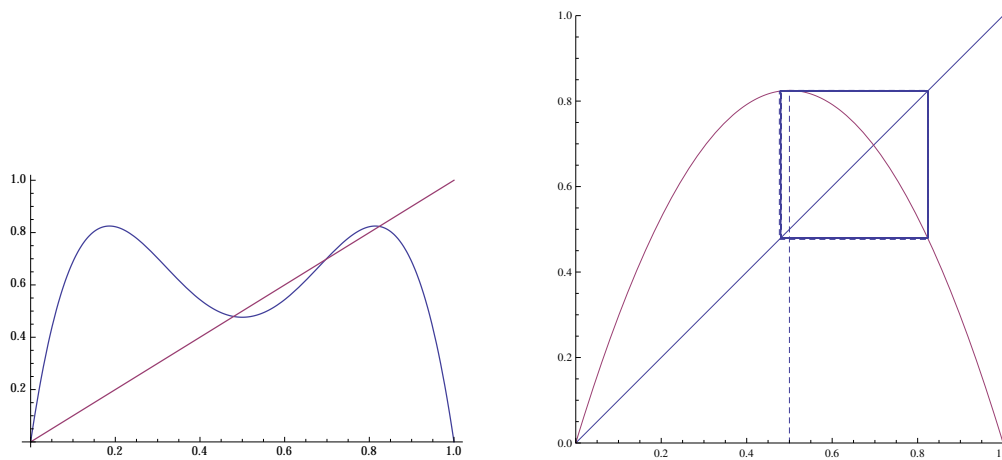
Kun parametria μ kasvatetaan edelleen, dynamiikka säilyy luonteeltaan samanlaisena. Kuva 18 esittää tilannetta, kun $\mu = 3.3$.

Kun $\mu = 1 + \sqrt{6} \approx 3.4495$, ensimmäisten iteraatioiden perusteella näyttää, että dynamiikka on muuttunut, mutta jos jätämme radan alkuosan pois ja tarkastelemme vain iteraatioita 4950 – 5000, havaitsemme, että systeemillä näyttäisi olevan edelleen puoleensavetävä rata, jonka jakso on 2. Lasku osoittaa, että tällainen rata koostuu pisteistä

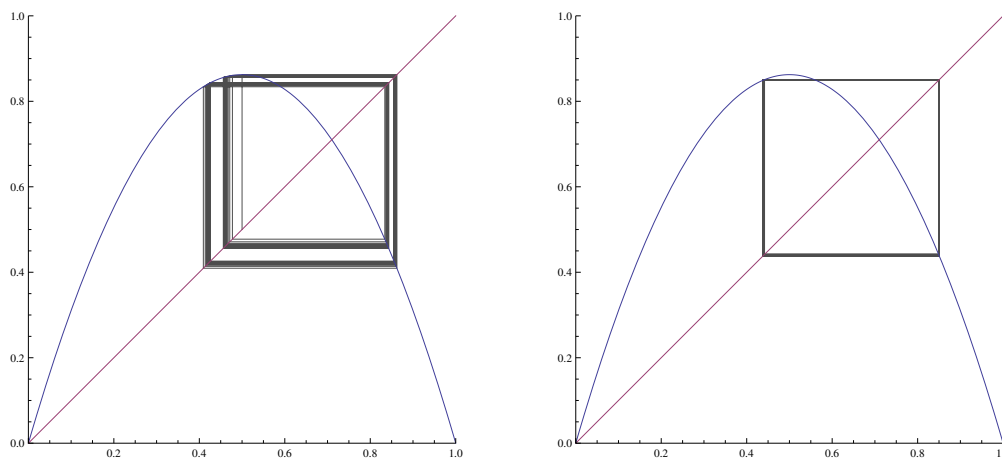
*Nämä kuvat on tuotettu Mathematicalla. Logistisen kuvauksen graafinen analyysi on toteutettu hyvin Wolfram Demonstrations Projectin sivulla <http://demonstrations.wolfram.com/TrajectoriesOfTheLogisticMap/>.



KUVA 17. Funktion $F_{3,1}$ toinen iteraatti.



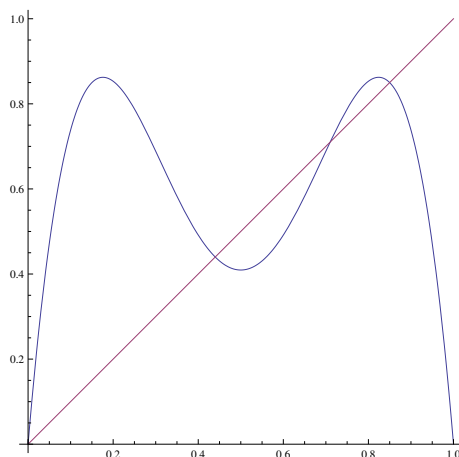
KUVA 18. $\mu = 3.3$.



