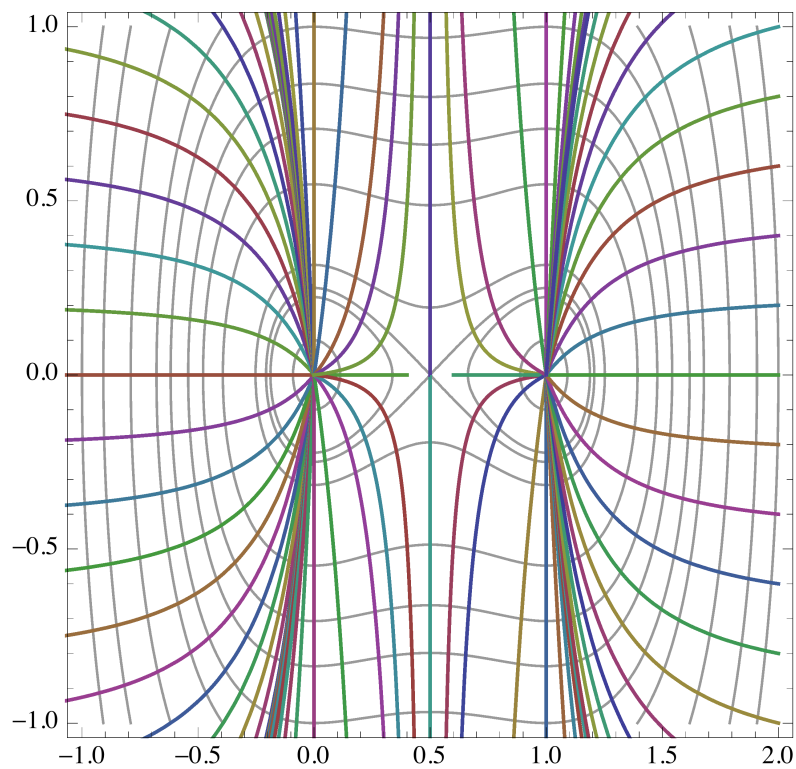

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi



JOUNI PARKKONEN

LUENTOJA JYVÄSKYLÄN YLIOPISTOSSA

SYKSYLLÄ 2019

Sisältö

I

1	Differentiaaliyhtälöt	1
1.1	Ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöt	1
1.2	Korkeamman asteen yhtälöistä	3
1.3	Vektorikentät ja autonomiset yhtälöt	4
1.4	Ratkaisujen olemassaolosta	6
	Harjoitustehtäviä	9
2	Lineaariset autonomiset yhtälöt ja matriisien eksponenttifunktio	11
2.1	Lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt	11
2.2	Matriisien normiavaruus	12
2.3	Matriisien eksponenttifunktio	14
2.4	Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisut	16
2.5	Muuttujanvaihtolemma	18
2.6	Ratkaisujen vektoriavaruus	19
	Harjoitustehtäviä	20
3	Tason lineaariset autonomiset alkuarvotehtävät	23
3.1	2×2 -matriisien luokittelu	23
3.2	Esimerkki muuttujanvaihtolemmän käytöstä	25
3.3	Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit	27
3.4	Parametrisoituja perheitä	30
	Harjoitustehtäviä	32
4	Lineaariset autonomiset alkuarvotehtävät korkeammassa ulottuvuudessa	35
4.1	Yleistetty ominaisavaruus	35
4.2	Blokkidiagonaalimatriisit	37
4.3	Jordanin kanoninen muoto	38
4.4	Mukautettu normi	42
	Harjoitustehtäviä	43
5	Epälineaariset differentiaaliyhtälöt	45

5.1	Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause	45
5.2	Jatkuva riippuvuus alkuarvosta	47
5.3	Maksimaalinen määrittelyväli	49
5.4	Vakion variointi	51
	Harjoitustehtäviä	53
6	Epälineaarisen yhtälön ratkaisusta	55
6.1	Tason yhtälön ratkaisukäyrien etsiminen separoimalla	55
6.2	Tasapainopisteen vakaus	57
6.3	Linearisointi	58
6.4	FitzHughin ja Nagumon yhtälö.	61
	Harjoitustehtäviä	64
II		67
7	Differentiaaliyhtälön virtaus	69
7.1	Lineaarisen yhtälön virtaus	69
7.2	Virtaus	70
7.3	Rajajoukot	72
7.4	Rataekvivalenssi	75
	Harjoitustehtäviä	79
8	Hyperbolisista tasapainopisteistä	81
8.1	Lineaarisen yhtälön vakaudesta	81
8.2	Hyperbolisen tasapainopisteen vakaudesta	83
8.3	Grobmanin ja Hartmanin lause	86
8.4	Vakaa ja epävakaa monisto	88
	Harjoitustehtäviä	89
9	Liapunovin menetelmä	91
9.1	Liapunovin funktio	91
9.2	Hamiltonin systeemit	92
9.3	Aito Liapunovin funktio	95
9.4	Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaate	97
9.5	Vakaista ja epävakaista monistoista	98
	Harjoitustehtäviä	99
10	Virtauksen sileys ja Peanon olemassaololause	103
10.1	Peanon olemassaololause	103
10.2	Gronwallin epäyhtälö	105
10.3	Lineaarinen epäautonominen yhtälö	106
10.4	Virtauksen sileys	108
	Harjoitustehtäviä	109
11	Ratkaisujen globaali käyttäytyminen	111
11.1	Ensimmäinen paluu aika ja Poincarén kuvaus	111
11.2	Tason systeemit	114

11.3 Poincarén ja Bendixsonin lause	115
11.4 Yleistetty Poincarén ja Bendixsonin lause	116
Harjoitustehtäviä	118
12 Korkeammista ulottuvuuksista	119
12.1 Attraktori	119
12.2 Lorenzin differentiaaliyhtälö	122
Harjoitustehtäviä	126
Harjoitustöitä	127
Liitteet	131
A Lineaarialgebraa	131
A.1 Ominaisarvot ja ominaisvektorit	131
A.2 Konjugointi ja diagonalisoituvuus	132
A.3 Kompleksista lineaarialgebraa	133
Harjoitustehtäviä	134
B Differentiaalilaskentaa	135
B.1 Napakoordinaatit	135
B.2 Tärkeitä lauseita	136
C Metriset avaruudet	137
C.1 Metriikka	137
C.2 Täydellinen metrinen avaruus	138
C.3 Arzelà ja Ascolin lause	139
C.4 Jordanin käyrälause	140
Harjoitustehtäviä	140
Kirjallisuutta	141

Tästä tekstistä

Tämä teksti sisältää syksyn 2019 kurssien Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 ja 2 materiaalin.

Ensimmäisellä jatkokurssilla tutustutaan differentiaaliyhtälöryhmien teoriaan erityisesti lineaaristen systeemien kautta. Tällä kurssilla myös todistetaan epälineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause ja aloitellaan epälineaaristen yhtälöiden ratkaisujen tarkastelua.

Jälkimmäinen kurssi on syventävämpää materiaalia. Tällä kurssilla tutustutaan epälineaaristen yhtälöiden kvalitatiiviseen teoriaan ja tarkastellaan ratkaisujen asymptoottista käyttäytymistä. Kurssin lopussa todistetaan Poincarén ja Bendixsonin lause, joka antaa melko tarkan kuvan tason systeemien käyttäytymisestä. Tällä kurssilla autonomisia differentiaaliyhtälöitä tarkastellaan tavalla, joka liittyy ne osaksi dynaamisten systeemien teoriaa.

Molemmilla kursseilla edellytetään differentiaali- ja integraalilaskennan ja lineaarialgebran osaamista tasolla, joka saavutetaan näiden alojen peruskursseilla. On myös hyvä osata tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä yksiulotteisessa tapauksessa. Jälkimmäisellä kurssilla käytetään joitain edistyneempiä metristen avaruuksien tuloksia mutta topologian kurssin tiedot eivät ole tälläkään kurssilla välttämätön esitieto.

Olen pyrkinyt havainnollistamaan käsiteltävää teoriaa runsailla esimerkeillä ja kuvituksella. Differentiaaliyhtälöitä käytetään esimerkiksi fysikaalisten ja biologisten ilmiöiden mallintamisessa. Käsittelemme joitain näiden sovellusalojen differentiaaliyhtälöitä esimerkkeinä matemaattisesti mielenkiintoisista ilmiöistä. Itse mallintaminen jätetään muille kursseille.

Tekstin lopussa olevassa lähdeluettelossa on monia kurssin materiaalia tukevia ja laajentavia lähteitä. Erityisesti näistä nousevat esille [Har2], [HSD], [Per] ja [Tes]. Näiden lisäksi suosittelen elokuvaa Chaos [LGA].

Merkintöjä

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.

Sisältö

- $f|_A$ kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.
- $C^0(X, Y)$ jatkuvien kuvausten $f: X \rightarrow Y$ avaruus.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.

Uusien käsitteiden **määritelmät** on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Tällaisessa laatikossa tehdään jokin tärkeä sopimus, nimetään jokin käsite siten, että kyseessä ei ole varsinainen matemaattinen määritelmä, tai tehdään muu huomio, jota halutaan korostaa.

Osa I

Luku 1

Differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tutustumme muutamiin esimerkkeihin erilaisista differentiaaliyhtälöistä ja niiden sovelluksista. Tutustumme terminologiaan ja autonomisten yhtälöiden geometriseen tulkintaan ja aloitamme myös hieman teoreettista tarkastelua.

1.1 Ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöt

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Tällä kurssilla merkintä $\dot{x}(t) = x'(t)$ tarkoittaa vektoriarvoisen differentioituvan kuvauksen $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}$, derivaattaa.

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja ja olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (jatkuva) kuvaus. **Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö^a** on yhtälö

$$\dot{x}(t) = f(x, t). \quad (1.1)$$

Siihen liittyvä **alkuarvotehtävä** on

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

joillain $x_0 \in U$ ja $t_0 \in I$.

^atai differentiaaliyhtälöryhmä

Jos funktio $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ kirjoitetaan komponenttifunktioiden avulla muodossa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)),$$

niin differentiaaliyhtälöryhmä (1.1) kirjoitettuna komponenteittain on

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Differentiaaliyhtälön muotoilussa kuvauksen f määrittelyjoukko jätetään usein hieman epämääräiseksi.

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja, olkoot $x_0 \in U$ ja $t_0 \in I$ ja olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (jatkuva) kuvaus. Differentiaaliyhtälön (1.1) **ratkaisu** alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ eli **alkuarvot tehtävän**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

ratkaisu on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ kaikilla $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$. Väli Δ on ratkaisun x **määrittelyväli**.

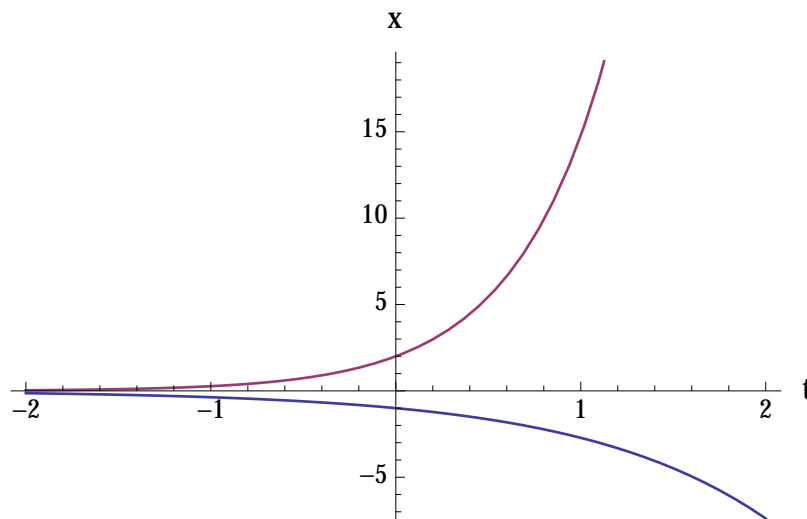
Parametriä t kutsutaan usein ajaksi ja differentiaaliyhtälön ajatellaan kuvaavan jonkin systeemin tilan x kehittymistä ajan kuluessa. Monissa esimerkiksi fysiikasta tai biologiasta tulevista differentiaaliyhtälöissä tilanne on juuri tämä.

Joissakin tapauksissa differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista täydellisesti niin, että ratkaisulle voidaan antaa täsmällinen lauseke. Tärkeimpänä esimerkkinä tällaisista systeemeistä tarkastelemme ensimmäisen kurssin alkupuolella lineaarisia autonomisia yhtälöitä.

Esimerkki 1.1 (Populaatiomalleja). Olkoot $\lambda, a \in \mathbb{R}$. Lineaarisen alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ x(0) = a \end{cases} \quad (1.4)$$

ratkaisu on $x(t) = ae^{\lambda t}$. Kuva näyttää ratkaisujen kuvaajat parametrien arvoilla $\lambda = a = 2$ ja $\lambda = 1, a = -1$.



Alkuarvotehtävän (1.4) ratkaisu voidaan määritellä koko reaaliakselilla. Tämä alkuarvotehtävä liittyy populaatioiden kehityksen varhaiseen mallintamiseen, tällöin t on aika ja x kuvaa populaation kokoa.

Malthusin lain mukaan populaation kasvuvauhti on suoraan verrannollinen populaation kokoon.

Verhulst korjasi Malthusin mallia ottamalla huomioon sen, että tarkasteltava ympäristö ei voi elättää rajattoman suurta populaatiota.

Verhulstin populaatiomallia kuvaa **logistinen differentiaaliyhtälö**

$$\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1.5)$$

joillain parametreilla $a, K > 0$.

Propositio 1.2. Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja, olkoot $x_0 \in U$ ja $t_0 \in I$ ja olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Kuvaus $x: \Delta \rightarrow U$ on alkuarvotehtävän (1.3) ratkaisu, jos ja vain jos se on integraaliyhtälön

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds .$$

ratkaisu.

Todistus. Seuraa Analyysin peruslauseesta.¹ □

1.2 Korkeamman asteen yhtälöistä

Esimerkki 1.3 (Harmoninen värähtelijä). Kiinnitetään ideaalinen jousi seinään toisesta päästään. Kiinnitetään jousen toiseen päähän pistemäinen paino, jonka massa on $m > 0$. Ajatellaan, että jousen liike on rajoitettu parametrillä x parametrisoidulle viivalle, jota pitkin sitä voi vetää tai painaa kokoon. Olkoon jousen pää pisteessä $x = 0$. Kun jousta venytetään tai painetaan kasaan, se vastustaa siirtymää voimalla $-kx$, missä $k > 0$ on **jousivakio**. Jousi aiheuttaa siis tarkasteltavalle painolle kiihtyvyyden yhtälöllä $m\ddot{x} = -kx$.

Differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} = -kx$$

on **harmonista värähtelijää** kuvaava toisen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö.

Harmonisen värähtelijän yhtälön rikoistapauksen $m = k = 1$

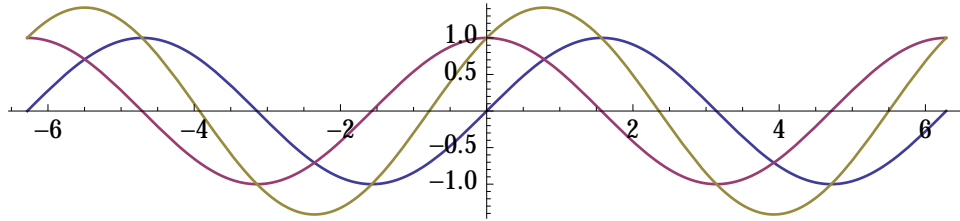
$$y''(t) + y(t) = 0 \quad (1.6)$$

kaikki ratkaisut saadaan funktioiden \sin ja \cos lineaarikombinaatioina. On helppo tarkastaa, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b, \end{cases} \quad (1.7)$$

¹Katso JMA.

on koko avaruudessa \mathbb{R} määritelty ratkaisu $y(t) = a \cos t + b \sin t$ jokaisella $a, b \in \mathbb{R}$.



Toisen kertaluvun differensiaaliyhtälö (1.6) voidaan muuntaa tason ensimmäisen kertaluvun differensiaaliyhtälöksi: Asetetaan $x_1 = y$ ja $x_2 = y'$. Tällöin siis yhtälö (1.6) on

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Matriisimuodossa alkuarvot tehtävä (1.7) on siis $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$, missä $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Yhtälön (1.7) ratkaisu on luettavissa edeltä:

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \end{pmatrix}.$$

Esimerkin 1.3 menettely yleistyy korkeamman kertaluvun differensiaaliyhtälöille: Olkoon $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Kertaluvun m differensiaaliyhtälö

$$y^{(m)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, t) \quad (1.8)$$

muunnetaan ensimmäisen kertaluvun differensiaaliyhtälöryhmäksi asettamalla $y_i = y^{(i)}$ jokaiselle $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Tällöin differensiaaliyhtälön (1.8) sijaan voidaan tutkia m yhtälön ryhmää

$$\begin{cases} \dot{y}_i = y_{i+1} \text{ kaikilla } 0 \leq i \leq m-2 \\ \dot{y}_{m-1} = f(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, t). \end{cases} \quad (1.9)$$

Asettamalla $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ ja $F(z, t) = (z_2, z_3, \dots, z_m, f(z, t))$, saadaan yhtälö (1.9) muotoon

$$\dot{z} = F(z, t).$$

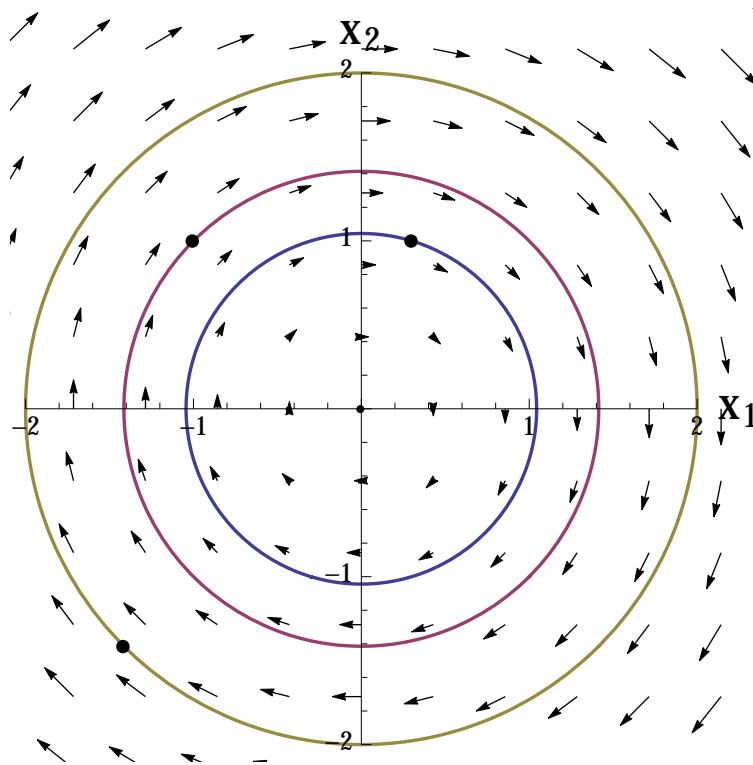
Propositio 1.4. *Olkoot f ja F kuten yllä. Funktio y on differensiaaliyhtälön (1.8) ratkaisu, jos ja vain jos kuvaus z on differensiaaliyhtälöryhmän (1.9) ratkaisu. \square*

1.3 Vektorikentät ja autonomiset yhtälöt

Jos differensiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan t arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois merkinnöistä.

Kuvauksen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ määräämä **autonominen differensiaaliyhtälö** on

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.10)$$



Kuva 1.1: Differentiaaliyhtälön (1.3) vektorikenttä $f(x) = Ax$ ja ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.3, 1)$, $x_0 = (-1, 1)$ ja $x_0 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva polku joukossa U , jonka tangenttivektori $\dot{x}(t)$ pisteessä $x(t)$ on vektorikentän f arvo pisteessä $x(t)$. Lisäksi polku kulkee pisteen x_0 kautta ja toteuttaa $x(t_0) = x_0$.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Kuvaus $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on **vektorikenttä** joukossa U .

Voimme itse asiassa aina olettaa, että differentiaaliyhtälö on autonominen:

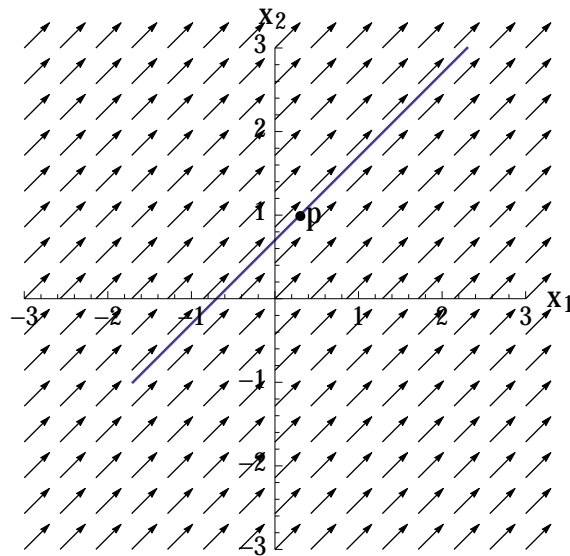
Propositio 1.5. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin. Olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva. Määritellään $x_{n+1} = t$. Kuvaus $t \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ on differentiaaliyhtälön*

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1.11}$$

ratkaisu, jos ja vain jos $t \mapsto (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ on autonomisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

ratkaisu.



Kuva 1.2: Vakiovektorikenttä $f(x) = (1, 1)$ tasossa ja alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = p = (0.3, 1)$ ratkaisu aikavälillä $t \in]-2, 2]$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Tällä kurssilla tarkastelemme autonomisia ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

Vektorikentän f nollakohdat ovat differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ **tasapainopisteitä**.^a

^aequilibrium point

Lemma 1.6. (1) Jos x_0 on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste, niin vakiokuvaus $t \mapsto x_0$ on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu.

(2) Jos x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, niin kuvaus $t \mapsto x(-t)$ on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -f(x)$ ratkaisu.

Todistus. Kohta (1) on selviö, kohta (2) tehdään harjoituksissa. □

1.4 Ratkaisujen olemassaolosta

Todistamme kurssilla myöhemmin tuloksen, joka kertoo, milloin alkuarvotehtävällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Lause 1.7 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoon $x_0 \in U$ ja olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Tällöin alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on määritelty jollain avoimella välillä $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

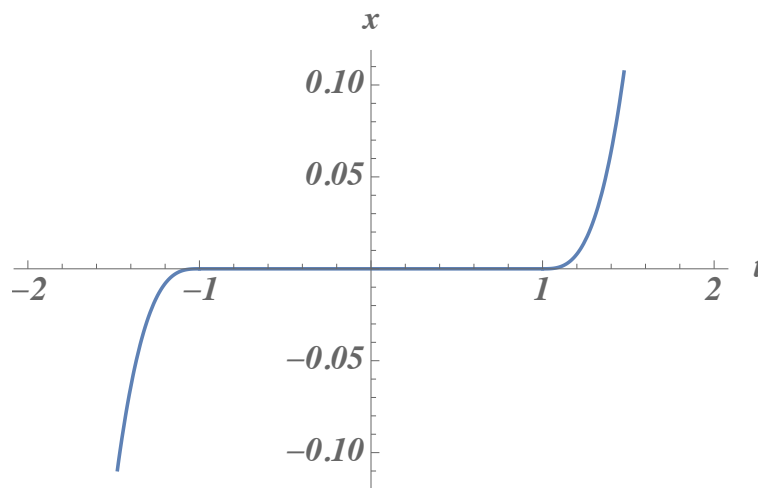
Jos Lauseen 1.7 oletukset eivät ole voimassa, niin alkuarvotehtävällä voi olla useita eri ratkaisuja kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 1.8. Vakiofunktio $0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0(t) = 0$, on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

ratkaisu. Toisaalta funktio $p_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p_3(t) = t^3$ on alkuarvotehtävän (1.13) ratkaisu, joten tehtävän ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Itse asiassa alkuarvotehtävällä (1.13) on äärettömän monta ratkaisua $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: Olkoot $a \leq 0 \leq c$ ja olkoon

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & \text{kun } t \leq a \\ 0, & \text{kun } a \leq t \leq b \\ (t-b)^3, & \text{kun } t \geq b \end{cases}.$$



On helppo tarkastaa, että kaikki funktiot $x_{a,b}$ ovat derivoituvia ja että myös ne alkuarvotehtävän (1.13) ratkaisuja. Tässä esimerkissä vektorikenttä $f_{2/3}(x) = 3x^{2/3}$ on jatkuva, mutta se ei ole differentioituva pisteessä $x = 0$.

Lemma 1.9. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ja olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Olkoot $x_1: I_1 \rightarrow U$ ja $x_2: I_2 \rightarrow U$ alkuarvotehtävän
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
 ratkaisuja avoimilla väleillä I_1 ja I_2 . Tällöin alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $I_1 \cup I_2$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $x_1(t) = x_2(t)$ kaikilla $t \in I_1 \cap I_2$. Jos tämä ei päde, niin on maksimaalinen osaväli $[t_0, t^*] \subset I_1 \cap I_2$, jossa ratkaisut yhtyvät. Olkoon $x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*)$. Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t^*) = x^* \end{cases} \quad (1.14)$$

on Lauseen (1.7) nojalla yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä $]x^* - \delta, x^* + \delta[$. Funktiot x_1 ja x_2 ovat alkuarvotehtävän (1.14) ratkaisuja välillä $]t^* - \delta, t^* + \delta[\cap I_1 \cap I_2$, joten ne yhtyvät tällä välillä. Tämä on ristiriita ajan t^* määritelmän kanssa.

