Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 2022

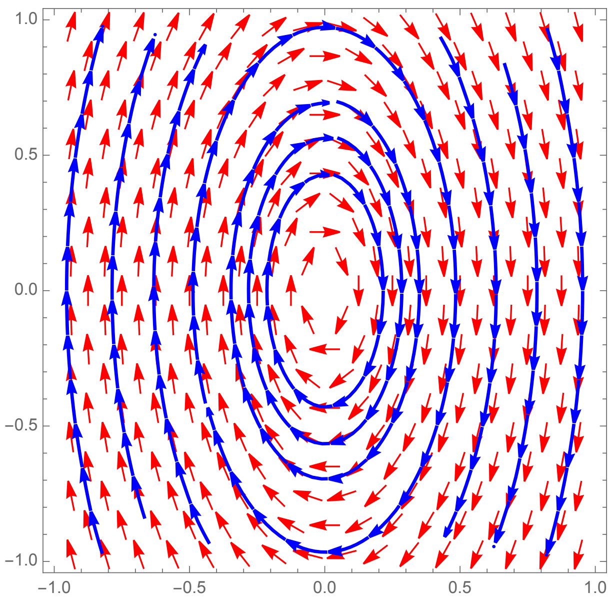
Harjoitus 3: ratkaisuja

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin

$$(-\lambda)(-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 4$$

juuret $\lambda = \pm 2i$. Origo on keskus, koska matriisilla A on kaksi puhtaasti imaginaarista ominaisarvoa.

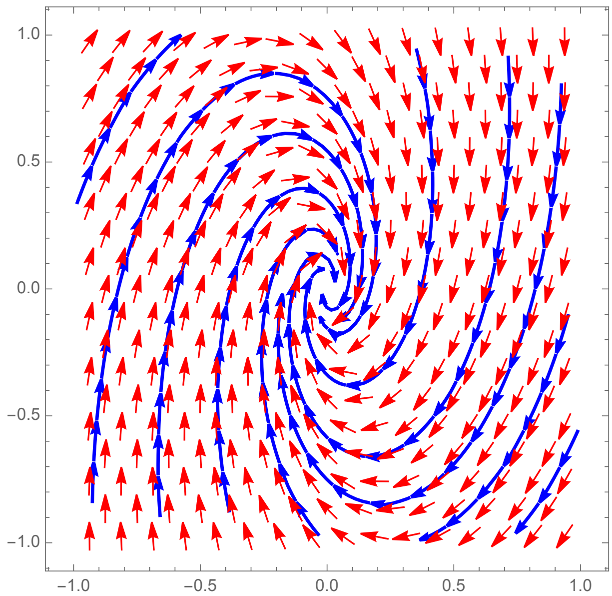


2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

juuret $\lambda = -1 \pm 2i$. Origo on spiraalinielu, koska matriisilla A on kaksi imaginaarista ominaisarvoa, joiden reaaliosa on negatiivinen.



3. Olkoon
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ tyyppi kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Kuvaile, mitä tapahtuu niissä parametriavaruuden $\mathbb{R}$ pisteissä, joissa tyyppi vaihtuu. Havainnollista kuvilla.

Ratkaisu. Matriisin A_α ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin
$$(\alpha - \lambda)(-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \alpha\lambda + 4$$
juuret $\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$. Ominaisarvot ovat reaalisia, jos ja vain jos $|\alpha| \geqslant 4$. Matriisilla A_α

- on kaksi negatiivista reaalista ominaisarvoa, jos $\alpha < -4$. Tällöin 0 on nielu.
- kaksinkertainen negatiivinen ominaisarvo -2, kun $\alpha = -4$. Tällöin 0 on surkastunut nielu.
- kaksinkertainen positiivinen ominaisarvo 2, kun $\alpha = 4$. Tällöin 0 on surkastunut lähde.
- on kaksi positiivista reaalista ominaisarvoa, jos $\alpha > 4$. Tällöin 0 on lähde.
- kaksi kompleksisia ominaisarvoa, joiden reaaliosa $\frac{\alpha}{2}$ on negatiivinen, jos $-2 < \alpha < 0$. Tällöin 0 on spiraalinielu.
- kaksi kompleksisia ominaisarvoa, joiden reaaliosa $\frac{\alpha}{2}$ on positiivinen, jos $0 < \alpha < 2$. Tällöin 0 on spiraalilähde.
- Ominaisarvot $\pm 2i$, jos $\alpha = 0$. Tällöin 0 on keskus.