KUVA 19. $\mu = 1 + \sqrt{6}$.

$1/10(4 + \sqrt{6} \pm \sqrt{14 - 4\sqrt{6}})$, joissa $(F_\mu^2)' = -1$, joten rata ei ole vahvasti puoleensavetävä, mikä on yhteensopiva edellä tekemämme havainnon kanssa.

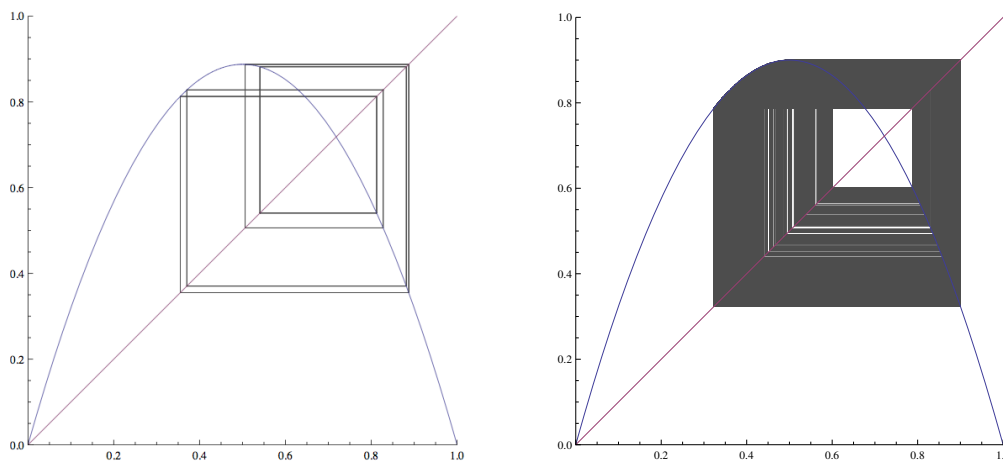
Kun parametria μ kasvatetaan edelleen, ilmestyy 4-jaksollinen puoleensavetävä rata. Näillä parametreilla kuvauksella F_μ on edelleen myös kiintopiste ja 4-jaksolliseen rataan sisältymätön 2-jaksollinen rata, jotka ovat nyt kuitenkin hylkiviä. Parametrilla



KUVA 20. Kuvauksen $F_{\mu=1+\sqrt{6}}$ toinen iteraatti.

$\mu \approx 3.5440903596$ 4-jaksoinen rata muuttuu hylkiväksi ja ilmestyy puoleensavetävä 8-jaksollinen rata. Parametrilla $\mu = 3.55$ 8-jaksollinen puoleensavetävä rata erottuu hyvin. Mutta mitä on tapahtunut parametrilla $\mu = 3.6$? Molemmissa kuvissa on jätetty alusta noin 5000 iteraatiota huomioimatta.

Osoittautuu, että on ääretön kasvava parametrijono $(\mu_k)_{k=0}^\infty = 1, 3, 1 + \sqrt{6}, \dots$, jolla on se ominaisuus, että kuvauksella F_μ on puoleensavetävä 2^k -jaksollinen rata, kun $\mu_{k-1} < \mu \leq \mu_k$. Lisäksi kuvauksella F_μ on 2^ℓ -jaksollinen hylkivä rata jokaisella $0 \leq \ell < k$. Tätä hallittua logistisen funktion dynamiikan monimutkaistumista parametrin kasvaessa kutsutaan *jakson kaksinkertaistavaksi sarjaksi* bifurkaatioita. Jono $(\mu_k)_{k=0}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $\mu_\infty \approx 3.58$