Funktio $x: I_1 \cup I_2 \rightarrow U$, joka määritellään asettamalla $x(t) = x_k(t)$, kun $t \in I_k$, $k \in \{1, 2\}$, on hyvin määritelty ja se on alkuarvotehtävän ratkaisu välillä $I_1 \cup I_2$. Yksikäsitteisyys seuraa todistuksen alkuosasta. \square

Propositio 1.10. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoot $x_0 \in U$ ja $t_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $J =]\alpha, \beta[$ yhdiste kaikista alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

määrittelyväleistä. Tällöin alkuarvotehtävällä (1.15) on yksikäsitteinen ratkaisu välillä J .

Todistus. Määritellään kuvaus $x:]\alpha, \beta[\rightarrow U$ näin: Jokaisella $t \in J$ on alkuarvotehtävän (1.15) ratkaisu u , joka on määritelty jollain ajan t sisältämällä välillä. Asetetaan $x(t) = u(t)$. Lemman 1.9 nojalla x on nyt hyvin määritelty. Lisäksi se on alkuarvotehtävän (1.15) ratkaisu. Välillä J määritellyn ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa Lemmasta 1.9. \square

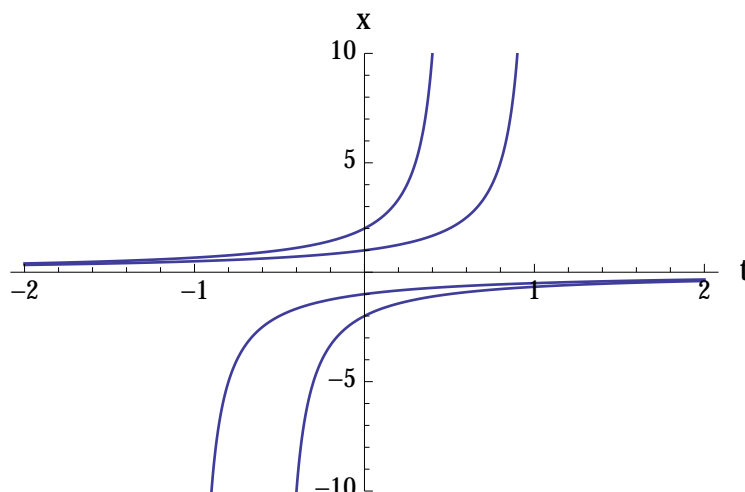
Proposition 1.10 väli J ei sisälly aidosti alkuarvotehtävän (1.15) mihinkään ratkaisu-
väliin.

Alkuarvotehtävän (1.15) kaikkien ratkaisuvälien yhdiste $I(b, f)$ on sen **maksimaalinen määrittelyväli**. Maksimaalisella määrittelyvälillä määritelty ratkaisu on **maksimaalinen ratkaisu**. Maksimaalisen ratkaisun kuvajoukko on pisteen x_0 **rata**.

Esimerkki 1.11. Olkoon $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = a \end{cases} ,$$

ratkaisu $x(t) = \frac{a}{1-at}$ "räjähtää äärellisessä ajassa tulevaisuudessa tai menneisyydessä" vaikka yhtälön oikean puolen funktio $x \mapsto x^2$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.



Seuraava autonomisten differentiaaliyhtälöiden ominaisuus on tärkeä geometrisen hahmottamisen apukeino:

Seuraus 1.12. *Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Jos kahden pisteen radat leikkaavat, niiden radat ovat joukkoina samat.*

Todistus. Olkkoot x ja y vektorikentän f määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja maksimaalisilla määrittelyväleillään I_x ja I_y . Oletetaan, että $x(t_x) = y(t_y)$. Olkkoon $s: I_x \rightarrow I_x - t_x + t_y$ kuvaus $s(t) = t - t_x + t_y$. Nyt x ja $y \circ s$ ovat alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(t_x) = x(t_x) \end{cases}$$

ratkaisuja, joten ne yhtyvät välillä I_x . Kuvausten y ja $y \circ s$ kuvajoukko on sama, joten väite seuraa. \square

Harjoitustehtäviä

1.1. Todista Propositio 1.5.

1.2. Todista Propositio 1.6(2).

1.3. Ratkaise logistinen differentiaaliyhtälö (1.5) parametrilla $K = 1$ ja tarkastele sen ratkaisujen käyttäytymistä eri alkuarvoilla, kun $t \rightarrow \infty$.

Tehtävissä 1.4 ja 1.5 tarkastellaan vektorikenttää $N: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $N(x) = -\frac{x}{\|x\|}$.

1.4. (1) Hahmottele kuva vektorikentästä N .

(2) Voiko vektorikentän N jatkaa tasossa \mathbb{R}^2 määrittelyksi jatkuvaksi vektorikentäksi?

1.5. (1) Olkkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$. Osoita, että lauseke

$$x(t) = x_0 - t \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

antaa alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

ratkaisun.

(2) Piirrä kuva muutaman ratkaisun radoista alkuarvon x_0 eri arvoilla.

(3) Mikä on alkuarvottehtävän (1.16) ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli?

1.6. Olkkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Tarkastele alkuarvottehtävää

$$\begin{cases} \dot{x} = x\|x\|, \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

(1) Hahmottele kuva vektorikentästä.

(2) Ratkaise alkuarvottehtävä.

(3) Kuvaile ratkaisujen käyttäytymistä.

1.7. Osoita, että kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

- (1) Miten ratkaisu käyttäytyy, kun λ on positiivinen tai negatiivinen?
- (2) Hahmottele ratkaisukäyriä muutamilla alkuarvon (a, b) eri arvoilla.
- (3) Siinä tapauksessa, että $x(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$, osoita, että polun x tangenttivektori lähestyy vaakasuoraa suuntaa.²

Tehtävissä 1.8 ja 1.9 ratkaise alkuarvotehtävä, määritä ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli ja kuvaile ratkaisun käyttäytymistä.

1.8.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} \\ x(0) = (1, 1) \end{cases} .$$

1.9.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{2x_1} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ x(0) = (1, 1) \end{cases} .$$

1.10. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (-x_1, x_2 + x_1^2)$. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Miten ratkaisut käyttäytyvät alkuarvoilla x_0 , jotka ovat lähellä vektorikentän f tasapainopistettä?

²Tangenttivektorin raja-arvo on 0, mutta mistä suunnasta se lähestyy nollaa?

Luku 2

Lineaariset autonomiset yhtälöt ja matriisien eksponenttifunktio

Tässä luvussa tutustumme matriisien eksponenttifunktioon ja ratkaisemme sen avulla kaikki lineaariset autonomiset alkuarvot tehtävät.

2.1 Lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt

Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Ax$ on **lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö** ja A on sen **kerroinmatriisi**.

Esimerkki 2.1. (1) Olkoot $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Diagonaalimatriisin $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ määräämä tason differentiaaliyhtälö on komponenteittain kirjoitettuna

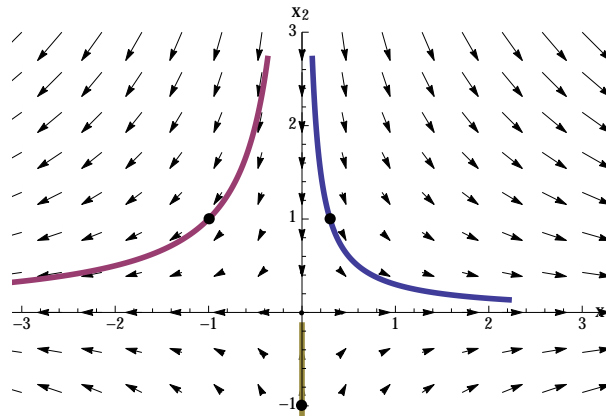
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}^2$. Tason alkuarvot tehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ ratkaisu on Esimerkin 1.1 mukaan

$$x(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Jos alkuarvo (a, b) on x_i -akselilla, $i \in \{1, 2\}$, niin koko rata sisältyy x_i -akseliin. Eri-tyisesti vakiokuvaus 0 on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = 0$. Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät x_1 -akselia, kun $t \rightarrow \infty$ ja x_2 -akselia, kun $t \rightarrow -\infty$.

(2) Harmonisen värähtelijän yhtälöryhmä (1.3) on lineaarinen autonominen yhtälö, jonka kerroinmatriisi on $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Esimerkissä 1.3 näimme, että tämän yhtälön kaikki radat ovat rajoitettuja.



Kuva 2.1: Alkuarvotehtävän (2.1) ratkaisuja, kun $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Lineaarisia autonomisia differentiaaliyhtälöitä voi käsitellä lineaarialgebran keinoilla ja eksakti ratkaiseminen on periaatteessa mahdollista kaikissa tapauksissa. Tässä luvussa tarkastelemme lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisemista matriisien eksponenttifunktion avulla.

Luvuissa 3 ja 4 luokittelemme lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt ja osoitamme, että esimerkiksi tason tapauksessa ratkaisujen luonne voidaan päätellä kerroinmatriisin ominaisarvojen ja niiden kertalukujen avulla. Tätä varten kertaamme ja laajennamme lineaarialgebran kurssien antamia tietoja liitteessä A. Kurssimateriaalien lisäksi tässä ja seuraavassa luvussa käsiteltäviin asioihin voi perehtyä esimerkiksi lähteiden [Gre], [Gro] tai [HJ] avulla.

2.2 Matriisien normiavaruus

Tarkastelemme Luvussa 2.4 periaatteessa suoraviivaista menetelmää autonomisen lineaarisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi. Aloitamme sopimalla, milloin kaksi $n \times n$ -matriisia on lähellä toisiaan.

Olkkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty[, v \mapsto \|v\|$, on **normi**, jos

- (1) $\|v\| = 0$, jos ja vain jos $v = 0$,
- (2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kaikille $v \in V$ ja
- (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ kaikille $v, w \in V$.

Pari $(V, \|\cdot\|)$ on **normiavaruus**.

Esimerkki 2.2. (1) Lineaarialgebran kursseilla osoitetaan, että euklidinen normi $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ on normi.

(2) Lauseke

$$\|A\|_\infty = \|(a_{ij})\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

(3) Lauseke

$$\|A\|_1 = \|(a_{ij})\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

(4) Lauseke

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Lemma 2.3. *Olkoot $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tällöin $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$.*

Todistus.

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\|_1 = \|A\|_1 \|B\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

Vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat **ekvivalentit**, jos on $c > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{c} \|v\|' \leq \|v\| \leq c \|v\|$$

kaikille $v \in V$.

Lause 2.4. *Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa kaikki normit ovat ekvivalentteja.* \square

Varustetaan reaalisten $n \times n$ -matriisien vektoriavaruus M_n normilla $\|\cdot\|$. Matriisien muodostama jono A_i suppenee kohti matriisia A , jos $\|A_i - A\| \rightarrow 0$, kun $i \rightarrow \infty$.

Propositio 2.5. *Olkoot $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ normeja avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jono $(A_i)_{i=1}^\infty$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, jos ja vain jos jono $(A_i)_{i=1}^\infty$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|')$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. \square

Propositio 2.6. *Olkoon $\|\cdot\|$ normi avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jono $(A_i)_{i=1}^\infty$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, jos ja vain jos kaikki sen kertoimien muodostamat jonot $(a_{kl})_{i=1}^\infty$ suppenevat reaalilukujen joukossa.*

Todistus. Harjoitustehtävä. \square

Propositio 2.7. *Neliömatriisien normiavaruus $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on homeomorfinen n^2 -ulotteisen euklidisen avaruuden kanssa.* \square

2.3 Matriisien eksponenttifunktio

Määritellään matriisien potenssit tavanomaiseen tapaan asettamalla $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ ja induktiivisesti $A^{k+1} = AA^k$ kaikille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja kaikille $k \geq 2$.

Olkoon $(B_k)_{k=0}^\infty$ jono avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Sarja $\sum_{k=0}^\infty B_k$ on jono $(\sum_{k=0}^n B_k)_{n=0}^\infty$.
Olkoon $(c_k)_{k=0}^\infty$ jono reaalilukuja. Sarja $\sum_{j=0}^\infty c_j A^j$ on **potenssisarja**.

Propositio 2.8. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Sarja*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \quad (2.2)$$

suppenee.

Todistus. Olkoon $a_{ij}^{(k)}$ matriisin A^k ij -kerroin. Tällöin

$$|a_{ij}^{(2)}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} \right| \leq n \|A\|_\infty^2,$$

ja induktiolla

$$|a_{ij}^{(N)}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(N-1)} a_{kj} \right| \leq n^{N-1} \|A\|_\infty^N.$$

Siispä

$$\frac{|a_{ij}^{(N)}|}{N!} \leq \frac{n^{N-1} \|A\|_\infty^N}{N!} \leq \frac{n^N \|A\|_\infty^N}{N!},$$

ja koska reaalinen eksponenttifunktio suppenee itseisesti, niin Weierstrassin M -testin ja Proposition 2.6 nojalla sarja (2.2) suppenee. \square

Sarja (2.2) määrittelee **matriisien eksponenttifunktion** $\exp: \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$,

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Esimerkki 2.9. (1) $\exp \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$.

(2) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Tällöin

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I_2,$$

$$A^3 = -\beta^2 I_2 \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = -\beta^2 A,$$

$$A^4 = \beta^4 I_2,$$

\vdots

ja induktiolla saadaan siis

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 2.10. *Olkoot $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ siten, että $AB = BA$. Tällöin $\exp(tA)B = B \exp(tA)$. Erityisesti $\exp(tA)A = A \exp(tA)$.*

Todistus. Induktiolla on helppo todistaa, että kaikille $K \in \mathbb{N}$ pätee $A^k B = B A^k$: Oletuksen mukaan väite pätee, kun $k = 1$. Jos $A^{k-1} B = B A^{k-1}$, niin

$$A^k B = B A^k = A^{k-1} A B = A^{k-1} B A = B A^{k-1} A = B A^k.$$

Siis kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$B \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} B,$$

mistä väite seuraa. □

Jos $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, C on kääntyvä ja $B = C A C^{-1}$, niin A ja B ovat toistensa konjugaatteja ja C on konjugoiva matriisi.

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä konjugointi on usein kätevä väline seuraavan ominaisuuden vuoksi:

Lemma 2.11. *Jos $B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, C on kääntyvä, niin $\exp(C B C^{-1}) = C \exp(B) C^{-1}$.*

Todistus. Matriisituloille pätee $(C B C^{-1})^k = C B^k C^{-1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siis osasummille pätee

$$\sum_{k=0}^n \frac{(C B C^{-1})^k}{k!} = C \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} C^{-1},$$

joten Lemman 2.3 nojalla pätee

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{(C B C^{-1})^k}{k!} - C \exp(B) C^{-1} \right\|_1 = \left\| C \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} - \exp(B) \right) C^{-1} \right\|_1 \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. □

2.4 Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisut

Matriisien eksponenttifunktio antaa menetelmän kaikkien lineaaristen homogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen.

Aloitamme hyödyllisellä abstraktilla havainnolla. Tässä tuloksessa määritämme kuvauksen $t \mapsto \exp(tA)$ derivaatan. Proposition 2.7 nojalla matriisien avaruus $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on n^2 -ulotteinen reaalinen vektoriavaruus, joka on siis isomorfinen avaruuden \mathbb{R}^{n^2} kanssa.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin. Kuvaus $F: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on **jatkuva (differentioituva)**, jos se on jatkuva (differentioituva) kuvauksena avaruuteen \mathbb{R}^{n^2} .

Vektorianalyysin/calculuksen kursseilta muistamme: Jos $A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, niin A on differentioituva, jos ja vain jos kaikki funktiot A_{ij} ovat differentioituvia/derivoituvia. Tällöin $\dot{A}(t) = (\dot{A}_{ij}(t))_{i,j=1}^n$.

Propositio 2.12. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja olkoon $E_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$,*

$$E_A(t) = \exp(tA).$$

Tällöin

$$\dot{E}_A(t) = AE_A(t).$$

Todistus. Olkoon $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$. Derivoimalla suppenevaa potenssisarjaa termeittäin saamme

$$\dot{E}_A(t)_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)} t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_{ij}^{(k)} t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)} t^k}{k!}.$$

Siis

$$\dot{E}_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = AE_A(t).$$

Keskimmäinen näistä yhtälöistä on selvä, koska vastaava pätee kaikille äärellisille osasummille. □

Lemma 2.13. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Olkoot $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $B: \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja $G: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differentioituvia kuvauksia.*

(1) *Olkoon $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(t) = A(t)G(t)$. Tällöin $\dot{F} = A\dot{G} + \dot{A}G$.*

(2) *Olkoon $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C(t) = A(t)B(t)$. Tällöin $\dot{C} = A\dot{B} + \dot{A}B$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 2.14. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tällöin $\exp A$ on kääntyvä ja*

$$\exp(-A) = (\exp A)^{-1}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.15 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Alkuarvotettävän*
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
 ainoa ratkaisu on $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) = \exp(tA)x_0$.

Todistus. Proposition 2.12 nojalla

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)x_0) = A \exp(tA)x_0,$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten x on alkuarvottehtävän ratkaisu. Osoitamme, että se on ainoa ratkaisu: Olkoon $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ alkuarvottehtävän ratkaisu. Olkoon $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z(t) = e^{-tA}y(t)$. Lemman 2.13 nojalla

$$\dot{z}(t) = -A \exp(-tA)y(t) + \exp(-tA)Ay(t) = \exp(-tA)(A - A)y(t) = 0,$$

joten z on vakiokuvaus $z(t) \equiv z(0) = y(0) = x_0$. Siispä kuvauksen z määritelmä antaa Proposition 2.14 avulla $y(t) = \exp(tA)x_0$. \square

Ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa myös olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseesta 1.7.

Lemma 2.16. *Jos $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ $AB = BA$, niin $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.*

Todistus. Lemman 2.10 nojalla $\exp(tA)B = B \exp(tA)$. Olkoon

$$F(t) = \exp(t(A + B)) - \exp(tA) \exp(tB).$$

Lemman 2.13 nojalla

$$\dot{F}(t) = (A + B) \exp(t(A + B)) - (A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA)B \exp(tB)) = (A + B)F(t).$$

Lauseen 2.15 nojalla $F(t) = \exp(t(A + B))F(0) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Väite seuraa tästä. \square

Esimerkki 2.17. Olkoon

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Lemman 2.16 ja Esimerkin 2.9 nojalla

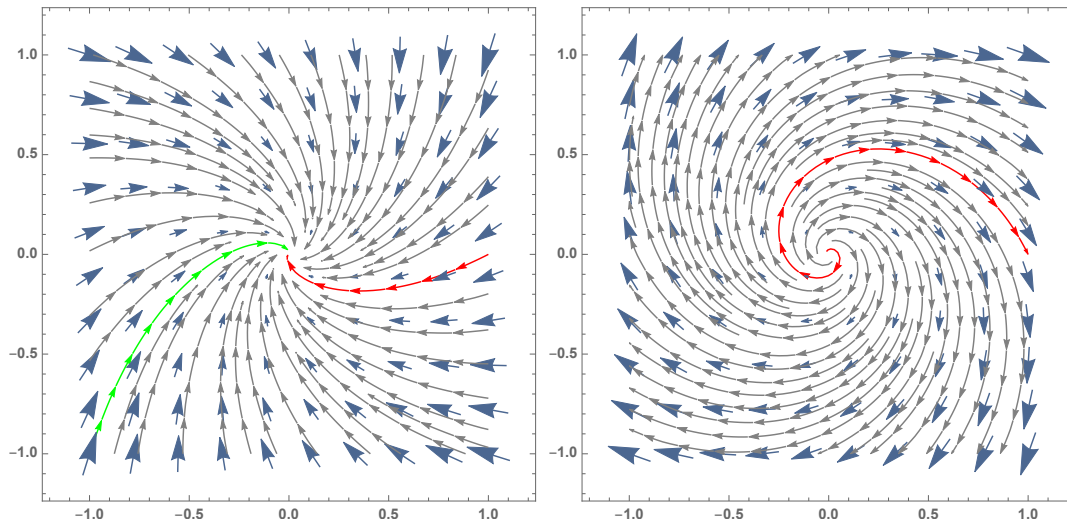
$$\exp(\Lambda) = \exp(\alpha I_n) \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \right) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Lauseen 2.15 nojalla alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \Lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on

$$\exp(t\Lambda)x_0 = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} e^{t\alpha}(\cos(\beta t)x_{01} + \sin(\beta t)x_{02}) \\ e^{t\alpha}(-\sin(\beta t)x_{01} + \cos(\beta t)x_{02}) \end{pmatrix}.$$



Kuva 2.2: Esimerkin 2.17 alkuarvotehtävien ratkaisuja, kun $\beta = \pi/3$ ja vasemmalla $\alpha = -2$ ja oikealla $\alpha = 1/2$.

2.5 Muuttujanvaihtolemma

Lemman 2.11 avulla voimme ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälön, jos tunnemme ratkaisun sen kerroinmatriisin jotain konjugaattia vastaavalle differentiaaliyhtälölle ja tunnemme konjugoivan matriisin.

Esimerkki 2.18. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lauseen 2.15 nojalla alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ratkaisu on $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y(t) = \exp(tA)y_0$. Matriisin $\exp(tA)$ määrittäminen suoraan määritelmästä vaikuttaa hankalalta.

Huomaamalla, että $tA = K \operatorname{diag}(2t, t)K^{-1}$ matriisilla $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Lemma 2.11 antaa helposti

$$\exp(tA) = K \exp(\operatorname{diag}(2t, t)) K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

joten

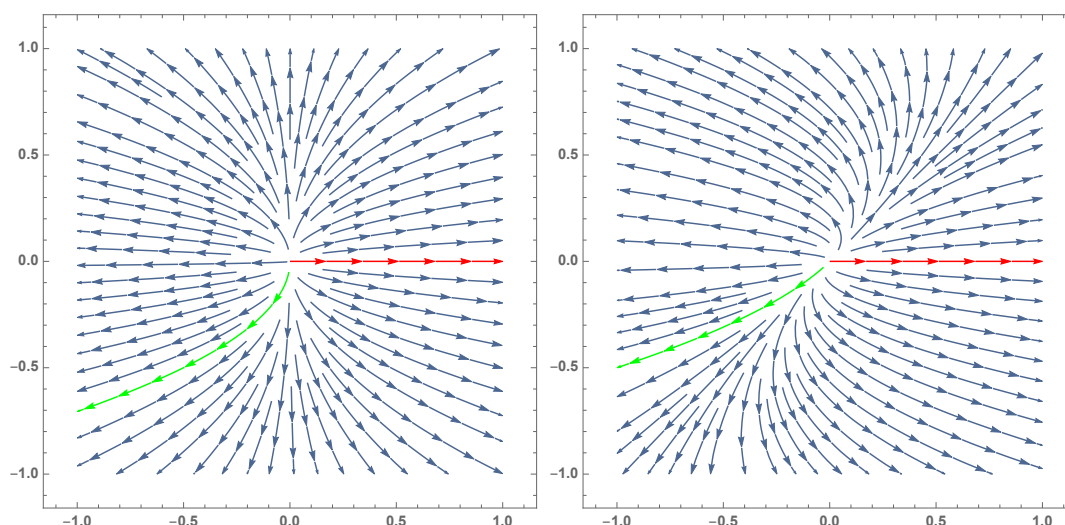
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} e^{2t}y_{01} + (e^t - e^{2t})y_{02} \\ e^ty_{02} \end{pmatrix}.$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{diag}(2t, t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

ratkaisut ovat Esimerkin 2.9(1) nojalla

$$x(t) = \exp(t \operatorname{diag}(2, 1))x_0 = \operatorname{diag}(e^{2t}, e^t)x_0 = \begin{pmatrix} e^{2t}x_{01} \\ e^tx_{01} \end{pmatrix}.$$



Kuva 2.3: Yhtälöiden (2.4) (vasemmalla) ja (2.3) (oikealla) ratkaisuja. Jälkimmäisen yhtälön punainen ja vihreä ratkaisu saadaan matriisin K avulla vastaavista ensimmäisen yhtälön ratkaisuista.

Seuraava tulos yleistää Esimerkin 2.18 ratkaisumenetelmän:

Propositio 2.19 (Muuttujanvaihtolemma). *Olkoot $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ siten, että C on kääntyvä ja $A = CBC^{-1}$. Tällöin x on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Bx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu, jos ja vain jos $y = Cx$ on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 = Cx_0 \end{cases}$ ratkaisu.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 2.15 ja Lemmasta 2.11. \square

Muuttujanvaihtolemmalla voi todistaa myös huomaamalla, että ketjusäännön nojalla pätee

$$\dot{y} = C\dot{x} = CBx = CBC^{-1}y = Ay.$$

2.6 Ratkaisujen vektoriavaruus

Millä tahansa joukolla $X \neq \emptyset$ määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden joukko

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$$

muodostaa reaalisen vektoriavaruuden, kun funktioiden yhteenlasku määritellään pisteittäin asettamalla kaikille $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

kaikille $x \in X$ ja reaaliluvulla kertominen määritellään asettamalla kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kaikille $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

kaikille $x \in X$.