4. Miten alkuarvotehtävän (3.7) ratkaisut käyttäytyvät, jos $b < 0$ ja $m, k > 0$?

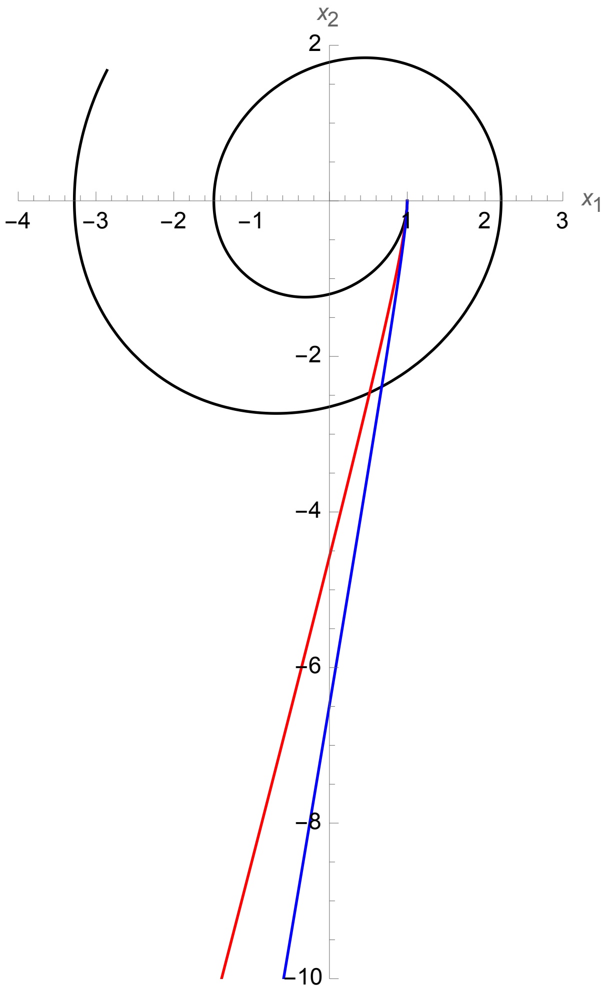
Ratkaisu. Differentiaaliyhtälön
$$\dot{y} = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{pmatrix} y\,.$$

kerroinmatriisin A ominaisarvot ovat

$$\lambda_\pm = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

Oletetaan, että $b < 0$ ja $m, k > 0$. Tällöin ratkaisun käyttäytyminen riippuu diskriminantin $b^2 - 4km$ merkistä.

- Jos $b^2 > 4km$, niin matriisilla A on kaksi positiivista ominaisarvoa ja origo on lähde.
- Jos $b^2 = 4km$, niin matriisilla A on yksi positiivista ominaisarvo $-\frac{b}{2m}$. Sitä vastaavan ominaisavaruuden
$$E_{-\frac{b}{2m}} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -\frac{b}{2m} y_1 \right\}$$
yhtälö on sama kuin tapauksessa $b > 0$.
- Jos $b^2 < 4km$, niin matriisilla A on kaksi kompleksista ominaisarvoa, joiden reaaliosa on positiivinen. Tällöin 0 on spiraalilähde.



Kuvassa $k = m = 1$.