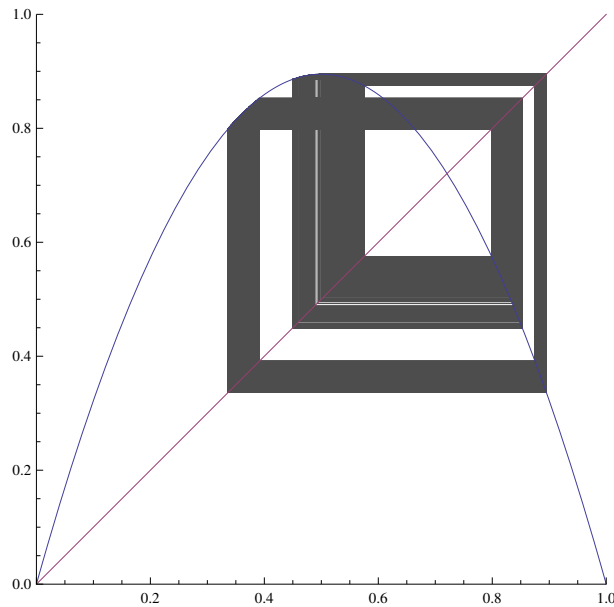
KUVA 21. $\mu = 3.55$ ja $\mu = 3.6$

Saamme melko hyvän kuvan dynamiikan kehittymisestä piirtämällä *bifurkaatiokaavion*, joka perustuu seuraavaan havaintoon.

Propositio 8.3. *Jos kuvauksella F_μ on puoleensavetävä jaksollinen rata, niin kriittinen piste $\frac{1}{2}$ sisältyy sen vakaaseen joukkoon.*

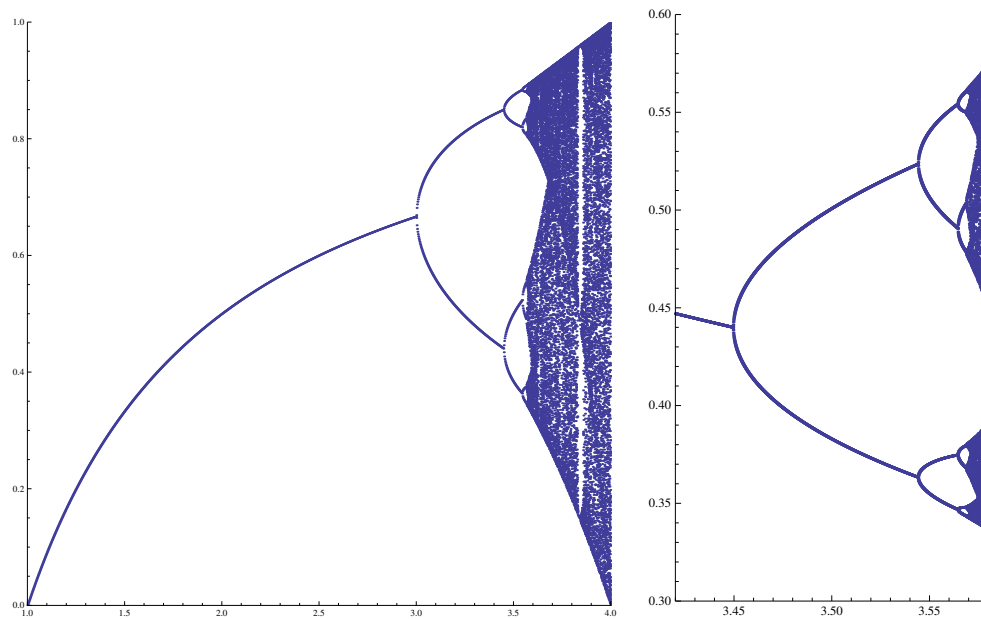
Seuraus 8.4. *Kuvauksella $F_\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ on korkeintaan yksi puoleensavetävä rata.* \square

Bifurkaatiodiagrammin muodostamiseksi lasketaan tasavälisesti valituille parametriarvoille $\mu \in [0, 4]$ funktion F_μ kriittisen pisteen rataa melko pitkälle. Jos kuvauksella F_μ on



KUVA 22. $\mu = 3.58 \approx \mu_\infty$

kohtuullisen mittainen puoleensavetävä rata, niin pisteet $F_\mu^k(\frac{1}{2})$ ovat lähellä tätä rataa, kun k on riittävän suuri Proposition 8.3 nojalla. Piirretään useita peräkkäisiä pisteitä $F_\mu^k(\frac{1}{2})$ kriittisen pisteen radasta ”riittävän suurilla” k . Tällöin puoleensavetävä rata näkyy bifurkaatiokaaviossa, olettaen tietenkin, että pyöritykset eivät aiheuta mainittavia laskuvirheitä.



KUVA 23. Logistisen perheen bifurkaatiokaavio, kun $\mu \in [1, 4]$ ja yksityiskohta.

Proposition 8.3 todistuksessa käytetään Schwarzin derivaattaa: Kolme kertaa derivoituvan funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Schwarzin derivaatta on

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2,$$

jos $f'(x) \neq 0$.