Seuraus 2.20. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Lineaarisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut muodostavat n -ulotteisen reaalisen vektoriavaruuden.

Todistus. Osoitetaan, että ratkaisut muodostavat funktioiden avaruuden lineaarisen aliavaruuden. Edellä olemme nähneet, että ratkaisujen joukko ei ole tyhjä. Olkoot x ja y ratkaisuja ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tällöin derivoinnin lineaarisuuden, ratkaisun määritelmän ja matriisilla kertomisen lineaarisuuden nojalla

$$\frac{d}{dt}(\lambda x + \mu y) = \lambda \dot{x} + \mu \dot{y} = \lambda Ax + \mu Ay = A(\lambda x + \mu y),$$

joten $\lambda x + \mu y$ on ratkaisu. Siis ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden.

Olkoot $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektoriavaruuden \mathbb{R}^n standardikantavektorit. Lauseen 2.15 mukaan kuvaukset $x_1 = e^{tA}\mathbf{e}_1, \dots, x_n = e^{tA}\mathbf{e}_n$ ovat tarkasteltavan lineaarisen homogeenisen yhtälön ratkaisuja. Ne ovat lineaarisesti riippumattomia sillä

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)(0) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i = 0$$

vain, jos $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Siis ratkaisujen avaruuden dimensio on vähintään n .

Olkoon x jokin ratkaisu. Tällöin

$$x(0) = \sum_{i=1}^n x(0)_i \mathbf{e}_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)(0).$$

Kuvaukset x ja $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ ovat alkuarvottehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = x(0) \end{cases}$ ratkaisuja, joten Lauseen 2.15 yksikäsitteisyystuloksen nojalla $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Siis differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen avaruus on n -ulotteinen. \square

Harjoitustehtäviä

2.1. Todista Propositio 2.5.

2.2. Todista Propositio 2.6.

2.3. Todista Propositio 2.8 käyttämällä normia $\|\cdot\|_1$ normin $\|\cdot\|_\infty$ sijaan.

2.4. Todista Lemma 2.13.

2.5. Todista Propositio 2.14.¹

2.6. Laske $\exp A$, kun (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.7. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Laske $\exp tA$, kun²

(a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

¹Osoita, että kuvaus $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $F(t) = \exp(tA)\exp(-tA)$, on vakio.

²Lemma 2.16 auttaa.

$$(b) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2.8. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Määritä $\exp A$, $\exp B$ ja $\exp(A + B)$.

2.9. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Osoita, että $C^{-1}AC$ on diagonaalimatriisi.

(b) Määritä $\exp A$.

2.10. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Osoita, että $C^{-1}AC$ on diagonaalimatriisi.

(b) Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (2, 3) \end{cases}$.

Luku 3

Tason lineaariset autonomiset alkuarvotekävät

Tässä luvussa osoitamme, että kaikki reaaliset 2×2 -matriisit voidaan konjugoida reaalilla kääntyvällä matriisilla yhteen kolmesta perusmuodosta. Tarkastelemme tason lineaaristen autonomisten alkuarvotekävien ratkaisuja näiden perusmuotojen ja muuttujanvaihtolemmän avulla.

3.1 2×2 -matriisien luokittelu

Toisen asteen polynomin juurten kaava antaa nopean tavan selvittää 2×2 -matriisin ominaisarvot ja niiden laadut:

Propositio 3.1. *Olkoon A reaalinen 2×2 -matriisi.*

- (1) *Jos $\det A < 0$, niin matriisilla A on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo.*
- (2) *Jos $\det A > 0$ ja $\operatorname{tr}^2 A \geq 4 \det A$, niin matriisilla A on joko kaksi positiivista tai kaksi negatiivista ominaisarvoa.*
- (3) *Jos $\det A > 0$ ja $\operatorname{tr}^2 A < 4 \det A$, niin matriisilla A on kaksi kompleksista ominaisarvoa, jotka ovat toistensa liittolukuja.*
- (4) *Jos $\det A = 0$, niin ainakin toinen ominaisarvo on 0. Tällöin mahdollinen nollasta poikkeava ominaisarvo on reaalinen.*

Todistus. Lemman A.2 nojalla ominaisarvojen tulo on $\det A$. Jos ominaisarvot eivät ole reaalisia, niin ne ovat toistensa kompleksikonjugaatteja ja niiden tulo on siis positiivinen. Muut väitteet seuraavat helposti Esimerkin A.3 ja toisen asteen polynomin ratkaisukaavan avulla. \square

Seuraava tulos antaa jokaiselle reaalille 2×2 -matriisille perusmuodon, joka on kyseisen matriisin konjugaatti.

Lause 3.2 (2-ulotteinen konjugointilause). *Olkoon A reaalinen 2×2 -matriisi. Tällöin on kääntyvä reaalinen 2×2 -matriisi C , jolle matriisi CAC^{-1} on*

- (1) *diagonaalimatriisi, jos matriisilla A on kaksi eri reaalista ominaisarvoa tai yksi geometrisesti kaksinkertainen reaalinen ominaisarvo,*
- (2) *muotoa $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, jos matriisilla A on yksi geometrisesti yksinkertainen reaalinen ominaisarvo λ ja*
- (3) *vinosymmetrinen muotoa $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, jos matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin matriisin A kompleksiset ominaisarvot ovat $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.*

Todistus. (1) Jos matriisilla A on kaksi eri reaalista ominaisarvoa, diagonalisoituvuus on todistettu kurssilla LAG2. Tapaus, jossa matriisilla A on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo on selvä: Kaikille vektoreille $v \in \mathbb{R}^2$ pätee $Av = \lambda v$ samalla $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis matriisi A on diagonaalinen.

(2) Oletetaan, että matriisilla A on algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jonka geometrinen kertaluku on 1. Olkoon u jokin ominaisvektori, jolle siis pätee $Au = \lambda u$. Olkoon $v \in \mathbb{R}^2$ mikä tahansa vektori siten, että u ja v virittävät koko tason \mathbb{R}^2 . Tällöin $Av = \mu u + \nu v$ jollekin $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Jos olisi $\nu \neq \lambda$, niin

$$A(\mu u + (\nu - \lambda)v) = \lambda\mu u + (\nu - \lambda)(\mu u + \nu v) = \nu(\mu u + (\nu - \lambda)v),$$

joten $\nu \neq \lambda$ olisi ominaisarvo vastoin oletusta. Siispä $Av = \mu u + \lambda v$. Valitaan kannaksi u ja $w = v/\mu$. Tällöin $Au = \lambda u$ ja

$$Aw = \mu u/\mu + \lambda v/\mu = u + \lambda w,$$

joten matriisi on tässä kannassa haluttua muotoa.

(3) Oletetaan, että matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin sillä on kaksi kompleksista ominaisarvoa $\alpha \pm i\beta$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\beta \neq 0$. Ajatellaan A kompleksisena matriisina. Tällöin ominaisarvoa $\alpha + i\beta$ vastaa jokin ominaisvektori $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Havaitaan ensin, että $\operatorname{Re} u$ ja $\operatorname{Im} u$ ovat lineaarisesti riippumattomia reaalisesa vektoriarvuudessa \mathbb{R}^2 : Oletetaan, että $\operatorname{Im} u \neq 0$. Jos vektorit $\operatorname{Re} u$ ja $\operatorname{Im} u$ olisivat lineaarisesti riippuvia, niin $\operatorname{Re} u = c \operatorname{Im} u$ jollain $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$(c + i)A \operatorname{Im} u = A((c + i) \operatorname{Im} u) = A(u) = (\alpha + i\beta)u = (\alpha + i\beta)(c + i) \operatorname{Im} u,$$

joten

$$A \operatorname{Im} u = (\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u.$$

Tämä on mahdotonta, sillä $A \operatorname{Im} u$ on reaalinen vektori, kun taas $(\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u$ ei ole. Tapaus $\operatorname{Re} u \neq 0$ käsitellään vastaavalla tavalla.

Kirjoitetaan vektori Au kahdella tavalla reaali- ja imaginaariosien summaksi: Lineaarisuuden nojalla saamme

$$Au = A(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = A(\operatorname{Re} u) + iA(\operatorname{Im} u),$$

missä $A(\operatorname{Re} u)$ ja $A(\operatorname{Im} u)$ ovat reaalisia vektoreita. Toisaalta, koska u on ominaisvektori, pätee

$$Au = (\alpha + i\beta)(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u + i(\beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u).$$

Vertaamalla reaali- ja imaginaariosia saadaan

$$A \operatorname{Re} u = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u$$

ja

$$A \operatorname{Im} u = \beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u.$$

Tämä osoittaa, että avaruuden \mathbb{R}^2 kannassa, jonka muodostavat vektorit $v_1 = \operatorname{Re} u$ ja $v_2 = \operatorname{Im} u$, matriisia A vastaava lineaarikuvaus käyttäytyy halutulla tavalla.

Valitaan kannanvaihtomatriisiksi C matriisi, jonka sarakkeet ovat vektorien v_1 ja v_2 komponentit. Tällöin C on reaalinen ja se on kääntyvä koska edellä totesimme, että sen sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomat. Lisäksi pätee

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_1 = C^{-1}(\alpha v_1 - \beta v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

ja

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_2 = C^{-1}(\beta v_1 + \alpha v_2) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Lause 3.2 on nyt todistettu. □

3.2 Esimerkki muuttujanvaihtolemmän käytöstä

Muuttujanvaihtolemmän avulla voimme ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälön, jos tunnemme ratkaisun sen kerroinmatriisin jostain konjugaattia vastaavalle differentiaaliyhtälölle.

Esimerkki 3.3. Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2 ja -2 . Sen ominaisavaruuksien saadaan ratkaisemalla yhtälöparit $Av = 2v$ ja $Av = -2v$, jotka antavat vastaaville ominaisavaruuksille yhtälöt $v_1 = 3v_2$ ja $v_1 = -v_2$. Matriisi A voidaan diagonalisoida esimerkiksi matriisilla

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jonka sarakkeet $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ovat ominaisvektoreita. Matriisille $B = C^{-1}AC$ pätee

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Aw_1 = C^{-1}2w_1 = 2C^{-1}w_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ja vastaavasti

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx, \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.2)$$

ratkaisu tunnetaan, se on $x_{(a,b)}(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{-2t} \end{pmatrix}$. Ratkaisun luonne on melko helppo selvittää:

Matriisin B ominaisavaruudet $\mathbb{R} \times \{0\}$ ja $\{0\} \times \mathbb{R}$ ovat erityisasemassa:

(1) Kaikille $(a, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ pätee $x_{(a,b)}(t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

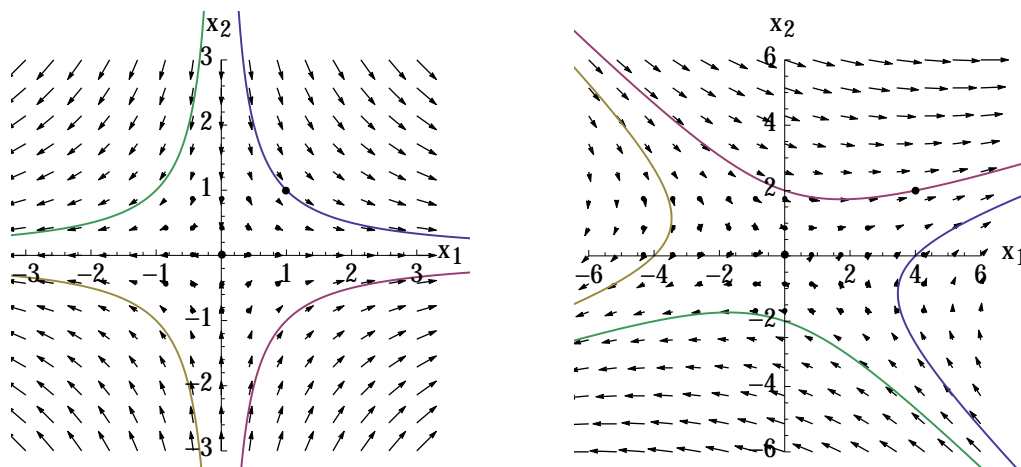
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{(a,0)}(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_{(a,0)}(t) = 0.$$

(2) Kaikille $(0, b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ pätee $x_{(a,b)}(t) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x_{(0,b)}(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_{(0,b)}(t) = 0.$$

(3) Kaikille $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - ((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}))$ pätee

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x_{(a,b)}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{(a,b)}(t)\| = \infty.$$



Kuva 3.1: Kaksi satulaa

Proposition 2.19 mukaan, jos $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, niin

$$y_{(a',b')}(t) = Cx_{(a,b)}(t) = \begin{pmatrix} 3ae^{2t} + be^{-2t} \\ ae^{2t} - be^{-2t} \end{pmatrix}$$

on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay, \\ y(0) = C \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.3)$$

ratkaisu.

Muuttujanvaihtomatriisi C kuvaa suoran $\mathbb{R} \times \{0\}$ matriisiin A ominaisavaruudeksi, joka on vektorin w_1 virittämä aliavaruus $\langle w_1 \rangle$ ja suoran $\{0\} \times \mathbb{R}$ matriisiin A ominaisavaruudeksi $\langle w_2 \rangle$. Alkuarvotekävän (3.2) ratkaisujen ominaisuuksista seuraa, että kaikille $v \in \langle w_1 \rangle$ pätee $y_v(t) \in \langle w_1 \rangle$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_v(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_v(t) = 0,$$

koska $y_v(t) = Cx_{C^{-1}v}(t)$ ja $C^{-1}v \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Samalla päättelyllä nähdään, että kaikille $v \in \langle w_2 \rangle$ pätee $y_v(t) \in \langle w_2 \rangle$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|y_v(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = 0$$

ja että kaikille $v \in \mathbb{R}^2 - (\langle w_1 \rangle \cup \langle w_2 \rangle)$ pätee $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_v(t)\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \|y_v(t)\| = \infty$.

3.3 Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit

Ratkaisemme nyt tason lineaariset differentiaaliyhtälöt $\dot{x} = Ax$ kaikissa konjugointilauseen 3.2 antamissa perustilanteissa. Näiden ratkaisujen ja Proposition 2.19 avulla voidaan ratkaista kaikki 2-ulotteiset lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt. Seuraavassa A on siis reaalinen 2×2 -matriisi:

Matriisi A on diagonalisoituva.

(1) Jos matriisilla A on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo, ratkaisut käyttäytyvät kuten esimerkissä 3.3.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **satulaksi**.

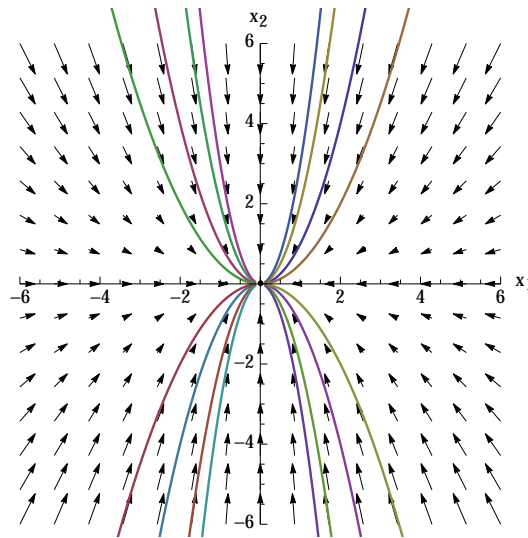
(2) Jos matriisilla A on kaksi negatiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisut saadaan samalla tavalla kuin esimerkissä 3.3. Ratkaisujen käyttäytyminen on kuitenkin erilaista: A on konjugaatti diagonaalimatriisiin $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ kanssa. Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisut alkuarvoilla, jotka ovat koordinaattiakseleilla, lähestyvät origoa eksponentiaalisesti akselia pitkin, kun $t \rightarrow \infty$. Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät myös origoa, mutta kuvan mukaisia käyriä pitkin.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **nieluksi**.

(3) Jos matriisilla A on kaksi positiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisukäyrät ovat kuten nielulla, mutta ratkaisut liikkuvat vastakkaiseen suuntaan.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **lähteeksi**.

Kuva on samanlainen kuin nielun tapauksessa mutta vektorikenttä osoittaa jokaisessa pisteessä vastakkaiseen suuntaan ja ratkaisut liikkuvat käyrillä päinvastaiseen suuntaan kuin nielun tapauksessa.



Kuva 3.2: Nielu

(4) Jos 0 on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo, niin kaikki ratkaisut ovat vakio-
kuvauksia. Jos 0 geometrisesti ja algebrallisesti yksinkertainen, on helppo tarkastaa, että
kaikki ratkaisut ovat pysty- tai vaakasuorien parametrisointeja.

Jos matriisi A on diagonaalinen, on helppo tarkastaa, että jokaisella koordinaattiak-
selien ulkopuolisella alkuarvolla $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ saatavat differentiaaliyhtälön radat ovat
yhtälön

$$\left(\frac{x_1(t)}{x_{01}(t)} \right)^{\lambda_2} = \left(\frac{x_2(t)}{x_{02}(t)} \right)^{\lambda_1} \quad (3.4)$$

ratkaisukäyrän komponentteja joukossa $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Huomaa, että ratkaisukäyrät ovat sä-
teitä, kun matriisilla A on yksi geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda_1 = \lambda_2$. Ylei-
sessä tapauksessa radat saadaan kuvaamalla yhtälön (3.4) antama käyrä Proposition 2.19
antamalla lineaarisella muuttujanvaihdoilla.

Matriisi A on konjugaatti matriisiin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ kanssa. Harjoitustehtävässä 1.7 tarkas-
timme, että kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

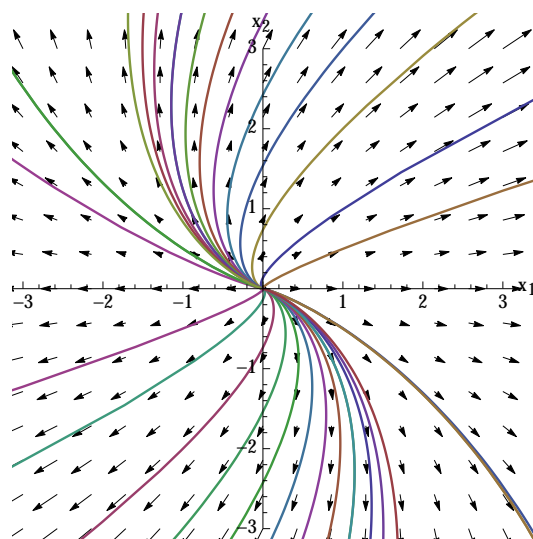
$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

Jos matriisilla A on yksi ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jonka algebrallinen kertaluku on yksi
ja geometrinen kertaluku on kaksi, niin Lauseen 3.2 nojalla A on matriisiin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ kon-
jugaatti ja differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut saadaan Proposition 2.19 ja ratkaisun
(3.5) avulla.



Kuva 3.3: Surkastunut lähde

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **surkastuneeksi nieluksi**, jos $\lambda < 0$ ja **surkastuneeksi lähteeksi**, jos $\lambda > 0$.

Matriisi A on konjugaatti vinosymmetrisen matriisin $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ kanssa. Lauseen 3.2 mukaan kaikki reaaliset 2×2 -matriisit, jotka eivät ole diagonalisoituvia tai matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ konjugaatteja jollain $\lambda \in \mathbb{R}$, ovat vinosymmetrisen matriisin $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ konjugaatteja joillain $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Matriisin A ja kaikkien sen kanssa konjugaattien matriisien ominaisarvot ovat $\alpha \pm i\beta$. Esimerkin 2.17 nojalla kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\alpha t} \left(a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \right)$$

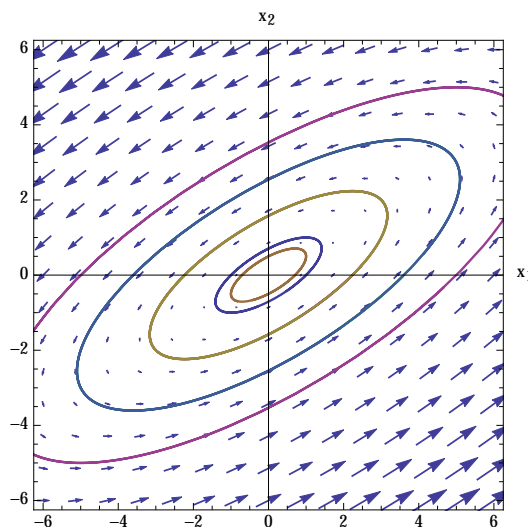
on alkuarvottehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$, ratkaisu. Ratkaisun käyttäytyminen riippuu ominaisarvon reaali- ja imaginaariosan merkeistä:

(1) Jos $\alpha = 0$, niin ratkaisu on muotoa

$$x(t) = a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Tämä kuvaus parametrizoi origokeskisen ympyrän, jonka säde on $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ratkaisun kiertosuunta ympyrällä määräytyy parametrin β merkistä. Yleisessä tilanteessa ratkaisut parametrizovat ellipsin, joka saadaan kuvaamalla tämä ympyrä kannanvaihtokuvauksella. Kiertosuunta riippuu parametrin β merkistä ja kannanvaihtokuvauksen determinantista.

Tässä tapauksessa origo on **keskus**.



Kuva 3.4: Keskus

(2) Jos $\alpha < 0$, niin kerroin $0 < e^{\alpha t} < 1$ aiheuttaa sen, että ratkaisu lähestyy origoa, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja lähestyy sitä eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$. Vastaavasti $\|x(t)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow -\infty$.

Tässä tapauksessa origo on **spiraalinielu**.

(3) Jos $\alpha > 0$, niin kerroin $e^{\alpha t} > 1$ aiheuttaa sen, että ratkaisun normi kasvaa rajatta, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja etäännyy siitä eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$ ja suppenee origoon, kun $t \rightarrow -\infty$.

Tässä tapauksessa origo on **spiraalilähde**.

3.4 Parametrisoituja perheitä

Usein differentiaaliyhtälö on osa **parametrisoitua perhettä** $\dot{x} = f_\alpha(x)$, missä $\alpha \in A$ ja $A \neq \emptyset$ on perheen **parametriavaruus**. Tällöin joukkoa U_α , jossa vektorikenttä f_α on määritelty, kutsutaan usein esimerkiksi **faasiavaruudeksi**. Differentiaaliyhtälön ratkaisut voivat käyttäytyä eri tavalla eri parametrien arvoilla kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 3.4 (Vaimeneva värähtelijä). Esimerkissä 1.3 tarkastelimme harmonista värähtelijää, joka kuvaa ideaalisen jousen liikettä 1-ulotteisessa avaruudessa. Oletetaan nyt, että tarkasteltava paino liikkuu pinnalla, jossa siihen vaikuttaa nopeuteen verrannollinen kitka $-b\dot{x}$, missä $b > 0$.

Saadetaan systeemi, jota kutsutaan **vaimenevaksi värähtelijäksi**.

Jos $b = 0$, kyseessä on harmoninen värähtelijä. Systeemin aikakehitystä kuvaa toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Valitsemalla $y_1 = x$ ja $y_2 = \dot{x}$ saadaan ekvivalentti lineaarinen yhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2, \end{cases} \quad (3.6)$$

jonka kerroinmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix},$$

matriisimerkinnällä siis

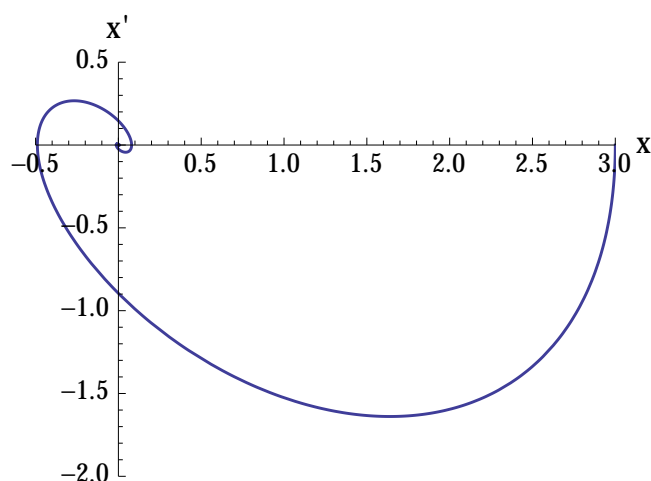
$$\dot{y} = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} y.$$

Tämän yhtälön ratkaisun tyyppi riippuu parametreista m , k ja b . Matriisin A determinantti k/m on aina positiivinen ja sen ominaisarvot ovat

$$\lambda_{\pm} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

- Jos $b^2 < 4km$, niin matriisilla A on kaksi kompleksista ominaisarvoa, joiden reaaliosa on negatiivinen, joten ratkaisu on spiraalinielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$, $\dot{x}(0) = 0$, niin se värähtelee tasapainopisteen ympärillä äärettömän monta kertaa.

Tilannetta, jossa $b^2 < 4km$ kutsutaan **alivaimennetuksi** värähtelijäksi.



Kuva 3.5: Alivaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = b = 1$.