- Musta käyrä kuvaa spiraalilähderatkaisua ($b = -\frac{1}{4}$).
- Punainen käyrä kuvaa kriittistä ratkaisua, jossa origo on surkastunut lähde ($b = -4$).
- Sininen käyrä kuvaa ratkaisua, jossa origo on lähde ($b = -6$).

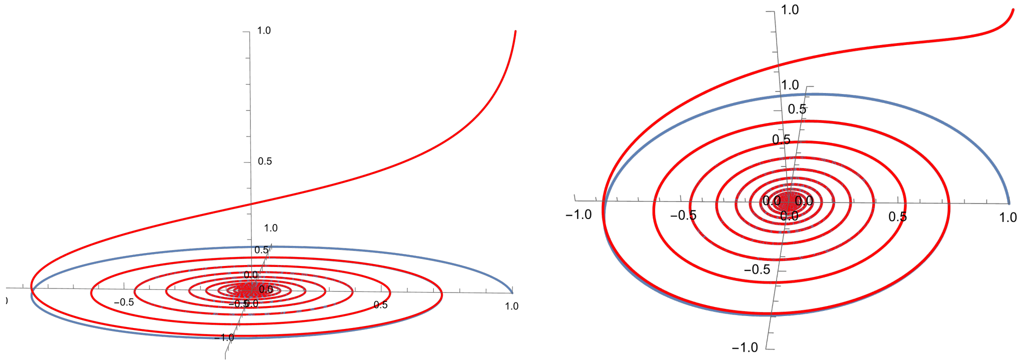
5. Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (2,0,1)\ . \end{cases}$

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin
$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$
juuret $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ ja $\lambda = 3$. Esimerkiksi Gaussin ja Jordanin menetelmällä $E_1 = \langle(0,-2,1)\rangle$, $E_2 = \langle(1,1,0)\rangle$, $E_3 = \langle(2,2,1)\rangle$. Matriisi
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\right)$$
antaa kannanvaihdon, jolla A diagonalisoituu. Kannanvaihtolemman nojalla alkuarvotehtävän ratkaisu on
$$\begin{aligned} y(t) &= C \exp \operatorname{diag}(t, 2t, 3t)\, C^{-1} y_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2(e^{2t} - e^t) \\ e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Huomaa, että $(2,0,1) = (0,-2,1) + 2(1,1,0)$.

6. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytyminen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Piirrä kuvia.

Ratkaisu. Tämä tehtävä yleistää Esimerkin 4.9. Kuvaus
$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(a\cos t + b \sin t) \\ e^{\alpha t}(-a \sin t + b \cos t) \\ ce^t \end{pmatrix}$$
on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Jos $\alpha = 0$, niin ratkaisut pysyvät yhtälön $x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2$ määräämällä sylinterillä tai suoralla. Ratkaisu kiertää sylinterin akselin ympäri tasaisella kulmanopeudella. Jos alkuarvo on tasossa $_3 = 0$, niin ratkaisu parametrisoi ympyrän tai on vakioratkaisu $x = 0$. Jos $\alpha \neq 0$ ja alkuarvo on tasossa $x_3 = 0$, niin ratkaisu on spiraalilähde tai spiraalinielu tasossa $x_3 = 0$. Jos alkuarvo ei ole tasossa $x_3 = 0$ ja $\alpha < 0$, niin ratkaisu lähestyy x_3-akselia, kun $t \to \infty$ ja tapauksen $x_3 = 0$ spiraalia, kun $t \to -\infty$. Jos alkuarvo ei ole tasossa $x_3 = 0$ ja $\alpha > 0$, niin ratkaisu etääntyy lähestyy x_3-akselista, spiraalimaisesti ja tasosta $x_3 = 0$ eksponentiaalisesti, kun $t \to \infty$ ja suppenee origoon, kun $t \to -\infty$.



Kuva esittää ratkaisuja alkuarvoilla $x(0) = (1, 0, 0)$ ja $x(0) = (1, 0, 1)$ *negatiivisilla ajoilla*, kun $\alpha = \frac{1}{20}$.