Johdatus dynaamisiin systeemeihin 2022

Harjoitus 4: ratkaisuja

1. Osoita, että kuvaus F_N on jatkuva surjektio.

Ratkaisu. Kuvaus F_N on surjektio, koska jokainen reaaliluku $x \in [0,1]$ voidaan esittää kannassa N sarjana $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{N^{i+1}}$, $a_k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$.

Jos $d(\omega,\omega') = 2^{-K}$, niin $\omega(0) = \omega'(0),\ldots,\omega(K-1) = \omega'(K-1)$. Siis

$$|F_N(\omega) - F_N(\omega')| \leqslant \Big|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_k}{N^{i+1}} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_k}{N^{i+1}}\Big| \leqslant \sum_{i=K+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} \leqslant N^{-K} \leqslant 2^{-K}\,,$$

joten F_N on 1-Lipschitz-kuvaus.

2. Olkoon $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ ympyrän parametrisointi, joka määriteltiin luvun 3 alussa ja olkoon $E_N\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ kulman N-kertaistava kuvaus. Osoita, että

$$E_N \circ \Phi \circ F_N = \Phi \circ F_N \circ \sigma\,.$$

Ratkaisu. Katso Esimerkki 4.6.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(a) Osoita, että kuvaus $f|_{]1,\infty[}\colon]1,\infty[\to]1,\infty[$ riippuu herkästi alkuarvoista.

(b) Osoita, että kuvaus $f|_{]0,1[}\colon]0,1[\to]0,1[$ ei riipu herkästi alkuarvoista.

Ratkaisu. (a) Olkoot $1 \leqslant x < y$. Tällöin

$$f^k(y) - f^k(x) = y^{2k} - x^{2k} = (y^2 - x^2)\sum_{i=0}^{k-1} y^{2i}x^{2(k-1-i)} \geqslant k(y^2 - x^2) \to \infty\,,$$

kun $k \to \infty$.

(b) Kaikille $0 < x < 1$ pätee $f^k(x) = x^{2k} \to 0$, kun $k \to \infty$.

4. Osoita, että herkkä riippuvuus alkuarvoista ei välttämättä säily konjugoinnissa.

Ratkaisu. Kuvaus $s\colon]0,1[\to]1,\infty[$, $s(x) = \frac{1}{x}$, on homeomorfismi, jolle pätee

$$f \circ s(x) = (\frac{1}{x})^2 = \frac{1}{x^2} = s \circ f(x)\,.$$

5. Todista Proposition 6.13 kohdat (2) ja (3).

Ratkaisu. (2) Olkoon $x \in X$ piste, jonka rata on tiheä. Olkoon $V \subset Y$ avoin joukko, joka ei ole tyhjä. Joukko $\widetilde{V} = s^{-1}(V)$ on avoin, koska s on jatkuva ja se ei ole tyhjä, koska s on surjektio. Siis on $k \in \mathbb{N}$, jolle $f^k(x) \in U$. Tällöin $g^k(s(x)) = s(f^k(x)) \in s(\widetilde{V}) = V$. Siis pisteen $s(x)$ rata on tiheä.

(3) Olkoot $U, V \subset Y$ avoimia joukkoja, jotka eivät ole tyhjiä. Tällöin joukot $\widetilde{U} = s^{-1}(U)$ ja $\widetilde{V} = s^{-1}(V)$ on avoimia, koska s on jatkuva ja ne eivät ole tyhjiä, koska s on surjektio. Koska f on sekoittava, on $N \in \mathbb{N}$, jolle $f^k(\widetilde{U}) \cap \widetilde{V} \neq \varnothing$ kaikilla $k \geqslant N$. Tällöin

$$g^k(U) \cap V = g^k(s(\widetilde{U})) \cap V = s(f^k(\widetilde{U})) \cap s(\widetilde{U}) \supset s(f^k(\widetilde{U}) \cap \widetilde{V}) \neq \varnothing\,.$$

6. Olkoot $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Osoita, että kierto $R_{k\,\alpha}$ on kierron R_α topologinen tekijä.

Ratkaisu. Olkoon $x \in \mathbb{S}^1$. Tällöin

$$E^k \circ R_\alpha(x) = E_k(x+\alpha) = k(x+\alpha) = kx + k\alpha = R_{k\alpha} \circ E_k(x)\,.$$