- jos $b^2 = 4km$, niin matriisilla A on yksi kaksinkertainen negatiivinen ominaisarvo, joten ratkaisu on surkastunut nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$,

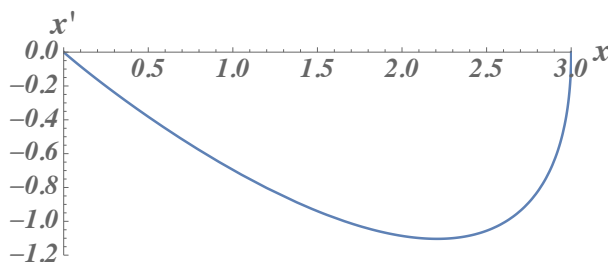
$\dot{x}(0) = 0$, niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä $x = 0$ kertaakaan. Ratkaisujen tangentit lähestyvät 1-ulotteisen ominaisavaruuden

$$E_{-\frac{b}{2m}} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -\frac{b}{2m}y_1 \right\}$$

suuntaa kun $t \rightarrow +\infty$.

Tilannetta, jossa $b^2 = 4km$ kutsutaan **kriittisesti vaimennetuksi** värähtelijäksi.

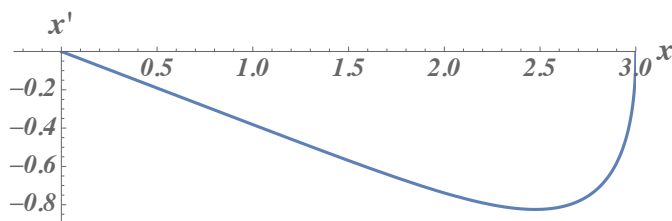
Tällainen tilanne on epävakaa parametrien suhteen: pienikin muutos parametreissa voi muuttaa värähtelijän luonnetta, kun yhtälö muuttuu epäyhtälöksi.



Kuva 3.6: Kriittisesti vaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = 1$, $b = 2$. Näillä parametreilla origo on surkastunut nielu.

- jos $b^2 > 4km$, niin matriisilla A on kaksi eri negatiivista ominaisarvoa, joten ratkaisu on nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$, $\dot{x}(0) = 0$, niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä $x = 0$ kertaakaan.

Tilannetta, jossa $b^2 > 4km$ kutsutaan **ylivaimennetuksi** värähtelijäksi.



Kuva 3.7: Ylivaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = 1$, $b = 3$. Näillä parametreilla origo on nielu.

Harjoitustehtäviä

Tehtävät 3.1– 3.5: Miten differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut käyttäytyvät? Havainnollista kuvalla.

3.1. $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

3.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$

3.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$

3.6. Olkoon

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ tyyppi kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Kuvaile, mitä tapahtuu niissä parametriavaruuden \mathbb{R} pisteissä, joissa tyyppi vaihtuu. Havainnollista kuvilla.

3.7. Miten alkuarvotehtävän (3.6) ratkaisut käyttäytyvät, jos $b < 0$ ja $m, k > 0$?

Luku 4

Lineaariset autonomiset alkuarvotekävät korkeammissa ulottuvuuksissa

Tässä luvussa yleistämme luvun 3 tarkastelun korkeampiin ulottuvuuksiin. Tutustumme Jordanin kanoniseen muotoon, jollaiseen jokainen neliömatriisi voidaan konjugoida. Jordanin kanonisen muoto ja muuttujanvaihtolemma auttavat lineaarisen autonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisujen luonteen selvittämisessä.

4.1 Yleistetty ominaisavaruus

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Jos lineaarisesti riippumattomat vektorit $v_1, \dots, v_K \in \mathbb{K}^n$ toteuttavat

- (1) $(A - \lambda I)v_1 = 0$,
- (2) $(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}$ kaikilla $j = 2, \dots, n$ ja
- (3) yhtälöllä $(A - \lambda I)x = v_n$ ei ole ratkaisua,

niin ne muodostavat **Jordanin^a ketjun**.

^aCamille Jordan, eri kuin Gaussin ja Jordanin menetelmää kehittänyt Wilhelm Jordan.

Jordanin ketjun määritelmän ehto (1) on, että v_1 on matriisin A ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori ja ehto (3) on, että v_n ei ole matriisia $A - \lambda$ vastaavan lineaarikuvauksen kuvassa.

Propositio 4.1. *Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ matriisin A ominaisarvo. Oletetaan, että vektorit v_1, \dots, v_n muodostavat Jordanin ketjun matriisille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja ominaisarvolle λ .*

- (1) *Joukko $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarisesti riippumaton.*

(2) Olkoon $K = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)$. Tällöin

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 4.2. Kolmiomatriisin determinantti on sen diagonaalialkioiden tulo, joten karakteristisen polynomin avulla näemme heti, että yläkolmiomatriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainoa ominaisarvo on 1. Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä koostuu kahdesta yhtälöstä

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

joten esimerkiksi vektorit $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ ja $w_1 = (0, 1, 1, 0)$ virittävät 2-ulotteisen ominaisavaruuden E_1 . Ominaisarvon 1 algebrallinen kertaluku on 4 ja sen geometrinen kertaluku on 2.

Selvitetään ainoaa ominaisarvoa 1 vastaavan yleistetyn ominaisavaruuden rakenne tarkemmin: Yhtälöllä $(A - I_4)x = v_1$ on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, joka on lineaarisesti riippumaton vektorin v_1 kanssa. Sen sijaan yhtälöllä $(A - I_4)x = v_2$ ei ole ratkaisua. Vastaavasti yhtälöllä $(A - I_4)x = w_1$ on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin $w_2 = (0, 0, 0, 1)$, joka on lineaarisesti riippumaton vektorin w_1 kanssa. Yhtälöllä $(A - I_4)x = w_2$ ei ole ratkaisua. Vektorit v_1, v_2 ja w_1, w_2 muodostavat kaksi Jordanin ketjua ominaisarvolle 1: $(A - I_4)v_2 = v_1$, $Av_1 = v_1$ ja $(A - I_4)w_2 = w_1$, $Aw_1 = w_1$.

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Jos $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, λ on sen ominaisarvo ja k on luonnollinen luku, $k \geq 1$, niin vektorialiavaruus

$$E_\lambda^k(A) = \ker(A - \lambda)^k$$

on ominaisarvoa λ vastaava **kertaluvun k yleistetty ominaisavaruus**. Aliavaruus

$$\widehat{E}_\lambda(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_\lambda^k(A)$$

on ominaisarvoa λ vastaava **yleistetty ominaisavaruus**.

Jos $F: X \rightarrow X$ on kuvaus, niin osajoukko $Y \subset X$ on **F -invariantti**, jos $F(Y) \subset Y$.

Propositio 4.3. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ on sen ominaisarvo. Yleistetty ominaisvaruus $\widehat{E}_\lambda(A)$ on A -invariantti¹ aliavaruus.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 4.4. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon $\lambda \in \mathbb{K}$ on sen ominaisarvo. Jos vektorit v_1, \dots, v_k muodostavat Jordanin ketjun matriisille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja sen ominaisarvolle λ , niin $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ on yleistetyn ominaisvaruuden $\widehat{E}_\lambda(A)$ aliavaruus.

Todistus. Määritelmän nojalla

$$(A - \lambda I)^\ell v_\ell = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{\ell-1} v_\ell = (A - \lambda I)v_1 = 0,$$

joten $v_\ell \in \widehat{E}_\lambda(A)$ kaikilla $1 \leq \ell \leq k$. Koska $\widehat{E}_\lambda(A)$ on Proposition 4.3 nojalla aliavaruus, saadaan $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \widehat{E}_\lambda(A)$. □

4.2 Blokkidiagonaalimatriisit

Jos matriisi A on kirjoitettu alimatriisien B_{ij} avulla muodossa

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nm} \end{pmatrix},$$

niin A on **blokkimatriisi**.

Jos B_1, \dots, B_N ovat $n_1 \times n_1, \dots, n_N \times n_N$ -neliomatriiseja ja $\sum_{i=1}^N n_i = n$, niin matriiseista B_1, \dots, B_N muodostettu $n \times n$ -matriisi

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_N) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & B_N \end{pmatrix},$$

jossa loput $n^2 - \sum_{i=1}^N n_i^2$ kerrointa ovat nollia, on **blokkidiagonaalimatriisi**, jonka blokkeja ovat matriisit B_i . Blokin B_i **koko** on n_i .

Esimerkki 4.5. Esimerkin 4.2 matriisia A vastaavalla lineaarikuvauksella on kaksi invarianttia 2-ulotteista aliavaruutta $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ ja $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Lineaarikuvauksen $L|_V$ matriisi kannan v_1, v_2 ja lineaarikuvauksen $L|_W$ matriisi kannan w_1, w_2 suhteen on sama matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Asetetaan

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Siis invariantti lineaarikuvauksella $x \mapsto Ax$.

Tällöin

$$B = CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Lemma 4.6. $\exp \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N) = \text{diag}(\exp B_1, \exp B_2, \dots, \exp B_N)$.

Todistus. On helppo tarkastaa, että $\text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)^k = \text{diag}(B_1^k, B_2^k, \dots, B_N^k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, mistä väite seuraa. \square

Esimerkki 4.7. Olkoot A ja B ja C kuten Esimerkeissä 4.2 ja 4.5. Alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$$

ratkaisu on Lauseen 2.15 ja Lemman 4.5 nojalla $x(t) = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}$. Differentiaaliyhtälön

$\dot{y} = Ay$ ratkaisut ovat Proposition 2.19 nojalla funktiot $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$y(t) = Cx(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b + c + dt \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu toteuttaa ehdon $y(0) = (a, b + c, c, d)$, mikä pitää ottaa huomioon alkuarvot tehtävää ratkaistaessa.

4.3 Jordanin kanoninen muoto

Blokkidiagonaalimatriisi on (reaalinen) **Jordanin kanoninen muoto**, jos jokainen blokki on joko muotoa

$$(\lambda_i) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

jollain $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tai muotoa

$$C_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_{\lambda_i} & I_2 & & & \\ & C_{\lambda_i} & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & C_{\lambda_i} \end{pmatrix}$$

jollain $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Lause 4.8 (Jordanin hajotelma). *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ matriisin A reaaliset ja $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_M, \bar{\lambda}_M$ sen kompleksiset ominaisarvot. Tällöin*

(1) *Vektoriavaruudella \mathbb{C}^n on yleistetyistä ominaisvektoreista koostuva kanta*

$$v_1, \dots, v_k, w_1, \bar{w}_1, \dots, w_m, \bar{w}_m \in \mathbb{C}^n$$

jossa vektorit v_1, \dots, v_k ovat reaalisia ja vektorit w_1, \dots, w_m eivät ole reaalisia.

(2) *Olkoon*

$$K = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \text{Re } w_1 & \text{Im } w_1 & \cdots & \text{Re } w_m & \text{Im } w_m \end{pmatrix}.$$

Tällöin $K^{-1}AK$ on reaalinen Jordanin kanonisen muoto.

(2) *Olkoot a_i ja g_i ominaisarvon λ_i algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Reaalista ominaisarvoa λ_i vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on a_i . Kompleksista ominaisarvoparia $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on $2a_i$.*

Todistus. Katso [HJ, Thm. 3.4.5]. □

Jordanin kanonisen muodon ja Proposition 2.19 avulla moniulotteiset tapaukset voidaan palauttaa helpommin käsiteltävään muotoon.

Esimerkki 4.9. *Olkoon A reaalinen 3×3 -matriisi, jolla on yksi kompleksinen ominaisarvopari $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i$ ja yksi reaalinen ominaisarvo -1 . Tällöin A on Lauseen 4.8 mukaan matriisin*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

konjugaatti. Matriisia B vastaava differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Bx$ on helppo ratkaista, koska ensimmäiset kaksi koordinaattia muodostavat oman 2-ulotteisen systeeminsä: Kuvaus

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

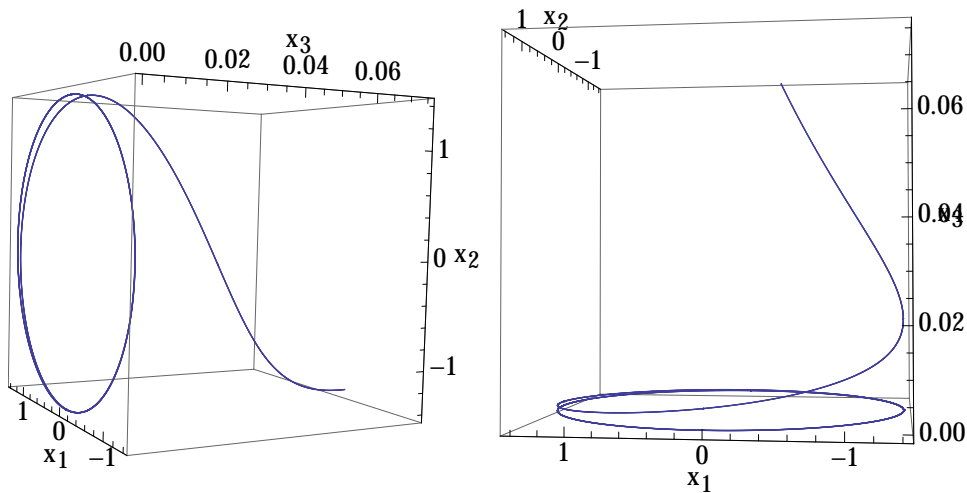
Jos $c = 0$, niin ratkaisu pysyy x_1x_2 -tasossa ja on $\sqrt{a^2 + b^2}$ -säteisen ympyrän parametrisointi kuten esimerkissä 1.3. Jos taas $a = b = 0$, niin ratkaisu pysyy x_3 -akselilla ja lähestyy origoa eksponentiaalisella vauhdilla. Yleisen tilanteen ratkaisukäyrä kulkee sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}$$

ja kasautuu kohti x_1x_2 -tason ympyrää

$$\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}.$$

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan Proposition 2.19 avulla. Jos $A = CBC^{-1}$ ja x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu, niin $y = Cx$ on differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisu. Jos alkuarvo on tasossa $T = C(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, jonka virittävät kompleksisia ominaisarvoja vastaavien ominaisvektorien reaali- ja imaginaariosista muodostetut vektorit, niin rata on tasoon T sisältyvä ellipsi, muussa tapauksessa radat kasautuvat kohti tällaisia ellipsejä tason T komplementista.



Kuva 4.1: Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisusta alkuarvolla $x(0) = (1, 1, 1)$, kun B on kaavan (4.1) matriisi.

Kun lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö $\dot{y} = Ay$ konjugoidaan muotoon $\dot{x} = Bx$, missä $B = C^{-1}AC$ on Jordanin kanonisessa muodossa, niin alkuperäinen differentiaaliyhtälö korvataan ekvivalentilla yhtälöllä, jonka ratkaiseminen on helppoa: Jos $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_M)$, niin differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu saadaan yhdistämällä kutakin blokkia vastaavien differentiaaliyhtälöiden $\dot{x}^{(j)} = B_j x^{(j)}$ ratkaisut $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$. Jos B_j on reaalista ominaisarvoa vastaava 1×1 -blokki tai kompleksista ominaisarvoa vastaava 2×2 -blokki, niin ratkaisu $x^{(j)}$ tiedetään aiemman perusteella.

Propositio 4.10. (1) Reaalista ominaisarvoa λ vastaavalle $n \times n$ -blokille pätee

$$\exp t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Kompleksista ominaisarvoa $\lambda = \alpha + i\beta$ vastaavalle $2n \times 2n$ -blokille pätee

$$\exp t \begin{pmatrix} \Lambda_\lambda & I_2 & & & \\ & \Lambda_\lambda & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda_\lambda \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R_\lambda & R_\lambda t & R_\lambda t^2/2 & \dots & R_\lambda t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & R_\lambda & R_\lambda t & \dots & R_\lambda t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & R_\lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & R_\lambda t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_\lambda \end{pmatrix},$$

kun

$$\Lambda_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Todistus. (1)²Olkoon $E^{ab} = (\delta_{ai}\delta_{bj})_{i,j=1}^n$ on matriisi, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on kohdassa ab . Näemme, että

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + N,$$

missä $N = \sum_{k=1}^{n-1} E^{k,k+1}$. Väite seuraa induktiolla tämän esityksen ja Lemman 2.16 nojalla. Yksityiskohdat jäävät harjoitustehtäväksi.

(2) Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 4.11 (Kytkeyt harmoniset värähtelijät). Olkoot $k, K > 0$. Olkoot kaksi yksikkömassaista kappaletta kitkattomalla tasolla kytketty kuten kuvassa vastakkaisiin seiniin ja toisiinsa jousilla siten, että kappaleen seinään kytkävän jousen jousivakio on $k > 0$ ja kappaleet toisiinsa kytkävän jousen jousivakio on $K > 0$. Olkoon x_1 vasemman kappaleen poikkeama systeemin tasapainotilasta oikealle ja olkoon x_2 oikean kappaleen poikkeama systeemin tasapainotilasta oikealle. Olkoon $x_3 = \dot{x}_1$ ja $x_4 = \dot{x}_2$. Tämän systeemin liikettä kuvaa lineaarinen differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k+K) & K & 0 & 0 \\ K & -(k+K) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriisin A karakteristinen polynomi on $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 + 2(k+K)\lambda^2 + k(k+2K)$ ja sen ominaisarvot ovat $\pm i\sqrt{k}$ ja $\pm i\sqrt{k+2K}$. Vastaavat kompleksiset ominaisvektorit ovat $(\mp \frac{i}{\sqrt{k}}, \mp \frac{i}{\sqrt{k}}, 1, 1)$ ja $(\mp \frac{i}{\sqrt{k+2K}}, \pm \frac{i}{\sqrt{k+2K}}, 1, -1)$. Lauseen 4.8 nojalla kannanvaihto matriisilla

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

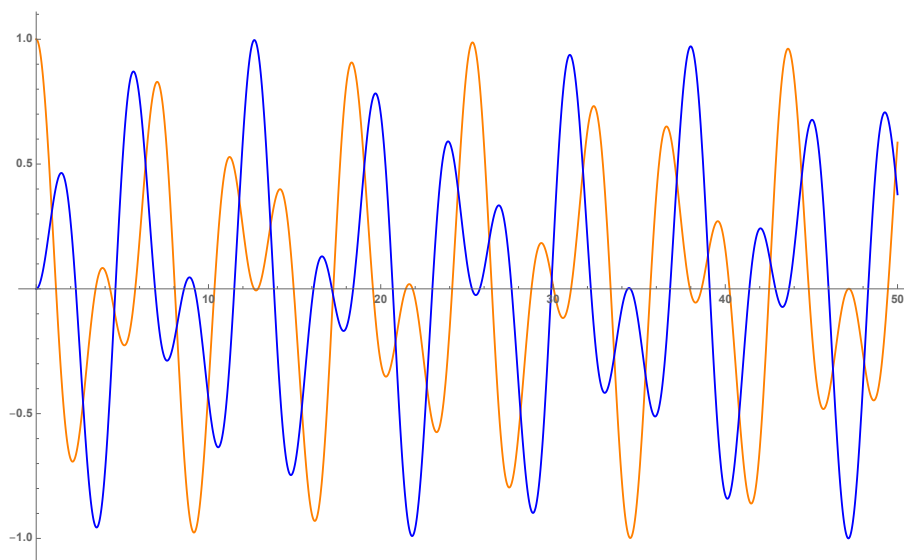
antaa blokkidiagonaalimatriisin

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k} & 0 & 0 \\ -\sqrt{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{k+2K} \\ 0 & 0 & -\sqrt{k+2K} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.10 nojalla Alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = By \\ y(0) = b \end{cases} \quad (4.2)$$

²Tapaukset $n \in \{2, 3\}$ käsiteltiin harjoitustehtävässä 2.6.



Kuva 4.2: Kytkeyn värähtelijöiden kappaleiden paikat ajan funktiona alkuarvolla $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1, 0, 0, 0)$, kun $k = K = 1$.

ratkaisu on

$$y_b(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k}t & \sin \sqrt{k}t & 0 & 0 \\ -\sin \sqrt{k}t & \cos \sqrt{k}t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \sqrt{k+2K}t & \sin \sqrt{k+2K}t \\ 0 & 0 & -\sin \sqrt{k+2K}t & \cos \sqrt{k+2K}t \end{pmatrix} b.$$

Proposition 2.19 nojalla alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ ratkaisu on $x_a(t) = Cy_{C^{-1}a}(t)$.

4.4 Mukautettu normi

Vektoriavaruuden V sisätulo $(\cdot | \cdot)$ määrää normin $\|\cdot\|$ asettamalla

$$\|v\| = \sqrt{(v | v)}$$

kaikille $v \in V$.

Seuraavaa tulosta käytetään epälineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopisteen tarkasteluun luvussa 6.

Propositio 4.12. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jos $\text{Re Sp } A \subset]m, M[$, niin avaruudessa \mathbb{R}^n on sisätulo $(\cdot | \cdot)$ ja sen määräämä normi $\|\cdot\|$, joille pätee*

$$m\|x\|^2 \leq (Ax | x) \leq M\|x\|^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Konjugoimalla voidaan olettaa, että A on Jordanin kanonisessa muodossa. Osoitetaan, että väite pätee jokaista blokkia vastaavassa aliavaruudessa. Väite seuraa tästä asettamalla nämä aliavaruudet keskenään ortogonaalisiksi.

Jos $A = (\lambda)$, niin kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee standardisätulolla $(Ax | x) = \lambda \|x\|^2$.

Jos $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, niin matriisin A ominaisarvot ovat $\alpha \pm i\beta$. Nyt standardisätulolle pätee

$$(Ax | x) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \alpha \|x\|^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$.

Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}),$$

niin tehdään tehdään kannanvaihto matriisilla $K = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$:

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \lambda & \delta & & & \\ & \lambda & \delta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \delta \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Standardisätulolle uudessa kannassa pätee

$$(Ax | x) = (\lambda x + \delta(x_2, x_3, \dots, x_n, 0) | x) = \lambda \|x\|^2 + \delta((x_2, x_3, \dots, x_n, 0) | x).$$

Cauchyn epäyhtälön nojalla $|((x_2, x_3, \dots, x_n, 0) | x)| \leq \|x\|^2$, joten

$$(\lambda - \delta)\|x\|^2 \leq (Ax | x) \leq (\lambda + \delta)\|x\|^2.$$

Valitsemalla $\delta > 0$ riittävän pieneksi saadaan haluttu arvio. Kompleksisen ominaisarvon tapaus todistetaan samaan tapaan. \square

Harjoitustehtäviä

4.1. Todista Propositio 4.1(1).

4.2. Todista Propositio 4.1(2).

4.3. Todista Propositio 4.3.

4.4. Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordanin kanoninen muoto.

4.5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (2, 0, 1) \end{cases}$.

4.6. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ kaikki ratkaisut.

4.7. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytymistä.

4.8. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytyminen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Piirrä kuvia.

4.9. Laske

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

4.10. Todista Propositio 4.10 (1).

4.11. Todista Propositio 4.10 (2).

4.12. Ratkaise Esimerkissä 4.11 käsitelty kytkettyjen harmonisten värähtelijöiden alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ alkuarvoilla $a = (r, r, 0, 0)$ ja $a = (r, -r, 0, 0)$, kun $r \in \mathbb{R}$.

Miten kytketyt massat liikkuvat näissä tilanteissa?

Luku 5

Epälineaariset differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tarkastelemme epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriaa. Todistamme olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen ja tarkastelemme ratkaisujen riippuvuutta alkuarvosta. Todistuksissa käytetään metrinen avaruuksien kieltä ja eräitä tärkeitä metrinen avaruuksien teorian tuloksia kuten Banachin kiintopistelausetta. Täydellisyyden vuoksi näiden tulosten todistukset on esitetty liitteessä C.

Monissa sovelluksissa päädytään tarkastelemaan epälineaarisia differentiaaliyhtälöitä:

Esimerkki 5.1 (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

missä $b \geq 0$ on kitkakerroin. Muutetaan tämä toisen asteen differentiaaliyhtälö yhtälöpariksi valitsemalla toiseksi muuttujaksi $v = \dot{\theta}$, jolloin saadaan epälineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Todistamme nyt Picardin ja Lindelöfin klassisen lauseen alkuarvot tehtävien ratkaisujen olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä. Klassinen todistus saa miellyttävän rakenteen, kun käytämme Liitteessä C käsiteltyjä metrinen avaruuksien käsitteitä ja tuloksia.

Lause 5.2 (OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva vektorikenttä. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvot tehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (5.2)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Olkoon $R > 0$ siten, että $\bar{B}(b, R) \subset U$. Olkoon $M = \max_{x \in \bar{B}(b, R)} \|f(x)\|$. Olkoon $0 < \delta < \min(\frac{1}{L}, \frac{R}{M})$. Täydellisen normiavaruuden $C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$ suljettu pallo

$$\mathcal{C} = \{\phi \in C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) : \|\phi - b\| \leq M\delta\}$$

on täydellinen metrinen avaruus.

Picardin operaattori on kuvaus $\mathcal{P}_{a,b}: C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds .$$

Tekemillämme valinnoilla pätee kaikille $\phi \in \mathcal{C}$

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - b\| = \left\| \int_a^t f(\phi(s))ds \right\| = \max_{t-a \leq \delta} \left\| \int_a^t f(\phi(t)) \right\| \leq M\delta < R ,$$

joten $\mathcal{P}_{a,b}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Voimme siis iteroida kuvausta $\mathcal{P}_{a,b}|_{\mathcal{C}}$.

Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

Lemma 5.3. *Kuvaus $\phi: [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on alkuarvotehtävän (5.2) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin $\mathcal{P}_{a,b}$ kiintopiste.*

Todistus. Kuvaus ϕ on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$\phi(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds . \quad (5.3)$$

Jos ϕ on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon $\phi(a) = b$. Lisäksi kuvaus ϕ on differentioituva ja toteuttaa ehdon $\dot{\phi}(t) = f(\phi(t))$ Proposition 1.2 nojalla.

Toisaalta, jos ϕ on alkuarvotehtävän (5.2) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, niin kaikilla $t \in]a - \delta, a + \delta[$ pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s)ds = \phi(t),$$

joten ϕ on kiintopiste. □

Lemma 5.4. *Picardin kuvaus on kutistava.*

Todistus.

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(\phi(s)) - f(\psi(s)))ds \right\| \leq \delta L \|\phi - \psi\| . \quad \square$$

Lemman 5.4 ja Lauseen C.3 mukaan Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 5.3 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (5.2) ainoa ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$. □

Seuraus 5.5 (Autonominen OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -kuvaus. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (5.4)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Kun f on jatkuvasti differentioituva ja $\bar{B}(b, R) \subset U$, niin $f|_{\bar{B}(b, R)}$ on L -Lipschitz-jatkuva jollain $L > 0$. Väite seuraa siis Lauseesta 5.2. \square

Esimerkki 5.6. Vaikka tarkastelemmekin lähinnä korkeampiulotteisia tilanteita, on hyvä muistaa, miten Picardin iteraatio antaa alkuarvottehtävän $\dot{y} = y$, $y(0) = 1$ ratkaisun: Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio $y_0(t) = 1$. Tällöin

$$y_1(t) = \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}.$$

Kuvausten y_k muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

5.2 Jatkuva riippuvuus alkuarvosta

Osoitamme seuraavaksi, että toisiaan riittävän lähellä olevia alkuarvoja vastaavat ratkaisut pysyvät jonkin aikaa lähellä toisiaan: Merkitään jatkossa alkuarvottehtävän $\dot{x} = f(x)$, $f(a) = b$ ratkaisua $x_{a,b}$.

Propositio 5.7. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ K -Lipschitz-jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on $\delta > 0$ ja $\eta > 0$, joille*

$$\|x_{a,b} - x_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \|x_{a,b}(t) - x_{a,b'}(t)\| < \varepsilon,$$

jos $\|b - b'\| < \eta$.

Todistus. Valitaan $\delta > 0$ kuten Lauseen 5.2 todistuksessa. Olkoon $b \in U$. Valitaan $\eta > 0$ siten, että $\bar{B}(b, R) \subset U$ kaikilla $b' \in \bar{B}(b, \eta)$. Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuarvolla b' on määritelty koko välillä $[a - \delta, a + \delta]$. Väite seuraa Propositioista C.4 valitsemalla $X = C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$, $Y = \mathbb{R}^n$ ja $F: X \times Y \rightarrow X$, $F(\phi, c) = \mathcal{P}_{a,c}(\phi)$. \square

Esimerkki 5.8. Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.9, 0)$ ja $x_1 = (0.8, 0)$ käyttäytyvät samaan tapaan (itse asiassa kaikilla $t \in \mathbb{R}$), kun taas alkuarvolla $x_2 = (1.1, 0)$ käyttäytyminen on erilaista kuin alkuarvoilla x_0 ja x_1 , kun t kasvaa.

Epälineaarinen differentiaaliyhtälö (5.5) voidaan ratkaista vaihtamalla napakoordinaatteihin: Yhtälöiden (B.1) avulla saadaan

$$\begin{aligned} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} &= -\frac{1}{2}(r - r^3) \cos \theta + r \sin \theta \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} &= -\frac{1}{2}(r - r^3) \sin \theta - r \cos \theta, \end{aligned}$$

Vertaamalla sinin ja kosinin kertoimia saadaan alkuperäisen kanssa ekvivalentti differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1)/2 \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Sama tulos saadaan tietenkin myös käyttämällä yhtälöitä (B.2).

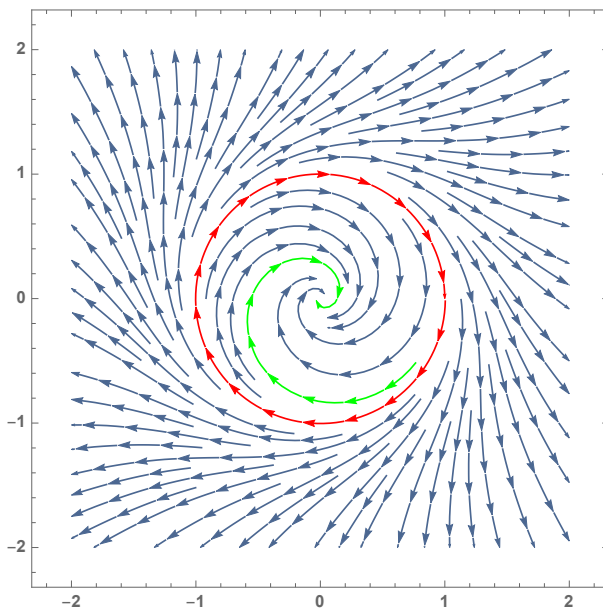
Kulmakomponentin ja radiaalisen komponentin yhtälöt siis eriytyvät. Ratkaisusta $\theta(t) = -t + \theta_0$ nähdään, että ratkaisut kiertävät origoa tasaisella kulmanopeudella.

Säteen differentiaaliyhtälöstä nähdään suoraan, että alkuarvoilla $r = 1$ ratkaisukäyrä on yksikköympyrän parametrisointi vakionopeudella. OY-lauseen nojalla ratkaisukäyrät eivät leikkaa toisiaan, joten yksikköympyrästä lähtevät ratkaisut pysyvät rajoitettuina yksikköympyrään.

Napakoordinaattimuodossa oleva yhtälö (5.6) voidaan ratkaista eksplisiittisesti:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^t(1 - r_0^2)}} \\ \theta(t) = \theta_0 - t \end{cases}$$

on ratkaisu alkuarvolla $(r(0), \theta(0)) = (r_0, \theta_0)$.



Propositio 5.9. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä ja olkoon $x_0 \in U$. Olkoon x alkuarvotekstävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

ratkaisu. Oletetaan, että $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in U$. Tällöin x_∞ on differentiaaliyhtälön (5.7) tasapainopiste.

5.3 Maksimaalinen määrittelyväli

Propositio 5.10. *Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on Lipschitz-jatkuva. Tällöin alkuarvotettävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} .

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Silloinkin, kun differentiaaliyhtälö on määritelty koko avaruudessa \mathbb{R}^n , niin maksimaalinen määrittelyväli voi olla pienempi kuin koko \mathbb{R} , jos f ei ole Lipschitz-jatkuva, kuten Esimerkeissä 1.1 ja 5.8 käsitetyjen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen käyttäytyminen osoittaa.

Esimerkki 5.11. Alkuarvotettävää

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2/x_3^2 \\ x_1/x_3^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1/\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/\pi \end{pmatrix}$$

on luonnollista tarkastella joukossa $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, koska vektorikenttä on määritelty hypertason $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ komplementissa. Tämän alkuarvotettävän ratkaisu voidaan itse asiassa antaa helposti:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on $]0, \infty[$. Ratkaisukäyrä on sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ja kun $t \rightarrow 0$, niin ratkaisukäyrä kasautuu kohti ympyrää

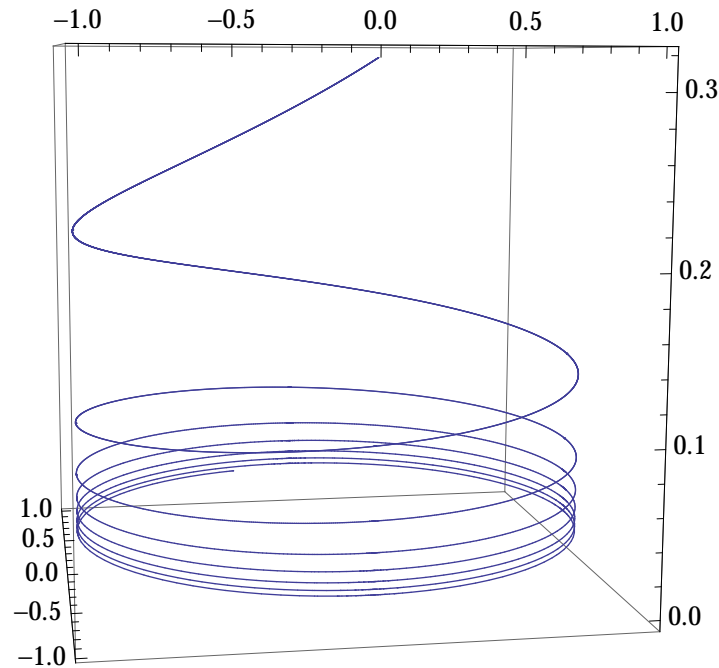
$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Olkoon seuraavissa tuloksissa $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä ja olkoon $]\sigma, \tau[$ alkuarvotettävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.8)$$

maksimaalinen määrittelyväli. Tässä $\sigma < 0 < \tau$, $\sigma \in [-\infty, \infty[$ ja $\tau \in]-\infty, \infty]$

Propositio 5.12. *Olkoon $K \subset U$ kompakti. Jos $\tau < \infty$, niin on $t \in]0, \tau[$, jolle $x(t) \notin K$. Jos $\sigma > -\infty$, niin on $t \in]\sigma, 0[$, jolle $x(t) \notin K$.*



Todistus. Tarkastellaan vain ylhäältä rajoitetun maksimaalisen määrittelyvälin tapaus, alhaalta rajoitettu tilanne todistetaan samalla tavalla. Koska K on kompakti ja f on jatkuva, niin on $M > 0$, jolle

$$\max_{x \in K} \|f(x)\| \leq M.$$

Oletetaan, että $x(t) \in K$ kaikilla $t \in [0, \tau[$. Tällöin kaikille $0 < t_1 < t_2 < \tau$ pätee

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|,$$

joten ratkaisu on M -Lipschitz-jatkuva välillä $[0, \tau[$ ja sillä on raja-arvo

$$x_\tau = \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) \in K.$$

Nyt

$$\begin{aligned} x_\tau &= \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) = x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t \dot{x}(s) ds \\ &= x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t f(x(s)) ds = x(0) + \int_0^\tau f(x(s)) ds. \end{aligned}$$

Ratkaisu x voidaan jatkaa differentioituvaksi kuvaukseksi päättepisteeseen τ saakka lausekkeella

$$x(t) = x_0 + \int_0^\tau f(x(s)) ds,$$

erityisesti $\dot{x}(\tau) = f(x(\tau)) = f(x_\tau)$. Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\tau) = x_\tau \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä $]\tau - a, \tau + a[$, joten ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla alkuarvotehtävällä (5.8) olisi siis ratkaisu välillä $]\sigma, \tau + a[$, mikä taas on välin $]\sigma, \tau[$ maksimaalisuuden kanssa ristiriidassa. \square

Seuraus 5.13. Olkoon $K \subset U$ kompakti ja olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli on $]\sigma, \tau[$. Jos $x(t) \in K$ kaikilla $t \geq 0$, niin $\tau = \infty$.

Todistus. Väite on yhtäpitävä Proposition 5.12 kanssa siirtymällä negaatioihin. \square

Seuraus 5.14. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli $]\sigma, \tau[$ on ylhäältä rajoitettu. Jos $x(t)$ suppenee, kun $t \rightarrow \tau-$, niin $\lim x(t)_{t \rightarrow \tau-} \in \partial U$.

Todistus. Harjoitustehtävä. \square

5.4 Vakion variointi

Jos epäautonominen differentiaaliyhtälö $\dot{x} = f(x, t)$ muunnetaan autonomiseksi, tuloksena ei ole koskaan ole lineaarinen autonominen yhtälö; jo aikaparametrin $x_{n+1} = t$ differentiaaliyhtälö $\dot{x}_{n+1} = 1$ tekee yhtälöstä

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases} .$$

epälineaarisen. Tämän vuoksi seuraava tulos laajentaa aidosti niiden differentiaaliyhtälöiden joukkoa, joille tunnemme ratkaisun ainakin periaatteessa eksplisiittisesti.

Propositio 5.15 (Vakion variointi). Olkoon A $n \times n$ -matriisi ja olkoon $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Kuvaus

$$x(t) = \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right)$$

on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu, kun $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Olkoon x kuten väitteessä. Lemman 2.13 ja analyysin peruslauseen nojalla saamme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right) + x(t) \\ &= \exp(tA) \exp(-tA) G(t) = Ax(t) + G(t). \end{aligned} \quad \square$$

Esimerkki 5.16 (Pakotettu vaimeneva värähtelijä). Esimerkissä 3.4 kuvatun vaimenevan värähtelijän jousen päässä liikkuvaan painoon vaikuttaa nyt jokin ulkoinen voima $g(t)$, joka aiheuttaa ajasta mutta ei paikasta riippuvan kiihtyvyyden. Epäautonomisen alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m} y_1 - \frac{b}{m} y_2 + g(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

ratkaisu saadaan Lauseen 5.15 avulla. Nyt siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

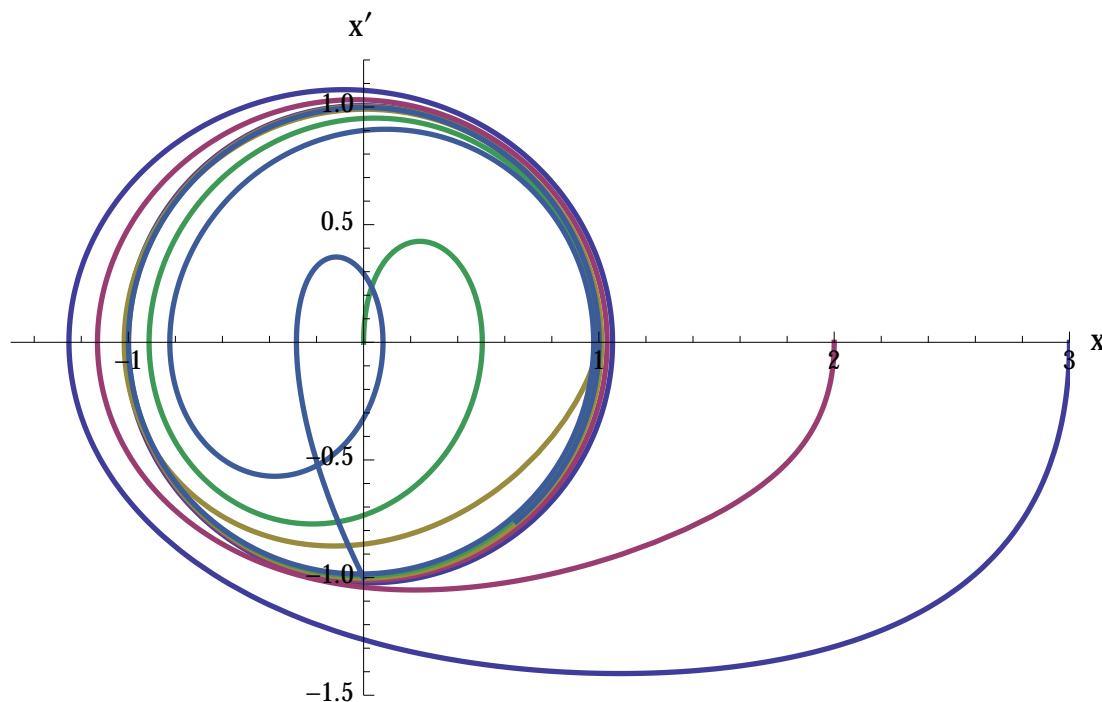
ja

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

ja alkuarvotehtävän (5.9) ratkaisu on

$$y(t) = \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds. \quad (5.10)$$

Tarkastellaan erityisesti tilannetta, jossa pakottava voima on jaksollinen $g(t) = \cos(t)$. Tällaisella differentiaaliyhtälöllä kuvataan esimerkiksi vaihtovirralla ajettuja RLC-piirejä.



Kuva 5.1: Pakotettu vaimeneva värähtelijä parametreillä $m = k = b = 1$ alkuarvoilla $y(0) = (3, 0)$, $y(0) = (2, 0)$, $y(0) = 0$, $y(0) = (1, 0)$, $y(0) = (0, -1)$. Kuvassa $t \in [0, 15]$.

Numeerisesti laskettuja esimerkkejä tarkastelemalla näyttäisi siltä, että alkuarvosta riippumatta ratkaisut lähestyvät samaa ympyrää, jonka koko riippuu vaimenevan värähtelijän parametreista.

Kuvasta 5.1 huomaamme myös, että epäautonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyrät voivat leikata itseään “epät triviaalilla tavalla”. Jos korvaamme differentiaaliyhtälön (5.9) autonomisella yhtälöllä ottamalla ajan kolmanneksi muuttujaksi ja lisäämällä yhtälöön ehdon $\dot{t} = 1$, niin kuva 5.1 esittää tämän uuden yhtälön ratkaisun projektiota mihin

tahansa aika-akselia vastaan kohtisuoraan tasoon. OY-lauseen mukaan uuden yhtälön ratkaisukäyrät eivät leikkaa itseään vaikka niiden projektiot näin tekevätkin.

Tarkasteltavassa alkuarvot tehtävässä (5.9) pakottava termi on 2π -jaksollinen. Siis, jos tämän alkuarvot tehtävän ratkaisulle pätee $y(2\pi) = y_0 = y(0)$, niin ratkaisu y on 2π -jaksollinen. Osoitetaan, että tehtävällä on täsmälleen yksi 2π -jaksollinen ratkaisu: Jos $y(2\pi) = y_0$, niin

$$y_0 = \exp(2\pi A)y_0 + \exp(2\pi A) \int_0^{2\pi} \exp(-sA)G(s)ds = \exp(2\pi A)y_0 + w,$$

joten alkuarvo y_0 vastaa 2π -jaksollista rataa, jos ja vain jos se on yhtälön

$$(I_2 - \exp(2\pi A))y_0 = w \tag{5.11}$$

ratkaisu. Matriisin A ominaisarvojen $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$ reaali-osat ovat negatiivisia, joten matriisin $\exp A$ ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1, erityisesti siis kumpikaan niistä ei ole 1. Siis matriisi $\exp(2\pi A) - I$ on kääntyvä ja yhtälöllä (5.11) on täsmälleen yksi ratkaisu $y_0 = (I_2 - \exp(2\pi A))^{-1}w \in \mathbb{R}^2$.

Esimerkiksi, jos $m = k = b = 1$, niin $y(t) = (\sin t, \cos t)$ on alkuarvot tehtävän (5.9) 2π -jaksollinen ratkaisu alkuarvolla $(0, 1)$.

Osoitetaan lopuksi, että muut ratkaisut käyttäytyvät havaitulla tavalla: Jos $z_0 \in \mathbb{R}^2$, niin alkuarvot tehtävän (5.9) ratkaisu alkuarvolla z_0 on

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(tA)z_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + y(t), \end{aligned}$$

missä $y(t)$ on edellä löydetty 2π -jaksollinen ratkaisu. Termi $\exp(tA)(z_0 - y_0)$ lähestyy nollaa, kun $t \rightarrow \infty$ koska se on vaimenevan värähtelijän differentiaaliyhtälön alkuarvot tehtävän (3.6) ratkaisu alkuarvolla $z_0 - x_0$, kun $b > 0$.

Harjoitustehtäviä

5.1. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x(0) = p$$

kaikille $p \in \mathbb{R}^2$.¹

5.2. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x(0) = p$$

kaikille $p \in \mathbb{R}^2$.²

¹Katso Esimerkkiä 5.8.

²Katso Esimerkkiä 5.8.

5.3. Iteroi Picardin operaattoria kolme kertaa alkuarvotehtävälle

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.4. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva. Osoita OY-lauseen ja sen todistuksen avulla, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on ratkaisu, joka on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

5.5. Todista Propositio 5.9.

5.6. Olkoon $0 < \tau < \infty$ ja olkoon $g: [0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva kuvaus. Osoita, että sillä on vasen raja-arvo $\lim_{t \rightarrow \tau^-} g(t)$.

5.7. Todista Seuraus 5.14.

5.8. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 1 \\ x(0) = (1, 0). \end{cases}$$

5.9. Olkoon³

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ja olkoon

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

³Muista Harjoitustehtävä 4.6

Luku 6

Epälineaarisen yhtälön ratkaisuista

Tässä luvussa tutustumme joihinkin menetelmiin, joiden avulla differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä voi ymmärtää ratkaisematta yhtälöä. Erityisesti tarkastelemme differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteen ympäristöä epälineaarisen vektorikentän f tapauksessa.

6.1 Tason yhtälön ratkaisukäyrien etsiminen separoimalla

Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ja olkoot $1 \leq k \leq n$. Joukot

$$N_k(f) = \{x \in U : f_k(x) = 0\},$$

ovat vektorikentän f **nollakliinit**.

Lemma 6.1. *Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Joukko $\bigcap_{k=1}^n N_k(f)$ on vektorikentän f tasapainopisteiden joukko.* \square

Nollakliinit jakavat joukon U osiin, joissa kullakin ratkaisun osittaisderivaatalla on kiinteä merkki. Joissain tilanteissa tämä jako auttaa vektorikentän määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisujen tarkastelussa. Esimerkiksi tason tapauksessa vektorikenttä on vaakasuora nollakliinilla $N_2(f)$ ja pystysuora nollakliinilla $N_1(f)$.

Tason differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \end{cases}$$

ratkaisuja voi yrittää löytää seuraavalla menetelmällä: Jos $x(t_0) \notin N_1(f)$, niin $\dot{x}_1(t_0) \neq 0$. Tällöin funktio x_1 on bijektio jossain pisteen $x_1(t_0)$ ympäristössä, jossa $\frac{d}{dt}x_1^{-1}(x_1(t)) = \frac{1}{\dot{x}_1(t)}$. Siis differentiaaliyhtälön $\frac{d}{dt}x_2 \circ x_1^{-1} = \frac{f_2}{f_1}$ ratkaisut antavat komponenttifunktioiden x_1 ja x_2 riippuvuuden alkuarvon lähellä. Vastavasti, jos $x(t_0) \notin N_2(f)$, niin saadaan

differentiaaliyhtälö $\frac{d}{dt}x_1 \circ x_2^{-1} = \frac{f_1}{f_2}$. Yleensä ensimmäinen näistä yhtälöistä kirjoitetaan muodossa

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Joissain tilanteissa, kun näin saatu differentiaaliyhtälö separoituu, se saadaan ratkaistua niin, että ratkaisukäyrälle saadaan yhtälö. Tällä tavalla ei kuitenkaan saada ratkaisun lauseketta eli sitä, millä nopeudella ratkaisu parametrizoi ratkaisukäyrän.

Esimerkki 6.2 (Lotkan ja Volterran yhtälö). Tarkastellaan esimerkkiä differentiaaliyhtälöiden käytöstä biologisen tilanteen mallittamisessa. Meressä on kahdenlaisia kaloja: haikaloja ja hainruokaa.

Olkoon haikalojen lukumäärä h ja hainruoan lukumäärä r . Oletetaan, että ilman haikaloja hainruoan populaatio kehittyisi Esimerkissä 1.1(1) käsitellyn Malthusin lain mukaan eksponentiaalisesti yhtälön $\dot{r} = \alpha r$ mukaan, missä α on positiivinen vakio. Haikalojen ja hainruoan kohtaamisia tapahtuu $\beta_0 hr$ kappaletta ja jollain todennäköisyydellä β_1 hai syö hainruoan. Siis hainruoan määrä vähenee nopeudella βhr . Vastaavasti haikalojen lukumäärän luonnollinen poistumanopeus on suhteessa lukumäärään γh ja ruoan saanti kasvattaa populaatiota nopeudella δhr . Näiden kahden lajin lukumääriä säätelee tämän päättelyn mukaisesti differentiaaliyhtälöpari

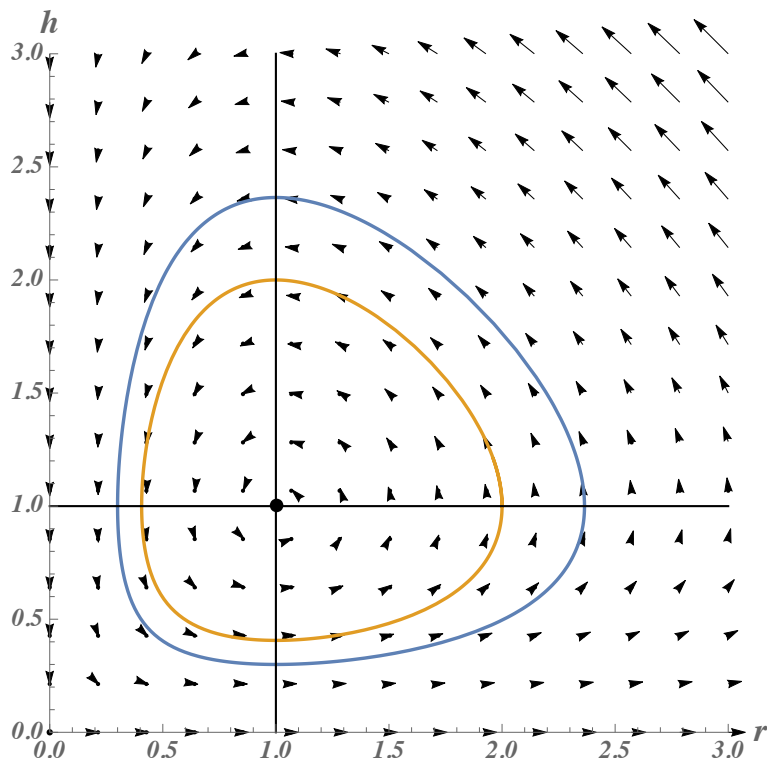
$$\begin{cases} \dot{r} = (\alpha - \beta h)r, \\ \dot{h} = (-\gamma + \delta r)h \end{cases} \quad (6.1)$$

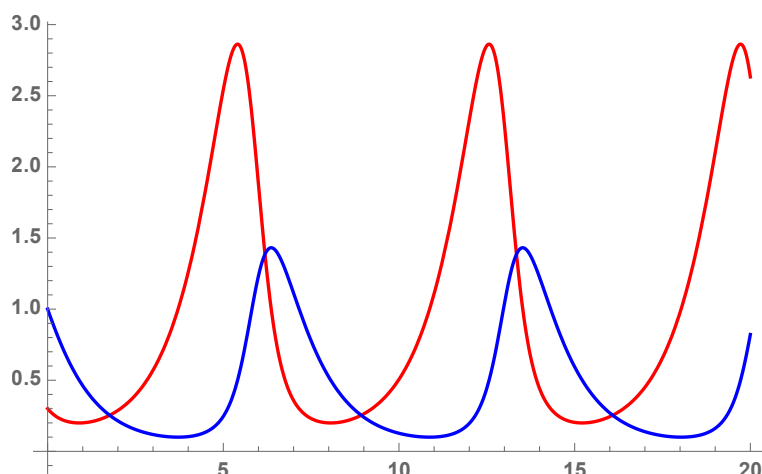
joillain vakioilla $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

On helppo nähdä, että alkuarvoa $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ vastaa vakioratkaisu: $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on vektorikentän

$$f(r, h) = ((\alpha - \beta h)r, (\delta r - \gamma)h),$$

tasapainopiste.