Lemma 8.5. Jos f, g ovat sileitä ja $Sf, Sg < 0$, niin $S(f \circ g) < 0$.

Todistus. Seuraa ketjusäännöstä. □

Lemma 8.6. Jos $Sf < 0$, niin funktiolla f' ei ole positiivista lokaalia minimiä eikä negatiivista lokaalia maksimia.

Todistus. Jos $f''(y_0) = 0$, niin $Sf(y_0) = \frac{f'''(y_0)}{f'(y_0)} < 0$. Jos y_0 on derivaatan maksimi, niin $f'''(y_0) < 0$, joten täytyy olla $f'(y_0) < 0$. □

Proposition 8.3 todistus. Olkoon $x_0 \in I$ puoleensavetävän p -jaksollisen radan piste ja olkoon[†]

$$J =]c, d[\subset W^s(x_0) \subset I$$

maksimaalinen avoin väli. Jos mikään väleistä $J, F_\mu(J), \dots, F_\mu^{p-1}(J)$ ei sisällä kriittistä pistettä, niin $F_\mu^p|_J$ on monotoninen.

Oletetaan, että $F_\mu^p|_J$ on kasvava. Tällöin päätepisteet c ja d ovat p -jaksollisia koska ne eivät sisälly vakaaseen joukkoon. Oletuksen mukaan $0 < (F_\mu^p)'(x_0) < 1$ ja suljetulla välillä $[c, d]$ ei ole muita kuvauksen F_μ^p kiintopisteitä kuin x_0 . Koska F_μ^p kuvaa välin J itselleen, väliarvolauseen nojalla on pisteet $c < c' < x_0 < d' < d$, joissa $(F_\mu^p)'(c') = (F_\mu^p)'(d') = 1$. Muuten nimittäin väli $F_\mu(J)$ olisi liian lyhyt. Koska $SF_\mu(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$ kaikilla $x \neq \frac{1}{2}$ niin Lemmojen 8.5 ja 8.6 nojalla funktion F_μ^p derivaatalla ei ole positiivista lokaalia minimiä. Siis sillä on oltava nollakohta y_0 välillä $[c', d']$. Ketjusäännön mukaan

$$0 = (F_\mu^p)'(y_0) = \prod_{k=0}^{p-1} F'_\mu(F_\mu^k(y_0)),$$

joten pisteen y_0 rata sisältää funktion F_μ kriittisen pisteen.

Toinen tapaus todistetaan samaan tapaan tarkastelemalla kuvausta F_μ^2 . □

Harjoitustehtäviä.

8.1. Osoita, että logistisella kuvauksella F_μ on puoleensavetävä 2-jaksollinen rata, kun $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Kuvaile tämän radan vakaata joukkoa. Millaisen joukon muodostavat ne pisteet $x \in [0, 1]$, joille on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $F_\mu^N(x) = p_\mu$?

8.2. Todista Lemma 8.5.

[†]Muista vakaan joukon $W^s(x_0)$ määritelmä luvusta 1.

Metrisiä avaruuksia käsitellään laajemmin omalla kurssillaan. Tässä valitsemme teoriasta vain tarpeelliset osat. Hyviä lähteitä itseopiskeluun ovat esimerkiksi [Väi], [Pit].*

Olkoon $X \neq \emptyset$. Kuvaus $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ on *etäisyysfunktio* eli *metriikka* joukossa X , jos sillä n seuraavat ominaisuudet

- $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys), ja
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on *metrinen avaruus*.

Metriikka on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden \mathbb{R}^n euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d_E(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on.

Esimerkki A.1. Metrisiä avaruuksia ovat esimerkiksi seuraavat:

- (1) Euklidinen metrinen avaruus (\mathbb{R}^n, d_E) .
- (2) Olkoon X epätyhjä joukko. *Diskreetti metriikka* δ joukossa X määritellään asettamalla

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \neq b \\ 0, & \text{jos } a = b. \end{cases}$$

Pari (X, d) on *diskreetti metrinen avaruus*.

- (3) Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) tuloavaruudessa $X \times Y$ on erilaisia ”luonnollisia” metriikoita: Jokaiselle $p \geq 1$ määritellään metriikka

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p}.$$

Lisäksi maksimimetriikka

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on myös usein käyttökelpoinen.

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r > 0$. Joukko

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

on *r-säteinen avoin pallo* ja

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

on *r-säteinen suljettu pallo*. Avaruuden X osajoukko on *avoin*, jos se voidaan esittää avoimien pallojen yhdisteenä ja *suljettu*, jos sen komplementti on avoin.

Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in X_1$, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x_0), F(x)) < \epsilon$ kaikilla $x \in X_1$, joille $d_1(x_0, x) < \delta$. Kuvaus on *jatkuva*, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Kuvaus F on *K-Lipschitz -jatkuva* vakiolla $K > 0$, jos kaikille $x, y \in X$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) \leq K d_1(x, y).$$

Cauchyn jonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa. Metrinen avaruus X on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

*Lähde [Pit] on laillisesti skannattuna archive.org-internetkirjastossa.

Kokoelma $(U_j)_{j \in J}$ on joukon B peite, jos $B \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ ja se on avoin peite, jos joukot U_j ovat avoimia. Peite on äärellinen, jos indeksijoukko J on äärellinen. Jos $J' \subset J$, niin peite $(U_j)_{j \in J'}$ on peitteen $(U_j)_{j \in J}$ alipeite.

Metrisen avaruuden X osajoukko A on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen alipeite. Joukko A on jonokompakti, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä. Metrisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti. Heinen ja Borelin lause, jonka mukaan euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu, ei päde yleisesti.

Esimerkki A.2. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu väli. Välillä I määriteltyjen jatkuvien kuvausten $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektoriavaruus $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksiminormilla

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrisen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Tämä seuraa kurssilla Sarjat ja Approksimointi/Analyysi 3 todistettavasta tuloksesta, jonka mukaan tasaisesti suppeneva jono jatkuvia funktioita suppenee kohti jatkuvaa funktioita.

Metrisen avaruus (X, d) on ultrametrisen avaruus, jos kolmioepäyhtälöä vahvempi epäyhtälö

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

pätee kaikille $x, y, z \in X$. Diskreetti metrisen avaruus

Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on isometrinen upotus, jos kaikille $x, y \in X_1$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) = d_1(x, y).$$

Jos isometrinen upotus on bijektio, niin se on isometria. Jos $G: (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$ on isometrinen upotus, niin $G \circ F$ on isometrinen upotus.

Esimerkki A.3. (1) Olkoon $b \in \mathbb{R}^n$. Kuvaus $x \mapsto x + b$ on euklidisen avaruuden (\mathbb{R}^n, d_E) isometria.

(2) Ortogonaalinen $n \times n$ -matriisi A määrää isometrian $x \mapsto Ax$ euklidisessä avaruudessa (\mathbb{R}^n, d_E) ja pallon pinnalla (\mathbb{S}^{n-1}, d_E) .

Metrisen avaruus X on separoituva, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko. Esimerkiksi $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, $\mathbb{S}^1 = \overline{\{[q] : q \in \mathbb{Q}\}}$, joten nämä metriset avaruudet ovat separoituvia. Kaikki kompaktit metriset avaruudet ovat separoituvia. Toisaalta, jos Y on ylinumeroituva joukko varustettuna diskreetillä metriikalla $d(a, b) = 1$ kaikilla $a \neq b$, niin Y ei ole separoituva.

Piste $x \in X$ on eristetty, jos $B(x, r)$ on äärellinen joukko jollain $r > 0$. Esimerkiksi kaikkien diskreettien metristen avaruuksien kaikki pisteet ovat eristettyjä.

Harjoitustehtäviä.

A.1. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

A.2. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

Olkoon X ultrametrisen avaruus.

A.3. Osoita, että kaikille $y \in B(x, r) \subset X$ pätee $B(y, r) = B(x, r)$.

A.4. Osoita, kaikki avaruuden X pallot ovat avoimia ja suljettuja

A.5. Osoita, että Heinen ja Borelin lauseen väite ei päde äärettömässä diskreetissä metrisessä avaruudessa.

A.6. Osoita, että Heinen ja Borelin lauseen väite ei ole voimassa metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^n - \{0\}, d_E)$.

A.7. Osoita, että kompaktit metriset avaruudet ovat separoituvia.

VIITTEET

- [Ben] F. Benford. The law of anomalous numbers. *Proc. Amer. Phil. Soc.*, 78:551–572, 1938.
- [BS] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Con] J. H. Conway. On unsettleable arithmetical problems. *Amer. Math. Monthly*, 120(3):192–198, 2013.
- [Dev] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.
- [HK] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [HY] J. G. Hocking and G. S. Young. *Topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1961.
- [Pit] C. G. C. Pitts. *Introduction to metric spaces*. Oliver & Boyd [Longman Group Ltd.], Edinburgh, 1972. <https://archive.org/details/IntroductionToMetricSpaces>.
- [Väi] J. Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2007.