Kuva 6.1: Hain ja hainruoan populaatioiden kehitys alkuarvoilla $r_0 = 0.3$, $h_0 = 1$ ja parametreilla $a = c = d = 1$, $b = 2$.

Etsitään differentiaaliyhtälön (6.1) ratkaisukäyrät edellä kuvatulla menetelmällä. Yhtälön $r = \frac{\gamma}{\delta}$ määräämän h -nollakliinin komplementissa saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dr}{dh} = \frac{(\alpha - \beta h)r}{(-\gamma + \delta r)h}.$$

Tämä on separoituva yhtälö, joka on helppo ratkaista (implisiittisesti): Ratkaisut toteuttavat yhtälön $\delta r + \beta h - \gamma \log r - \alpha \log h = C_0$ jollain vakiolla $C_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $L_0: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,

$$L_0(r, h) = \delta r + \beta h - \gamma \log r - \alpha \log h.$$

Toisen derivaatan testillä näkee helposti, että tasapainopiste $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on funktion L_0 globaali minimi. Olkoon

$$L(r, h) = L_0(r, h) - L_0(\gamma/\delta, \alpha/\beta).$$

Funktion L tasa-arvojoukot $L^{-1}(T)$, $T > 0$, ovat topologisia ympyröitä, jotka eivät sisällä yhtään vektorikentän f tasapainopistettä. Seurauksen 5.13 nojalla alkuarvotettävän maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} jokaisella alkuarvolla $(r_0, h_0) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$. Proposition 5.9 nojalla ratkaisut ovat syklisiä. Jokaisen pisteen rata sisältyy topologiseen ympyrään, jota ratkaisu kiertää pysähtymättä.

6.2 Tasapainopisteen vakaus

Lotkan ja Volterran yhtälön jaksolliset ratkaisut kiertävät tasapainopistettä suljetuilla radoilla. Erityisesti, jos alkuarvo valitaan läheltä tasapainopistettä, niin rata pysyy lähellä tasapainopistettä.

Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä. Vektorikentän f tasapainopiste b on **vakaa**,^a jos jokaiselle pisteen b avoimelle ympäristölle $V \subset U$ on pisteen b avoin ympäristö $W \subset V$ siten, että jokaisen alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \in W \end{cases}$$

ratkaisun x_p maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton ja $x_p(t) \in W$ kaikilla $t \geq 0$.

Jos tasapainopiste b ei ole vakaa, se on **epävakaa**.

^a **stabiili**

Esimerkki 6.3. (1) Lotkan ja Volterran yhtälön tasapainopiste $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on vakaa.

(2) Tason lineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopiste 0 on vakaa, jos se on nielu, spiraalinielu, surkastunut nielu tai keskus. Se on epävakaa, jos se on lähde, surkastunut lähde, spiraalilähde tai satula.

(3) Origo on Esimerkin 5.8 differentiaaliyhtälön ainoa tasapainopiste. Napakoordinaateissa kirjoitetusta ratkaisusta

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^t(1 - r_0^2)}} \\ \theta(t) = \theta_0 - t \end{cases}$$

näkee helposti, että $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$, kun alkuarvo on avoimessa yksikkökierokossa. Siis 0 on vakaa tasapainopiste.

Tasapainopiste b on **asymptoottisesti vakaa**, jos b on vakaa ja on pisteen b avoin ympäristö W , jolle $x_p(t) \rightarrow b$ kaikille $p \in W$, kun $t \rightarrow \infty$.

Esimerkki 6.4. (1) Tason lineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopiste 0 on vakaa, jos se on nielu, spiraalinielu tai surkastunut nielu. Vakauden voi selvittää ominaisarvojen avulla: Tasapainopiste 0 on asymptoottisesti vakaa, jos molempien ominaisarvojen reaali-osat ovat negatiivisia ja epävakaa, jos ainakin toisen ominaisarvon reaaliosa on positiivinen. Jos ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia, niin 0 on vakaa mutta ei asymptoottisesti vakaa.

(2) Origo on Esimerkin 5.8 differentiaaliyhtälön asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.

6.3 Linearisointi

Tässä luvussa tarkastelemme menetelmää, jolla useissa tilanteissa voidaan päätellä, että tasapainopiste on asymptoottisesti vakaa tai epävakaa.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $b \in U$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste (siis $f(b) = 0$). Lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = Df(b)(x - x_0)$$

on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ **linearisointi** pisteessä b .

Lause 6.5. *Olkoon $b \in \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat pienempiä¹ kuin $-c$ jollain $c > 0$, niin b on asympotoottisesti vakaa ja on $\delta > 0$ siten, että kaikilla $p \in \overline{B}(b, \delta)$ alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton ja sen ratkaisu x_p toteuttaa

$$\|x_p(t) - b\| \leq e^{-ct} \|p - b\|$$

kaikilla $t \geq 0$.

Todistus. Oletetaan yksinkertaistamiseksi, että $b = 0$. Valitaan koordinaatit siten, että $A = Df(0)$ on Jordanin kanonisessa muodossa ja että standardisätulolle ja sen määräämälle normille pätee $(Ax | x) \leq -M\|x\|^2$ jollain $M > c > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.²

Koska f on differentioituva, sille pätee $\|f(x) - Df(0)x\| = o(x)$, kun $x \rightarrow 0$. Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$|(f(x) - Ax | x)| \leq o(x)\|x\| = o(\|x\|^2),$$

kun $x \rightarrow 0$, joten on $\delta > 0$ siten, että $(f(x) | x) \leq -c\|x\|^2$, kun $\|x\| \leq \delta$.

Olkoon $\phi: [0, t_0] \rightarrow U$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, jonka kuvajoukko sisältyy joukkoon $\overline{B}(0, \delta) - \{0\}$. Aiemmilta kursseilta muistamme, että

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\| = \frac{(\dot{\phi}(t) | \phi(t))}{\|\phi(t)\|}.$$

Koska ϕ on ratkaisu, saamme edellä tehtyjen laskujen nojalla

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\| = \frac{(f(\phi(t)) | \phi(t))}{\|\phi(t)\|} \leq \frac{-c\|\phi(t)\|^2}{\|\phi(t)\|^2} = -c\|\phi(t)\|. \quad (6.2)$$

Siis kuvaus $t \mapsto \|\phi(t)\|$ on vähenevä, joten koko ratkaisu sisältyy kompaktiin joukkoon $\overline{B}(0, \delta)$. Proposition 5.13 nojalla määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton.

Epäyhtälön (6.2) nojalla

$$\frac{d}{dt} \log \|\phi(t)\| = \frac{\frac{d}{dt} \|\phi(t)\|}{\|\phi(t)\|} \leq -c,$$

mistä viimeinen väite seuraa integroimalla. □

¹aidosti!

²Katso Propositio 4.12.

Seuraus 6.6. Olkoon $b \in C^1$ -vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat suurempia kuin c jollain $c > 0$, niin b on epävakaata ja on $\delta > 0$ siten, että kaikilla $p \in \overline{B}(b, \delta)$ alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on alhaalta rajoittamaton ja sen ratkaisu x_p toteuttaa

$$\|x_p(t) - b\| \leq e^{ct} \|p - b\|$$

kaikilla $t \leq 0$.

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 6.5 tarkastelemalla vektorikenttää $-f$. □

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $b \in U$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksella $Df(b)$ ei ole ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolla, niin tasapainopiste b on **hyperbolinen**.

Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia, niin b on **nielu**.

Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat positiivisia, niin b on **lähde**.

Esimerkki 6.7. Esimerkissä 5.8 tarkastellun differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

ainoa tasapainopiste on 0. Linearisoitu yhtälö on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x = Ax$$

Matriisin A ominaisarvot ovat $-\frac{1}{2} \pm i$, joten origo on hyperbolinen tasapainopiste, linearisaatio on spiraalinielu. Lausetta 6.5 voi soveltaa ratkaisujen tutkimiseen ja sen mukaan 0 on asympotoottisesti vakaa tasapainopiste.

Esimerkki 6.8 (Tasapainopiste, joka ei ole hyperbolinen). Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1 \|x\|^2 \\ x_1 + \varepsilon x_2 \|x\|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

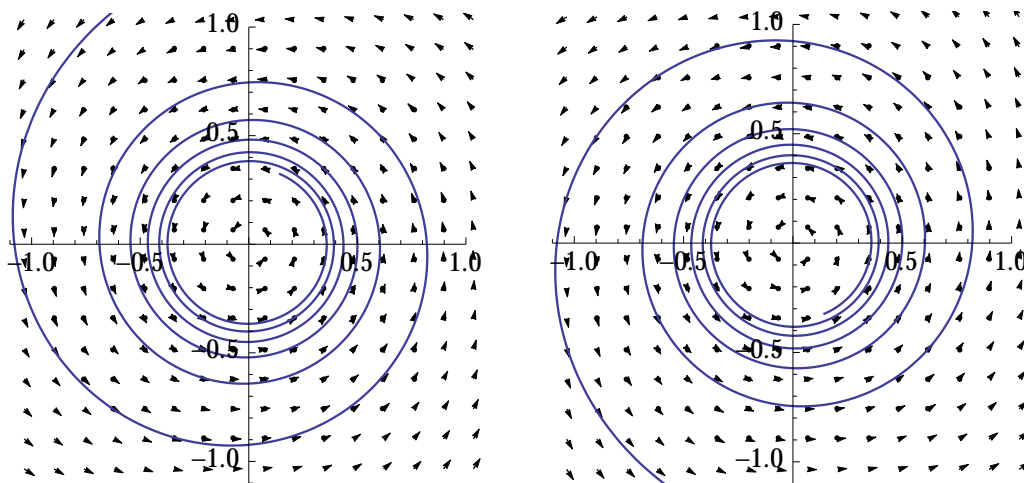
ainoa tasapainopiste on 0. Sen linearisaatio on kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sama yhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Linearisaation kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\pm i$, joten Lausetta 6.5 ei voi soveltaa. Differentiaaliyhtälö (6.4) on napakoordinaattimuodossa

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^3 \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

joten 0 on asymptoottisesti vakaa, kun $\varepsilon < 0$, vakaa, kun $\varepsilon \leq 0$ ja epävaka, kun $\varepsilon > 0$.



Kuva 6.2: Pisteiden $(\frac{1}{2}, 0)$ radan osia, kun $\varepsilon = -0.1, 0.1$.

Tässä esimerkissä tarkasteltavat differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista eksplisiittisesti ja ratojen käyttäytyminen voitiin selvittää. Tämä on kuitenkin poikkeuksellista, yleensä joudutaan tyytymään ratkaisun tarkastelemiseen muilla keinoilla.

6.4 FitzHughin ja Nagumon yhtälö.

Kurssin viimeisessä luvussa tarkastelemme esimerkkiä neurotieteen alalta. Tutkimme ratkaisujen käyttäytymistä nollaklinien ja linearisoinnin avulla.

Esimerkki 6.9 (FitzHughin ja Nagumon yhtälö). FitzHugh [Fit] päätyi 1960-luvulla tarkastelemaan tason differentiaaliyhtälöä joka yksinkertaistaa kalmarin suuren hermo-säikeen toimintaa kuvaavaa Hodgkinin ja Huxleyn mallia.³ Yleisin FitzHughin ja Nagumon yhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} c(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2 + z(t)) \\ -\frac{1}{c}(x_1 - a + bx_2) \end{pmatrix},$$

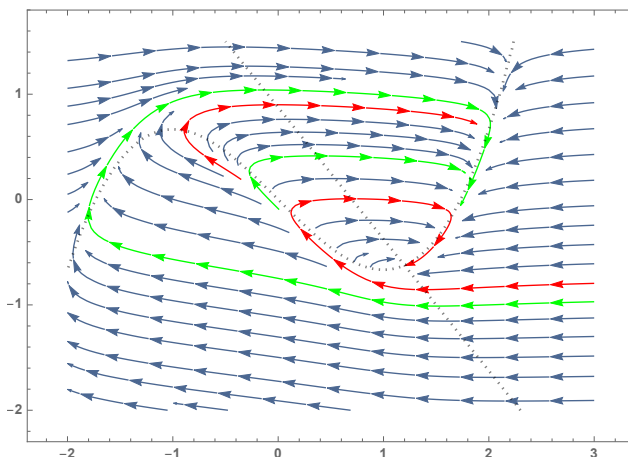
missä a , b ja c ovat vakioita, joille pätee $0 < b < 1$, $1 - \frac{2b}{3} < a < 1$ ja $b < c^2$, ja z on ajasta riippuva ärsykefunktio. Tässä esimerkissä keskitymme tapaukseen, jossa z on

³Nagumo yhteistyökumppaneineen tarkasteli FitzHughin esittelemää mallia, jota tuolloin kutsuttiin BVP-yhtälöksi seuraavana vuonna. Myöhemmin yhtälöä alettiin kutsua nykyisellä nimellä.

vakiofunktio, jolloin tarkastelemme vektorikentän $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

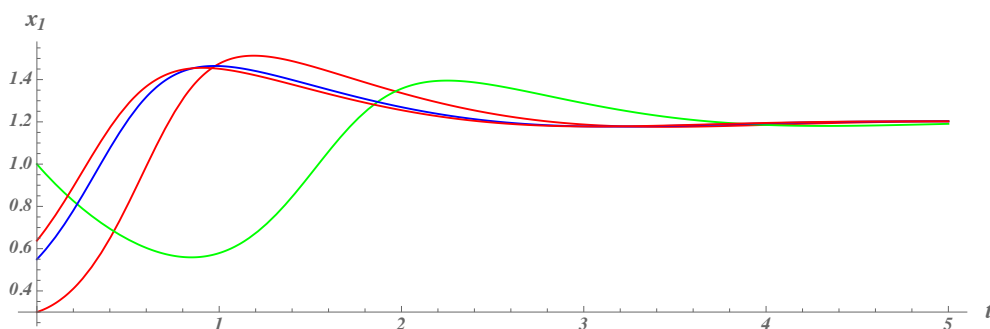
$$f(x) = \begin{cases} c\left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2 + z\right) \\ -\frac{1}{c}(x_1 - a + bx_2) \end{cases},$$

määräämää autonomista epälineaarista differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = f(x)$.



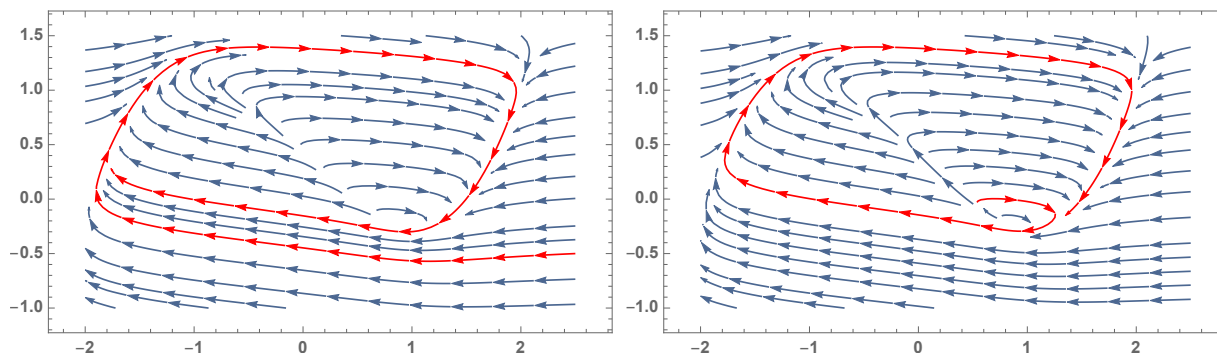
Kuva 6.3: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisuja parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$. Nollakliinit on kuvattu pisteviivoilla. Kaikki ratkaisut näyttävät päätyvän tasapainopisteeseen, kun $t \rightarrow \infty$.

Tarkastellaan tapausta $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$. Tällöin on helppo nähdä nollakliinien avulla, että vektorikentällä f on vain yksi nollakohta $x \approx (1.19, -0.64)$. Tässä pisteessä vektorikentän linearisoinnin ominaisarvot ovat $\approx -0.79 \pm 0.85i$, joten tasapainopiste on nielu ja sen linearisointi on erityisesti spiraalinielu. Tässä tilanteessa tasapainossa oleva systeemi palaa melko nopeasti takaisin tasapainoon, jos sitä häiritään. Kuvat 6.3 ja 6.4 havainnollistavat ratkaisujen käyttäytymistä.



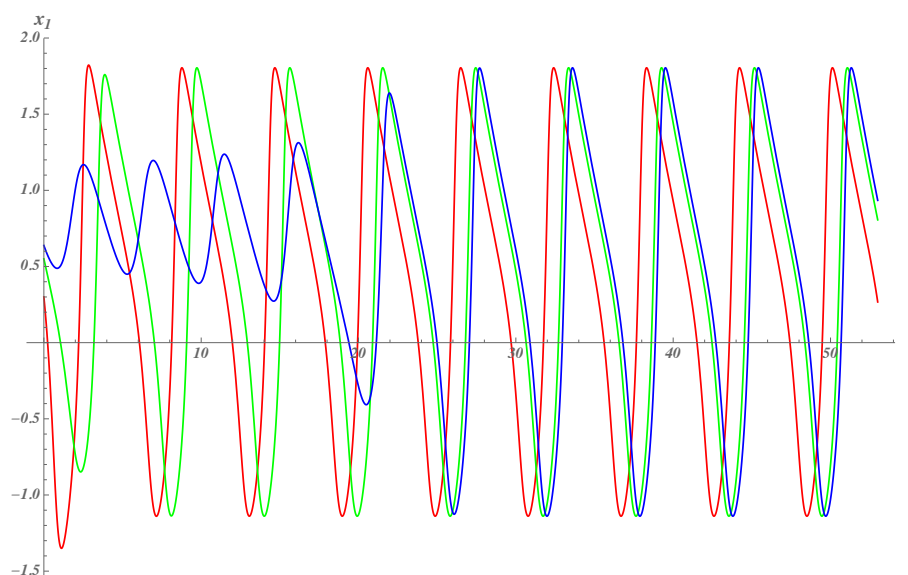
Kuva 6.4: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisujen ensimmäisen koordinaatin käyttäytyminen eri alkuarvoilla parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$.

Kun $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$, vektorikentän f ainoa tasapainopiste on $\approx (0.86, -0.20)$. Tässä pisteessä vektorikentän linearisoinnin ominaisarvot ovat $\approx 0.26 + 0.85i$, joten tasapainopiste on epävaka. Kuitenkaan kaikki radat eivät poistu äärettömyyksiin vaan näyttää siltä, että differentiaaliyhtälöllä $\dot{x} = f(x)$ on näillä parametreilla jaksollinen rata, joka kiertää tasapainopistettä. Koska ratkaisukäyrät eivät leikkaa epätriviaalisti, tasapainopisteen läheltä lähtevät ratkaisut pysyvät kompaktissa joukossa, joten radat kasautuvat jonnekin. Osoittautuu, että radat kasautuvat kohti puoleensavetävää jaksollista rataa.



Kuva 6.5: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisuja parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$. Kaikki kuvatut ratkaisut näyttävät lähestyvän jaksollista rataa, kun $t \rightarrow \infty$.

Tällaisessa systeemissä havaitaan jaksollista käyttäytymistä. Toisella jatkokurssilla perehdymme tarkemmin differentiaaliyhtälöiden asymptotiseen käyttäytymiseen ja siihen, miten ratkaisukäyrät voivat kasautua.



Kuva 6.6: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisujen ensimmäisen koordinaatin arvoja kolmella alkuarvolla parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$.

Harjoitustehtäviä

6.1. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = (x_1, \|x\|^2 - 1).$$

- Etsi differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteet.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Hahmottele vektorikenttää f ja kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisujen käyttäytymistä käsin tai Mathematicalla.

6.2. Olkoon $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -funktio. Osoita, että differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -\nabla V$ linearisoinneilla tasapainopisteissä on vain reaalisia ominaisarvoja.⁴

6.3. Olkoon $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2.$$

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = -\nabla V(x)$.

- Määritä differentiaaliyhtälön tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö tasapainopisteissä.
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Miten vektorikenttä $-\nabla V$ ja funktion V tasa-arvokäyrät suhtautuvat toisiinsa?
- Hahmottele differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä.

6.4. Analysoi epälineaarisen heilurin differentiaaliyhtälön (5.1) tasapainopisteiden linearisoinnit kitkan b eri arvoilla. Mitä tapahtuisi, jos kitkaa kuvaava parametri olisikin negatiivinen?

6.5. Määritä kitkattoman epälineaarisen heilurin differentiaaliyhtälön (5.1) ratkaisukäyrät. Miten alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta \\ v(0) = 2 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

ratkaisut käyttäytyvät, kun $t \rightarrow -\infty$ ja $t \rightarrow \infty$?

6.6. Esimerkissä 6.2 osoitimme, että Lotkan ja Volterran yhtälön ratkaisut ovat jaksollisia jollain tuntemattomalla jakson pituudella T . Määritä hain ja hainruoan populaatioiden keskiarvot $\frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt$ ja $\frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt$.⁵

⁴Vektoricalculus/analyysi ja Lineaarinen algebra ja geometria 2 auttavat.

⁵Tarkastele funktioiden $\frac{t}{r}$ ja $\frac{h}{r}$ integraaleja.

6.7. Kun Lotkan ja Volterran malliin lisätään populaatioiden sisäistä kilpailua kuvaavat termit, saadaan differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{r} = ar - bhr - er^2, \\ \dot{h} = -ch + dhr - fh^2, \end{cases}$$

missä $a, b, c, d, e, f > 0$. Miten ratkaisut käyttäytyvät?

6.8. Tarkastele differentiaaliyhtälön

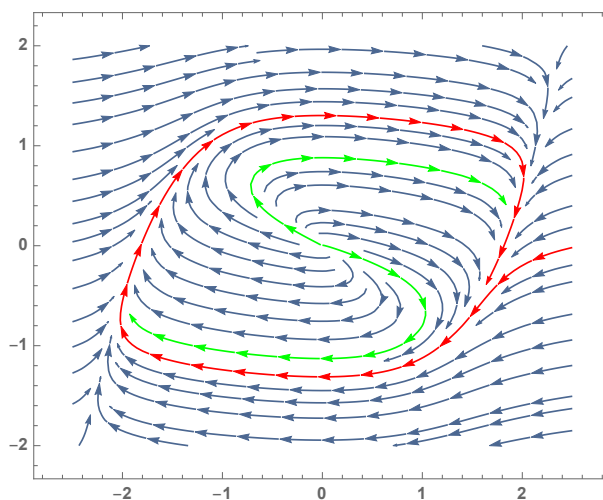
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} ax_1 - x_2 - ax_1\|x\|^2 \\ x_1 + ax_2 - ax_2\|x\|^2 \end{pmatrix}.$$

ratkaisuja, kun $a \in \mathbb{R}$.

6.9 (Van der Pol'n yhtälö). Van der Pol'n yhtälö kuvaa värähtelyilmiöitä, joita havaittiin 1920-luvulla eräissä tyhjiöputkia sisältävissä virtapiireissä. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä

$$f(x) = \begin{cases} c\left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2\right) \\ -\frac{x_1}{c} \end{cases},$$

missä $c > 0$ on parametri. Määritä vektorikentän f tasapainopisteet ja linearisoinnit tasapainopisteissä. Millä parametrin c arvoilla voit päätellä linearisoinnista differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ luonteen tasapainopisteen lähellä? Miten ratkaisut käyttäytyvät näissä tapauksissa?



Kuva 6.7: Van der Pol'n yhtälön ratkaisuja parametrilla $\mu = 2$.

Osa II

Luku 7

Differentiaaliyhtälön virtaus

Tässä luvussa tarkastelemme autonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja samanaikaisesti kaikilla alkuarvoilla. Näin saadaan määriteltyä perhe differentiaaliyhtälön määrittelyjoukon homeomorfismeja, jotka yhdessä muodostavat (osittaisen) virtauksen. Virtaus on käyttökelpoinen käsite antamaan rakennetta autonomisten differentiaaliyhtälöiden teorialle ja liittyy sen dynaamisten systeemien teoriaan.

7.1 Lineaarisen yhtälön virtaus

Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Lineaarisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ jokaisen ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} . Lauseen 2.15 mukaan ratkaisu alkuarvolla $x(0) = x_0$ on

$$\psi_{0,x_0}(t) = \exp(At)x_0.$$

Matriisien eksponenttifunktio määrää jokaisella kiinteällä ajanhetkellä $t \in \mathbb{R}$ kuvauksen $\phi_t = \exp(At): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolle eksponenttifunktion määritelmän ja Lemman 2.16 nojalla pätee kaikilla $s, t \in \mathbb{R}$

- (1) $\phi_0 = \text{id}$,
- (2) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$.

Koska $\exp(At)$ on kääntyvä $n \times n$ -matriisi, se määrää avaruuden \mathbb{R}^n lineaarisen automorfismin, joka on tunnetusti homeomorfismi.

Kuvaus $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\phi(t, x) = \phi_t(x) = \exp(At)x,$$

on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ määräämä virtaus.

Esimerkki 7.1. Esimerkissä 1.3 tarkasteltu differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

määrää virtauksen $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$,

$$\phi_t(b) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cos t + b_2 \sin t \\ -b_1 \sin t + b_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

7.2 Virtaus

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. OY-lauseen 5.5 mukaan alkuarvotetävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

on ratkaisu jokaisella alkuarvolla $x_0 \in U$. Propositiossa 5.7 osoitimme, että alkuarvotetävän ratkaisu riippuu jatkuvasti alkuarvosta. Tarkastelemme nyt lähemmin differentiaaliyhtälön määrittämiä kuvauksia joukolta U itselleen.

Jos tarkasteltavan differentiaaliyhtälön ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} kaikilla alkuarvoilla, osoitamme, että se määrää vastaavanlaisen perheen kuvauksia ϕ_t , $t \in \mathbb{R}$, jolla on samoja ominaisuuksia kuin luvussa 7.1 tarkastelulla lineaarisen yhtälön virtauksella.

Olkoon X metrinen avaruus. Jatkuva kuvaus $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, jolle pätee

- (1) $\phi(0, x) = x$ kaikilla $x \in X$,
- (2) $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s + t, x)$ kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $s, t \in \mathbb{R}$.

on **virtaus** avaruudessa X . Kuvaus $\phi_t: X \rightarrow X$,

$$\phi_t(x) = \phi(t, x)$$

on virtauksen ϕ **aika- t -kuvaus**.

Lemma 7.2. *Virtauksen aika- t -kuvauksella on ominaisuudet*

- (1) $\phi_0 = \text{id}$ ja
- (2) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$.

Todistus. (1) $\phi_0(b) = \phi(0, b) = b$ kaikilla $b \in U$.

(2) $\phi_t \circ \phi_s(b) = \phi(t, \phi(s, b)) = \phi(s + t, b) = \phi_{s+t}(b)$ kaikilla $s, t \in \mathbb{R}$ ja $b \in U$. □

Seuraus 7.3. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ virtaus. Tällöin kuvaus $\phi_t: X \rightarrow X$ on homeomorfismi jokaiselle $t \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Kuvaukset ϕ_t ja ϕ_{-t} ovat oletuksen mukaan jatkuvia. Ominaisuuden (2) nojalla pätee

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0 = \text{id},$$

joten $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$. □

Propositio 7.4. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä, jolle jokaisen alkuarvotettävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = p, \end{cases} \quad (7.2)$$

ratkaisun x_p maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} . Tällöin kuvaus $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$,

$$\phi(t, p) = x_p(t) \quad (7.3)$$

on virtaus joukossa U .

Todistus. Olkoon ϕ määritelty lausekkeella (7.3). Kuvaus ϕ on jatkuva Proposition 5.7 nojalla, koska differentiaaliyhtälön ratkaisut riippuvat jatkuvasti alkuarvoista. Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikille $s \in \mathbb{R}$ ja $b \in U$

$$\phi(s, \phi(t, b)) = \phi_s \circ \phi_t(b) = \phi_s(x_b(t)) = x_{x_b(t)}(s) = \Psi_1(s)$$

ja

$$\phi(s+t, b) = \phi_{s+t}(b) = x_b(s+t) = \Psi_2(s)$$

Molemmat kuvaukset $\Psi_1, \Psi_2: \mathbb{R} \rightarrow U$ ovat differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisuja. Lisäksi

$$\Psi_1(0) = x_b(t)(0) = x_b(t) = \Psi_2(0),$$

joten yksikäsitteisyyslauseen nojalla $\Psi_1 = \Psi_2$, mistä väite seuraa. \square

Propositio 7.4 kuvaus ϕ on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ määräämä virtaus tai vektorikentän f määräämä virtaus.

Täydennykseksi on syytä todeta vastaavuus toiseen suuntaan:

Propositio 7.5. Jos C^1 -kuvaus $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ on virtaus joukossa U , niin se on vektorikentän $\frac{\partial}{\partial t}\phi(0, x)$ määräämä virtaus.

Todistus. Olkoon $x \in U$ ja olkoon $\psi: \mathbb{R} \rightarrow U$ kuvaus $\psi(t) = \phi(t, x)$. Nyt $\dot{\psi}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(0, x)$, mistä väite seuraa. \square

Propositio 7.6. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva vektorikenttä tai rajoitettu C^1 -vektorikenttä. Tällöin f määrää avaruuden \mathbb{R}^n virtauksen.

Todistus. Jos f on Lipschitz-jatkuva, väite seuraa Propositioista 7.4 ja 5.10. Toinen väite seuraa Propositioista 7.4 ja Harjoitustehtävästä 7.9. \square

Esimerkki 7.7. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}^2$. Kuvaukset $\phi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi^t(b) = x_b(t) = b + t\lambda,$$

$t \in \mathbb{R}$ muodostavat tason virtauksen. Tämä virtaus on vakiokentän $f \equiv \lambda$ määräämä.

Vektorikentän määräämä virtaus on jatkuva-aikainen dynaaminen systeemi. Se liittyy ehkä tutumpiin diskreetti-aikaisiin dynaamisiin systeemeihin tai iteraatioteoriaan aika- t -kuvausten kautta: Esimerkiksi $\phi(n, x) = \phi_1^n(x)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Virtaustulkinnan mukaan vektorikenttä $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tai differentiaaliyhtälö $\dot{x} = f(x)$) määrää joukon U homeomorfismin itselleen. Tämä homeomorfismi pitää vektorikentän tasapainopisteet paikallaan.

7.3 Rajajoukot

Tässä luvussa ja myöhemmin kurssilla tarkastelemme virtausten ja erityisesti differentiaaliyhtälön määräämän virtauksen asymptootista käyttäytymistä.

Olkoon ϕ virtaus metrisessä avaruudessa X . Tällöin

$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}_\phi(x) = \{\phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$ on pisteen x **rata**

$\mathcal{O}^+(x) = \mathcal{O}_\phi^+(x) = \{\phi(t, x) : t \geq 0\}$ on pisteen x **positiivinen rata** ja

$\mathcal{O}^-(x) = \mathcal{O}_\phi^-(x) = \{\phi(t, x) : t \leq 0\}$ on pisteen x **negatiivinen rata**.

Seuraavat määritelmät ovat hyödyllisiä, kun tutkimme, miten pisteen $x \in X$ rata, positiivinen rata ja negatiivinen rata käyttäytyvät avaruuden X virtauksessa ϕ , kun aika kasvaa rajatta.

Olkoon ϕ virtaus metrisessä avaruudessa X . Pisteen $x \in X$ ω -**rajajoukko**^a on

$$\omega_\phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi([t, \infty[, x)} = \bigcap_{T=0}^{\infty} \left(\bigcup_{t=T}^{\infty} \overline{\phi(t, x)} \right),$$

ja sen α -**rajajoukko**^b on

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\phi(]-\infty, t], x)} = \bigcap_{T=0}^{-\infty} \left(\bigcup_{t=T}^{-\infty} \overline{\phi(t, x)} \right).$$

Jos joukko Ω on jonkin pisteen ω - tai α -rajajoukko, niin Ω on **rajajoukko**.

^atai **positiivinen rajajoukko**

^btai **negatiivinen rajajoukko**

Jos ϕ on vektorikentän f määräämä virtaus, käytämme yksinkertaisuuden vuoksi merkintöjä $\mathcal{O}_\phi(x) = \mathcal{O}_f(x)$, $\mathcal{O}_\phi^+(x) = \mathcal{O}_f^+(x)$, $\mathcal{O}_\phi^-(x) = \mathcal{O}_f^-(x)$, $\omega_f(x) = \omega_\phi(x)$ ja $\alpha_f(x) = \alpha_\phi(x)$. Tällöin virtauksen ϕ ratoja ja rajajoukkoja kutsutaan myös vektorikentän f radoiksi ja rajajoukoiksi.

Ensimmäistä tulostamme varten on luontevaa yleistää Luvussa 4.1 määritelty invariantin osajoukon käsite virtauksille.

Olkoon ϕ virtaus metrisessä avaruudessa X . Osajoukko $A \subset X$ on **positiivisesti ϕ -invariantti**, jos $\phi_t(A) \subset A$ kaikilla $t \geq 0$. Se on **negatiivisesti ϕ -invariantti**, jos $\phi_t(A) \subset A$ kaikilla $t \leq 0$ ja **ϕ -invariantti**, jos se on positiivisesti ja negatiivisesti invariantti virtauksessa ϕ .

Propositio 7.8. *Olkoon ϕ virtaus metrisessä avaruudessa X . Tällöin*

(1) *jokaisen pisteen $x \in X$ ω -rajajoukko $\omega_\phi(x)$ on suljettu ja ϕ -invariantti.*

(2) jos pisteen x positiivinen ϕ -rata sisältyy kompaktiin joukkoon, niin $\omega_\phi(x)$ ei ole tyhjä joukko.

(3) jos pisteen x rata sisältyy kompaktiin joukkoon, niin $\omega_\phi(x)$ on kompakti ja yhtenäinen.

Todistus. Rajajoukot ovat suljettuja, koska ne ovat suljettujen joukkojen leikkauksia. Loput väitteet todistetaan harjoituksissa. \square

Seuraus 7.9. Olkoon ϕ virtaus metrisessä avaruudessa X . Tällöin

(1) jos avaruuden X suljetut pallot ovat kompakteja ja pisteen x positiivinen ϕ -rata on rajoitettu, niin $\omega_\phi(x)$ ei ole tyhjä joukko.

(2) jos avaruuden X suljetut pallot ovat kompakteja ja pisteen x rata on rajoitettu, niin $\omega_\phi(x)$ on yhtenäinen.

(3) jos $\omega_\phi(x)$ on kompakti, niin se on yhtenäinen. \square

Olkoon ϕ virtaus metrisessä avaruudessa X . Jos $z \in X$ on piste, jonka rata virtauksessa ϕ on jaksollinen mutta z ei ole kiintopiste, niin pisteen z rata $\mathcal{O}_\phi(z)$ on **sykli**. Sykli Ω on ω -**rajasykli**, jos on $x \notin \Omega$, jolle $\Omega \subset \omega(x)$ ja vastaavasti α -**rajasykli**, jos on $x \notin \Omega$, jolle $\Omega \subset \alpha(x)$.

Esimerkki 7.10. Differentiaaliyhtälö¹

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix},$$

on napakoordinaateissa

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2)/2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}.$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuarvolla (r_0, θ_0) on

$$\begin{cases} r(t) = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{e^t + 1/r_0^2 - 1}} \\ \theta = \theta_0 + t \end{cases} \quad (7.4)$$

Kaikilla suljettuun yksikkökiekkoon $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ sisältyvillä alkuarvoilla ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} . Lauseke (7.4) määrää virtauksen ϕ joukossa \mathbb{D} .

Tasapainopisteelle 0 pätee $\omega_\phi(0) = \alpha_\phi(0) = \{0\}$. Jokaisella $x \in \mathbb{D} - \{0\}$ pätee $\omega_\phi(x) = \mathbb{S}^1$. Jos $\|x\| = 1$, niin $\mathcal{O}_\phi(x) = \omega_\phi(x) = \alpha_\phi(x) = \mathbb{S}^1$, joten \mathbb{S}^1 on rajasykli. Jos $\|x\| < 1$, niin $\alpha_\phi(x) = \{0\}$.

Esimerkki 7.11. Olkoon $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ matriisi, jonka molemmat ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia. Tällöin koko taso origon ulkopuolella on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ keskenään samanjaksoisten ellipsiratojen yhdiste.

¹Vertaa Esimerkkiin 6.7.

Esimerkki 7.12. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi iz_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi\alpha iz_2 \end{cases} \quad (7.5)$$

avaruudessa \mathbb{C}^2 . Jos \mathbb{C}^2 ja \mathbb{R}^4 samastetaan asettamalla $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$, saadaan reaalin differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\pi y_1 \\ \dot{y}_1 = 2\pi x_1 \\ \dot{x}_2 = -2\pi\alpha y_2 \\ \dot{y}_2 = 2\pi\alpha x_2 \end{cases}$$

Yhtälö (7.5) on helppo ratkaista: sen virtaus on $\phi^\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$:

$$\phi_t^\alpha(w_1, w_2) = (e^{2\pi it} w_1, e^{2\pi\alpha it} w_2).$$

Molempien kompleksisten koordinaattien virtaukset säilyttävät kaikki 0-keskiset ympyrät kompleksitasossa, joten jokaisella $r_1, r_2 > 0$ muodostettu **torus**

$$\begin{aligned} T(r_1, r_2) &= \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\} \\ &= \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| = r_1\} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

on invariantti virtauksessa.

Jos $\alpha = p/q$ on rationaaliluku, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, niin $\phi^\alpha(t + q, z) = \phi^\alpha(t, z)$ kaikilla z , joten kaikki radat ovat jaksollisia. Erityisesti kaikkien tasapainopisteestä 0 poikkeavien pisteiden radat ovat homeomorfinen ympyrän \mathbb{S}^1 kanssa.

Jos α on irrationaaliluku, niin kuvaus $t \mapsto \phi_t^\alpha(z)$ on injektiivinen kaikille $z \in \mathbb{C}^2$, joille $z_1 \neq 0$ ja $z_2 \neq 0$, sillä $e^{2\pi iq} = 1$, jos ja vain jos $q \in \mathbb{Z}$ mutta $e^{2\pi i\alpha q} \neq 1$ kaikilla $q \in \mathbb{Z}$. Osoittautuu, että

$$\omega_\phi(z) = \alpha_\phi(z) = T(|z_1|, |z_2|) = T$$

jokaiselle $z \neq 0$: Jokaiselle $z \in T$ pätee

$$\phi^\alpha(t + q, z) = (z_1, e^{2\pi i\alpha q} z_2)$$

kaikilla $q \in \mathbb{Z}$. Koska joukko $\{e^{2\pi i\alpha q} z_2 : q \in \mathbb{Z}\}$ on tiheä ympyrällä $\{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\}$, niin ympyrä $\{z_1\} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\}$ sisältyy pisteen z ω -rajajoukkoon. Toistamalla sama tarkastelu joukolle

$$\phi^\alpha(t + q + s, z) = (e^{2\pi is} z_1, e^{2\pi i\alpha s} e^{2\pi i\alpha q} z_2)$$

kaikille $s \in [0, 1]$, saadaan $\omega_\phi(z) = T$.

Jos toruksella $T(r_1, r_2)$ käytetään kulmakoordinaatteja (θ_1, θ_2) , niin torus voidaan esittää neliön $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ tekijäavaruutena kuten topologian kurssilla samastamalla neliön pystysivut keskenään ja vaakasivut keskenään tai yhtäpitävästi tason \mathbb{R}^2 tekijäavaruutena $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, joka saadaan samastamalla pisteet (x, y) ja $(x + 2\pi n, y + 2\pi m)$ kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$. Tällöin differentiaaliyhtälöä (7.5) vastaa vakiovektorikentän antama differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = 2\pi \\ \dot{\theta}_2 = 2\pi\alpha, \end{cases} \quad (7.6)$$

jonka ratkaisuja ovat kaikki affiinit suorat, joiden kulmakerroin on α . Tasossa differentiaaliyhtälön (7.6) virtaus on siis triviaali kaikilla α mutta tekijäavaruudessa $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sen radat ovat joko harvoja tai tiheitä parametrin α rationaalisuudesta riippuen.

7.4 Rataekvivalenssi

Luvussa 7.2 oletettiin, että maksimaalinen määrittelyväli on kaikilla alkuarvoilla koko \mathbb{R} . Tarkastelemamme Esimerkit 1.1 ja 5.11 osoittavat, että tämä ehto ei aina toteudu.

Jos vektorikentän f määräämän differentiaaliyhtälön maksimaalinen määrittelyväli ei ole kaikilla alkuarvoilla koko \mathbb{R} , niin yhtälö (7.3) määrää kuitenkin **osittaisen virtauksen**: yhtälö $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$ on voimassa, jos $s, t, s+t$ ovat kaikki maksimaalisella määrittelyvälillä.

Jos olemme kiinnostuneita ainoastaan ratkaisujen radoista, voimme “muuttaa differentiaaliyhtälön ajan” siten, että maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} kaikilla alkuarvoilla.

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja ja olkoot $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttiä. Olkoot ϕ^f ja ϕ^g vektorikenttien f ja g määräämät osittaiset virtaukset. Vektorikentät f ja g ovat **rataekvivalentteja**, jos on homeomorfismi $H: U \rightarrow V$ ja jos jokaisella $b \in U$ on aidosti kasvava bijektio $\tau_b: I(b, f) \rightarrow I(H(b), g)$ maksimaalisten määrittelyvälien välillä, jolle pätee

$$H \circ \phi^f(t, b) = \phi^g(\tau_b(t), H(b))$$

kaikille $t \in I(b, f)$.

Tällöin osittaiset virtaukset ϕ^f ja ϕ^g saadaan toisistaan **muuttamalla aika** ja vektorikentät f ja g (ja vastaavasti virtaukset ϕ^f ja ϕ^g) ovat **topologisesti ekvivalentteja**.

Seurauksen 7.6 mukaan koko avaruudessa \mathbb{R}^n määritelty rajoitettu C^1 -vektorikenttä määrää dynaamisen systeemin. Tämän havainnon avulla todistetaan seuraava tulos:

Propositio 7.13. *Jokainen koko avaruudessa \mathbb{R}^n määritelty C^1 -vektorikenttä on rataekvivalentti sellaisen C^1 -vektorikentän kanssa, joka määrää dynaamisen systeemin.*

Todistus. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Olkoon $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ sileä funktio, jolle $\|f(x)\| \leq M(f(x))$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin C^1 -vektorikenttä $g = f/M(f)$ on rajoitettu, $\|g(x)\| \leq 1$, joten se määrää dynaamisen systeemin Seurauksen 7.6 nojalla. Osoitetaan vielä, että kaikille $b \in \mathbb{R}^n$ on jatkuva kasvava bijektio $\tau: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\phi^f(t, b) = \phi^g(\tau(t), b).$$

Tässä tapauksessa siis identtinen kuvaus käy rataekvivalenssin määritelmässä esiintyväksi homeomorfismiksi H .

Olkoon $x: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ alkuarvotekstävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = b$ ratkaisu ja määritellään ajanvaihto $\tau: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$\tau(t) = \int_0^t M(f(x(s))) ds.$$

Kuvaus τ on selvästi jatkuva ja se on aidosti kasvava, koska M saa vain positiivisia arvoja. Lisäksi, jos $I(b, f) =]\alpha, \beta[$ ja $\beta < \infty$, niin Proposition 5.12 nojalla

$$\tau(t) \geq \int_0^t \|f(x(s))\| ds = \int_0^t \|\dot{x}(s)\| ds \geq \left\| \int_0^t \dot{x}(s) ds \right\| = \|x(t) - b\| \rightarrow \infty,$$

kun $t \rightarrow \infty$. Olkoon $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y = x \circ \tau^{-1}$. Nyt $y(0) = x(0) = b$ ja

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(\tau^{-1}(t)) \frac{d}{dt} \tau^{-1}(t) = \frac{f(x(\tau^{-1}(t)))}{M(f(x(\tau^{-1}(t))))} = \frac{f(y(t))}{M(f(y(t)))},$$

joten y on alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{f(y)}{M(f(y))} \\ y(0) = b \end{cases}$$

ratkaisu kuten pitikin. □

Esimerkki 7.14. Jos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on C^1 -vektorikenttä, niin Proposition 7.13 mukaisia rataekvivalentteja vektorikenttiä ovat esimerkiksi

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}}, \quad F(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|^2}, \quad F(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}.$$

Näissä siis vektorikentän F suunta on jokaisessa pisteessä sama kuin alkuperäisen vektorikentän f .

Esimerkki 7.15. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vektorikenttä $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} Ax + x\|x\|^2 \sin(\|x\|^{-1}), & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

on jatkuvasti differentioituva vektorikenttä, joka ei ole rajoitettu vaan $\|f(x)\|$ kasvaa rajatta, kun $\|x\| \rightarrow \infty$. Funktio $F: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(r) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq r \leq 1 \\ e^{\frac{1}{1-r}}, & \text{kun } r \geq 1, \end{cases}$$

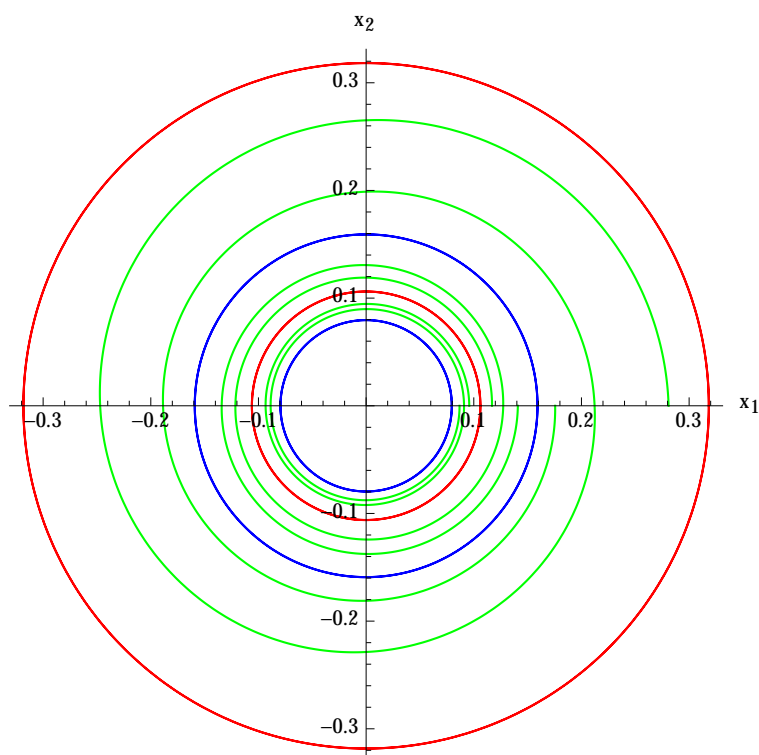
on C^∞ -funktio. Vektorikenttä $g(x) = F(\|x\|)f(x)$ on rajoitettu ja sileä, joten Proposition 7.6 nojalla se määrää tason virtauksen.

Vektorikentän g määräämän virtauksen tarkastelemiseksi on helpompi tarkastella yhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisuja, joiden asymptoottinen käyttäytyminen antaa vektorikentän g rajajoukot. Origin komplementissa differentiaaliyhtälö $\dot{x} = f(x)$ on napakoordinaateissa muotoa

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \sin(1/r), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Tästä muodosta näkee helposti, että ympyrät $t \mapsto \frac{1}{k\pi}(\cos t, \sin t)$ ovat jaksollisia ratkaisuja kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi $\dot{r} > 0$, kun $r \in]\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}[$ ja $\dot{r} < 0$, kun $r \in]\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{(2k-1)\pi}[$, joten ympyrät $r = \frac{1}{2k\pi}$ ovat puoleensavetäviä rajasyklejä ja ympyrät $r = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ ovat hylkiviä rajasyklejä.

Jos vektorikentän määrittelyjoukko on avaruuden \mathbb{R}^n aito osajoukko, niin Proposition 7.13 menetelmä ei ole riittävä. Yleisempi tulos pätee, seuraavassa tuloksessa tosin menetämme osan sileydestä.



Kuva 7.1: Punaiset ympyrät ovat hylkiviä ratoja, siniset puoleensavetäviä. Välissä olevien pisteiden ω -rajajoukko on sininen ympyrä.

Lause 7.16. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Tällöin f on rataekvivalentti sellaisen jatkuvan vektorikentän $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ kanssa, joka määrää dynaamisen systeemin.*

Todistus. Toistamalla Proposition 7.13 konstruktio, voidaan olettaa, että f on rajoitettu, $\|f(x)\| \leq 1$ kaikilla $x \in U$. Olkoon $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = f(x) \frac{d(x, \partial U)}{1 + d(x, \partial U)}$$

Vektorikentät f ja g ovat rataekvivalentteja kuten Lauseessa 7.13. Osoitetaan vielä, että jokaisen vektorikenttää g vastavan alkuarvotehtävän maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} .

Koska jokaiselle $x \in U$ pätee $\|g(x)\| < \|f(x)\|$, niin alkuarvotehtävän $\dot{x} = g(x)$, $x(0) = x_0$ maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} , jos alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} .

Oletetaan, että on alkuarvo $b \in U$, jolle alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = b \end{cases} \quad (7.7)$$

maksimaalinen määrittelyväli on $] \alpha, \beta [$ ja $\beta < \infty$. Tällöin alkuarvotehtävän (7.7) ratkaisukäyrä $\gamma = \psi_{0,b}|_{[0,\beta]}$ on äärellisen mittainen, sen pituus on $\ell(\gamma) = L < \infty$, koska g on rajoitettu. Seurauksen 5.13 nojalla $\gamma(t)$ suppenee johonkin joukon U reunapisteeseen p , kun $t \nearrow \beta$.

Tarkastellaan käyrän γ pituutta tarkemmin. Koska käyrä γ ei kulje vektorikentän g tasapainopisteiden kautta, niin kuvaus $\ell: [0, \beta[\rightarrow [0, L[$,

$$\ell(t) = \ell(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t \|g \circ \gamma(s)\| ds$$

on aidosti kasvava. Jokaiselle $s \in [0, \beta[$ pätee

$$\begin{aligned} \|g(\gamma(s))\| &\leq \frac{d(\gamma(s), \partial U)}{1 + d(\gamma(s), \partial U)} \|f(x)\| \leq d(\gamma(s), \partial U) \leq d(\gamma(s), p) \\ &\leq \int_s^\beta \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \int_s^\beta \|g(\gamma(s))\| ds \leq \beta - s. \end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned} \ell^{-1}(s) &= \int_0^s \ell^{-1}(u) du = \int_0^s \|g(\gamma(\ell^{-1}(u)))\|^{-1} du \geq \int_0^s (\beta - \ell^{-1}(u))^{-1} du \\ &= \log \frac{\beta}{\beta - \ell^{-1}(s)} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kun $s \nearrow \ell(\beta)$, joten maksimaalinen positiivinen määrittelyväli on $[0, \infty[$. \square

Yksinkertaisuuden vuoksi kutsumme vektorikentän f kanssa rataekvivalentin vektorikentän g rajajoukkoja myös vektorikentän f rajajoukoiksi.

Vaikka Lauseen 7.16 antama alkuperäisen vektorikentän kanssa rataekvivalentti vektorikenttä ei ole C^1 , niin sen määräämillä alkuarvotehävillä on konstruktion perusteella yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkki 7.17. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Esimerkin 1.1(2) alkuarvotehävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = a \end{cases}, \quad (7.8)$$

missä $a > 0$, ratkaisun $x(t) = \frac{a}{1-at}$ maksimaalinen määrittelyväli on $] -\infty, \frac{1}{a}[$. Olkoon $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Proposition 7.13 antama ajan muuttava funktio $\tau:] -\infty, \frac{1}{a}[\rightarrow \mathbb{R}$ on

$$\tau(t) = \int_0^t \left(1 + \left(\frac{a}{1-as}\right)^2\right) ds = t - \frac{a}{1-at}.$$

Alkuarvotehävän

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = a \end{cases},$$

ratkaisun lauseke on huomattavasti monimutkaisempi kuin tehtävän (7.8) mutta sen maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} ja Proposition 7.13 mukaan f ja g ovat rataekvivalentteja.

Harjoitustehtäviä

7.1. Olkoon $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ matriisi, jonka ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia. Määritä $\omega(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$.

7.2. Anna esimerkki tason avoimessa joukossa määritellystä differentiaaliyhtälöstä, jolla on sykli, joka on hylkivä joillekin $x \in \mathbb{R}^2$ ja puoleensavetävä joillekin $x \in \mathbb{R}^2$.²

7.3. Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Määritä vektorikentän rajajoukko $\omega_f(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}^3$.

Tehtävissä 7.4-7.8 ϕ on virtaus avaruudessa \mathbb{R}^n .

7.4. Osoita, että $\omega_\phi(x)$ ei ole tyhjä joukko, jos pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ positiivinen rata on rajoitettu.

7.5. Osoita, että jokaisen pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ ω -rajajoukko $\omega_\phi(x)$ on ϕ -invariantti.

7.6. Osoita, että $\omega_\phi(x)$ on yhtenäinen, jos se on rajoitettu.³

7.7. Olkoon ϕ virtaus avaruudessa \mathbb{R}^n . Olkoon $P \subset \mathbb{R}^n$ positiivisesti ϕ -invariantti kompakti osajoukko. Olkoon $x \in P$ ja olkoon $z \in \omega_\phi(x)$. Osoita, että pisteen z koko rata sisältyy joukkoon P .

7.8. Anna esimerkki virtauksesta, jolla on rajoittamaton epäyhtenäinen ω -rajajoukko. (Esimerkin kuvaileminen riittää, lausekkeita ei välttämättä tarvita.)

7.9. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ rajoitettu C^1 -vektorikenttä. Osoita, että sen kaikkien ratkaisujen maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} .⁴

7.10. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Osoita, että joukko

$$\Omega(f) = \bigcup_{b \in U} I(b, f) \times \{b\} \subset \mathbb{R} \times U$$

on avoin.

²Tässä on oleellista ymmärtää lokaali käyttäytyminen rajasyklin lähellä esimerkiksi napakoordinaatien avulla. Ei haittaa, jos maksimaalinen määrittelyväli ei ole \mathbb{R} .

³Jos se ei ole yhtenäinen, se voidaan erottaa kahden erillisen avoimen joukon sisään. Mutta mitä näiden komplementissa tapahtuu?

⁴Seuraus 5.13 auttaa.

Luku 8

Hyperbolisista tasapainopisteistä

Tässä luvussa täydennämme kuvaamme differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymisestä hyperbolisen tasapainopisteen lähellä. Luvussa 6.2 tarkastelimme tilannetta, jossa lineaarisoinnin ominaisarvojen reaaliosat ovat kaikki positiivisia tai kaikki negatiivisia, tässä luvussa tutkimme tapausta, jossa joillain ominaisarvoilla on positiivinen ja joillain negatiivinen reaaliosa.

8.1 Lineaarisen yhtälön vakaudesta

Lineaarisen yhtälön $\dot{x} = Ax$ kriittisen pisteen 0 vakaus ja epävakaus voidaan päätellä matriisin A spektrin avulla. Laajennamme luvussa 4.1 aloitettua yleistettyjen ominaisvaruusten tarkastelua ja otamme huomioon myös kompleksiset ominaisarvot.

Kompleksista ominaisarvoparia $\lambda, \bar{\lambda}$ vastaava **reaalinen juuriavaruus** on

$$\hat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} = \hat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}(A) = (\hat{E}_{\lambda} \oplus \hat{E}_{\bar{\lambda}}) \cap \mathbb{R}^n = \operatorname{Re} \hat{E}_{\lambda} \oplus \operatorname{Im} \hat{E}_{\lambda} = \operatorname{Re} \hat{E}_{\bar{\lambda}} \oplus \operatorname{Im} \hat{E}_{\bar{\lambda}}.$$

Matriisin A **vakaa aliavaruus** eli **stabiili aliavaruus** on

$$E^s = E^s(A) = \bigoplus_{\lambda < 0} \hat{E}_{\lambda} \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda < 0}} \hat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

sen **epävakaa aliavaruus** eli **epästabiili aliavaruus** on

$$E^u = E^u(A) = \bigoplus_{\lambda > 0} \hat{E}_{\lambda} \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda > 0}} \hat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

ja sen **keskusalivaruus** on

$$E^0 = E^0(A) = \hat{E}_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda = 0}} \hat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}.$$

Esimerkiksi Jordanin kanonisen muodon (Lause 4.8) avulla nähdään, että

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^0 \oplus E^u.$$

Lemma 8.1. *Aliavaruudet $E^s(A)$, $E^0(A)$, $E^u(A)$ ovat A -invariantteja.*

Todistus. Seuraa Propositiosta 4.3. □

Lemma 8.2. *Aliavaruudet $E^s(A)$, $E^0(A)$, $E^u(A)$ ovat invariantteja avaruuden \mathbb{R}^n virtauksessa $\phi_t(x) = \exp(At)x$.* □

Todistus. Seuraa Lemmasta 8.1 käyttämällä matriisien eksponenttifunktion sarjaesitystä ja väitettä (1). □

Esimerkki 8.3. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Matriisin

$$B_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat -1 ja $\alpha \pm i\beta$. Matriisin $B_{\alpha,\beta}$ vakaa, epävakaa ja keskusaliavaruus riippuvat reaalisen parametrin α merkistä: Matriisin

$$B_{0,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat -1 ja $\pm i\beta$, joten

$$E^s(B_{0,\beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\},$$

$$E^0(B_{0,\beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$

ja $E^u(B_{0,\beta}) = \{0\}$.

Jos $\alpha \neq 0$, niin $E^0(B_{\alpha,\beta}) = \{0\}$. Lisäksi, jos $\alpha < 0$, niin $E^s(B_{\alpha,\beta}) = \mathbb{R}^3$ ja jos $\alpha > 0$, niin

$$E^s(B_{\alpha,\beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\},$$

ja

$$E^u(B_{\alpha,\beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$

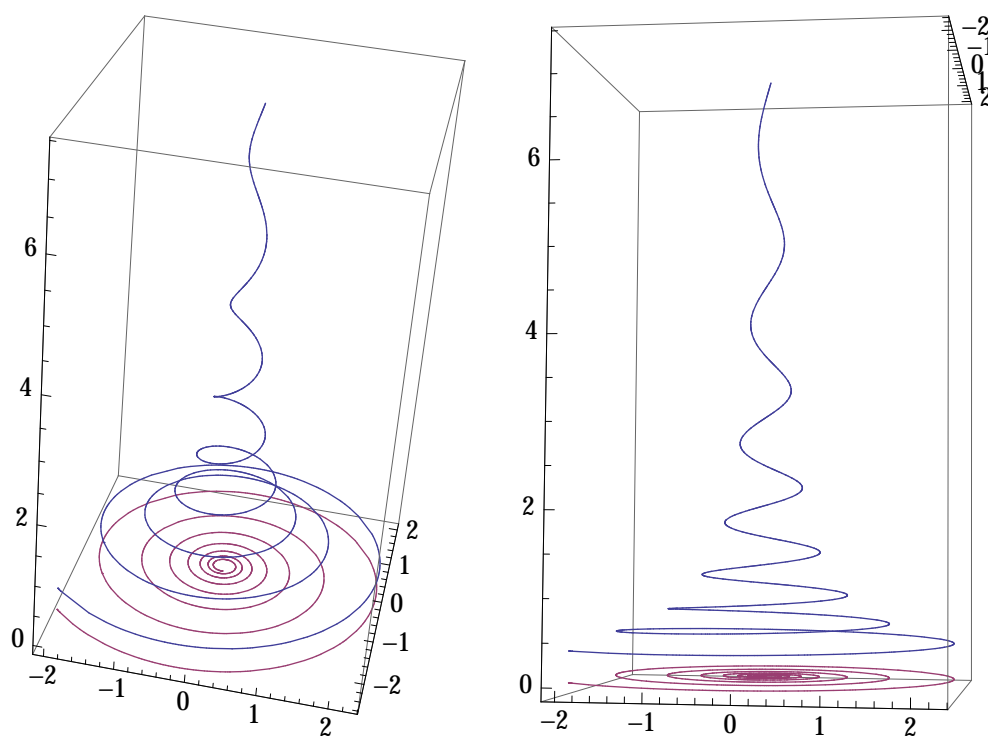
Seuraava tulos kuvailee hyperbolisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen käyttäytymisen:

Lause 8.4. *Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi, jonka keskusaliavaruus on triviaali. Tällöin*

(1) *Jos $x \in E^s$, niin $\exp(At)x \rightarrow 0$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$ ja $\|\exp(At)x\| \rightarrow \infty$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow -\infty$.*

(2) *Jos $x \in E^u$, niin $\exp(At)x \rightarrow \infty$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$ ja $\|\exp(At)x\| \rightarrow 0$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow -\infty$.*

(3) *Jos $x \notin E^u \cup E^s$, niin $\|\exp(At)x\| \rightarrow \infty$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \pm\infty$.*



Kuva 8.1: Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön $\dot{x} = B_{1,15}$ epästabiilissa aliavaruudessa olevasta ratkaisusta (punainen) ja toisesta ratkaisusta, joka ei ole stabiilissa eikä epästabiilissa aliavaruudessa.

Todistus. Väitteet (1) ja (2) seuraavat Propositiosta 4.12 samaan tapaan kuin Lauseiden 6.5 ja 6.6 todistukset.

(3) Harjoitustehtävä. □

Tason differentiaaliyhtälöiden tapauksessa Lause 8.4 antaa karkean version luvussa 2 tehdystä luokittelusta. Lauseesta 8.4 saadaan yllä määritellyllä terminologialla

Seuraus 8.5. *Origo on hyperbolisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ vakaa tasapainopiste, jos ja vain jos $E^s(A) = \mathbb{R}^n$.* □

8.2 Hyperbolisen tasapainopisteen vakaudesta

Esimerkki 8.6. Differentiaaliyhtälöllä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(x) \quad (8.1)$$

on yksi tasapainopiste $x = 0$. Tässä pisteessä sen linearisointi on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1)x$$

Linearisoitu yhtälö on hyperbolinen ja sen ratkaisut tunnemme jo hyvin: Origo on satulapiste.

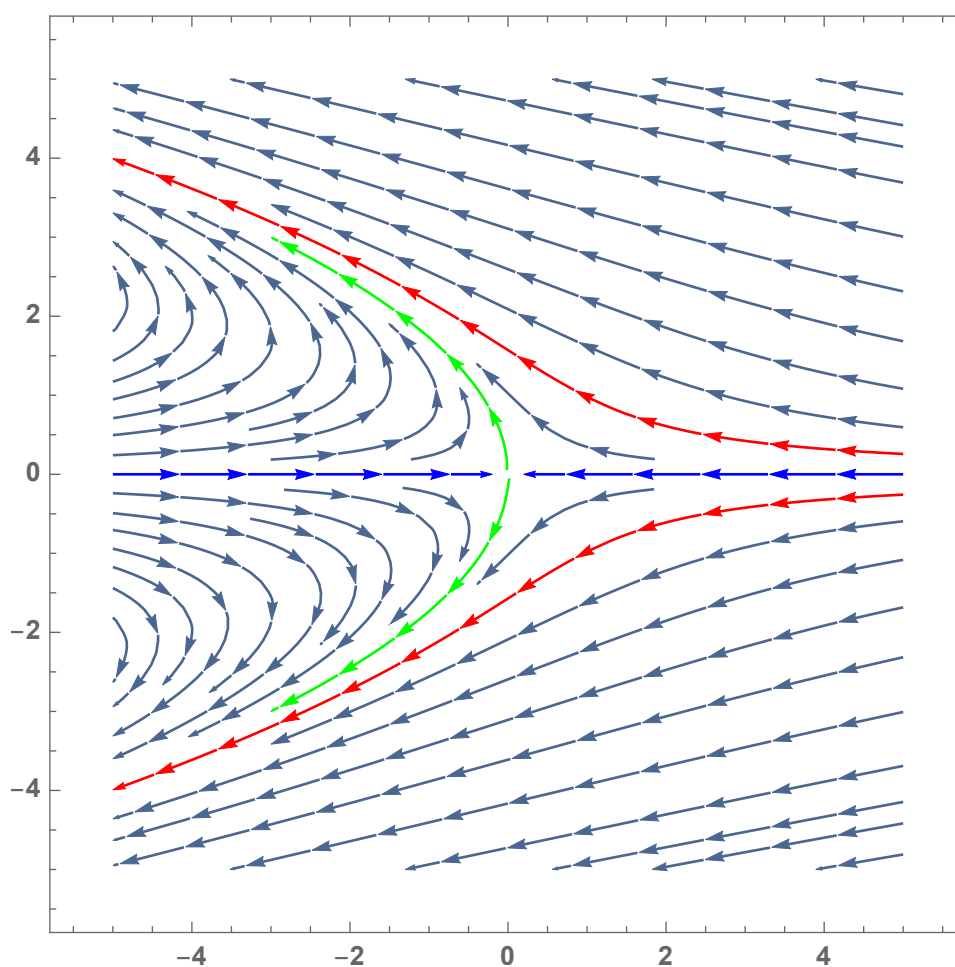
Epälineaarisen differentiaaliyhtälön (8.1) ratkaiseminen ei ole vaikeaa:

$$x(t) = \begin{pmatrix} (a + b^2/3)e^{-t} - b^2/3e^{2t} \\ be^t \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ratkaisusta näkee helposti, että paraabeli

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{1}{3}x_2^2\}$$

on invariantti differentiaaliyhtälön määräämässä virtauksessa. Jos ϕ^f on vektorikentän f määräämä virtaus ja $(a, b) \in U$, niin $\|\phi_t^f(a, b)\| = \sqrt{a^2e^{4t} + be^{2t}}$ käyttäytyy kuten a^2e^{2t} , kun $t \rightarrow \infty$ ja kuten be^{-t} , kun $t \rightarrow -\infty$.



Kuva 8.2: Differentiaaliyhtälön (8.1) epälineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyriä.

Seuraavaksi osoitamme, että hyperbolisen kiintopisteen epävakaus voidaan päätellä siitä, että vektorikentän linearisoinnilla on ainakin yksi ominaisarvo, jonka reaaliosa on positiivinen. Tämä tulos antaa Lauseen 6.5 ja Seurauksen 6.6 kanssa helpon tavan selvittää hyperbolisen tasapainopisteen vakaus tai epävakaus.

Lause 8.7. *Olkoon b C^1 -vektorikentän f hyperbolinen tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ jonkin ominaisarvon reaaliosa on positiivinen, niin b on epävaka.*

Todistus. Affinilla koordinaattimuunnoksella voimme olettaa, että $b = 0$ ja että differentiaalin $Df(0)$ matriisille A pätee $E^s(A) = \mathbb{R}^k$, $E^u(A) = \mathbb{R}^{n-k}$ ja $E^s(A) \perp E^u(A)$.
Olkoon

$$x = (x_s, x_u),$$

missä $x_s \in E^s$, $x_u \in E^u$. Proposition 4.12 nojalla on $K_s < 0$ ja $K_u > 0$ siten, että $(Ax_s | x_s) \leq K_s \|x_s\|^2$ kaikille $x_s \in E^s$ ja $(Ax_u | x_u) \geq K_u \|x_u\|^2$ kaikille $x_u \in E^u$.

Olkoon

$$f(x) = Ax + R(x),$$

missä $R(x) = (R_s(x), R_u(x)) = o(x)$, kun $x \rightarrow 0$. Valitaan $0 < \varepsilon < (K_u - K_s)/4$ ja $r > 0$ siten, että $\|R(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$, kun $\|x\| \leq r$.
Olkoon

$$C_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_u\| \geq \|x_s\|\} \cap \overline{B}(0, r).$$

Olkoon $x = (x_s, x_u)$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, jolle $x(0) \in C_r$. Tällöin, kun $x(t) \in C_r$ pätee Taylorin kehittämän, Cauchyn epäyhtälön ja kolmioepäyhtälön, ja oletuksen $\|x_u\| \geq \|x_s\|$ nojalla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|x_u(t)\|^2) &= 2(x_u(t) | Ax_u(t) + R_u(t)) \\ &\geq 2(K_u \|x_u(t)\|^2 - \|x_u(t)\| \varepsilon \|x(t)\|) \\ &\geq 2(K_u - 2\varepsilon) \|x_u(t)\|^2, \end{aligned}$$

joten $\|x_u\|$ kasvaa eksponentiaalisesti, kun ratkaisu on katkaistussa kartiossa C_r . Samaan tapaan nähdään, että

$$\frac{d}{dt}(\|x_s(t)\|^2) \leq 2(K_s + 2\varepsilon) \|x_u(t)\|^2,$$

kun $x(t) \in C_r$.

Tarkastellaan erotusta

$$g(t) = \|x_u(t)\|^2 - \|x_s(t)\|^2.$$

Selvästi $g(t) = 0$, jos $x(t)$ on yhtälön $\|x_u\| = \|x_s\|$ määräämällä kartiolla ja $g(0) \geq 0$. Edellä tehtyjen laskujen mukaan

$$\dot{g}(t) = 2(K_u - K_s - 4\varepsilon) \|x_u(t)\| > 0$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joilla $x(t) \in C_r$, joten $x(t)$ poistuu kartiosta pallon $\overline{B}(0, r)$ reunan läpi. Erityisesti se poistuu pallosta $\overline{B}(0, r)$ riippumatta siitä, kuinka läheltä tasapainopistettä alkuarvo valitaan. Siis tasapainopiste ei ole vakaa. \square

8.3 Grobmanin ja Hartmanin lause

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja ja olkoot $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttiä. Olkoot ϕ^f ja ϕ^g vektorikenttien f ja g määräämät osittaiset virtaukset.

Vektorikentät f ja g ja osittaiset virtaukset ϕ^f ja ϕ^g ovat **topologisesti konjugaatteja**,^a jos jos on homeomorfismi $H: U \rightarrow V$, jolle pätee

$$H \circ \phi^f(t, b) = \phi^g(t, H(b))$$

kaikille $t \in I(b, f)$. Tällöin H on **konjugoiva homeomorfismi**.

Jos on avoimet joukot $U_1 \subset U$ ja $V_1 \subset V$ siten, että $f|_{U_1}$ ja $g|_{V_1}$ ovat topologisesti konjugaatteja, niin vektorikentät f ja g ovat **lokaalisti topologisesti konjugaatteja**.

^aVertaa topologisen ekvivalenssin määritelmään luvussa 7.4.

Esimerkki 8.8. Olkoon f kuten Esimerkissä 8.6. Kuvaus $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2/3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

on diffeomorfismi, jonka käänteiskuvaus on

$$H^{-1}(y) = \begin{pmatrix} y_1 - y_2^2/3 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

On helppo tarkastaa, että $H \circ \phi_t^f(x) = \exp \operatorname{diag}(-1, 1)H(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}^2$, joten vektorikenttä f on konjugaatti linearisoinnin antaman vektorikentän $g(x) = (-x_1, x_2)$ kanssa.

Kuvaus H kuvaa x_1 -akselin y_1 -akseliksi ja paraabelin U y_2 -akseliksi.

Lause 8.9 (Grobmanin ja Hartmanin lause). *Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva. Jos 0 on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ hyperbolinen tasapainopiste, niin vektorikenttä f on lokaalisti topologisesti konjugaatti linearisaationsa kanssa pisteen 0 lähellä.*

Todistus. Katso esimerkiksi [Har2, Thm. 7.1], [Per, §2.8] tai [Tes]. □

Seuraava esimerkki osoittaa, että konjugoiva kuvaus ei välttämättä ole kovin sileä.

Esimerkki 8.10. Olkoot $\varepsilon \neq 0$ ja $\alpha > \gamma > 0$. Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ (\alpha - \gamma)x_2 + \varepsilon x_1 x_3 \\ -\gamma x_3 \end{pmatrix}.$$

Vektorikentän f linearisointi tasapainopisteessä 0 on $\dot{y} = Ay$, missä $A = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha - \gamma, \gamma)$, on hyperbolinen.

Olkoon ψ_x alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = f(\psi(t)), \\ \psi(0) = X \end{cases}$$

ratkaisu. Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu alkuarvolla $X = (X_1, X_2, X_3)$ on

$$\psi_X(t) = \begin{pmatrix} X_1 e^{\alpha t} \\ (X_2 + \varepsilon X_1 X_3 t) e^{(\alpha - \gamma)t} \\ X_3 e^{-\gamma t} \end{pmatrix}.$$

Grobmanin ja Hartmanin lauseen 8.9 mukaan on lokaali homeomorfismi $H: U \rightarrow H(U)$, joka on määritelty jossain origon ympäristössä ja jolle pätee

$$H(\psi_x(t)) = \exp(At)H(x)$$

kaikille $x \in U$ ja itseisarvoltaan riittävän pienille t .

On helppo tarkastaa, että homeomorfismit

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \varepsilon x_1 x_3 \log |x_1| / \alpha \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ja

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \varepsilon x_1 x_3 \log |x_3| / \alpha \\ x_3 \end{pmatrix}$$

konjugoivat vektorikentän f ja sen linearisoinnin virtaukset. Vektorikenttä f on selvästi C^∞ -kuvaus mutta kuvaukset H_1 ja H_2 eivät ole C^1 -kuvauksia. Osoittautuu, että vektorikentän f määrittämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja ei voi konjugoida linearisointinsa ratkaisuksi C^1 -diffeomorfismilla [Har1].

Seuraava esimerkki osoittaa, että Grobmanin ja Hartmanin lauseen antama homeomorfismi ei voi kaikissa tapauksissa olla kovin paljon siistimpi kuin homeomorfismi.

Esimerkki 8.11. Olkoon $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -vektorikenttä

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{\log \|x\|} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

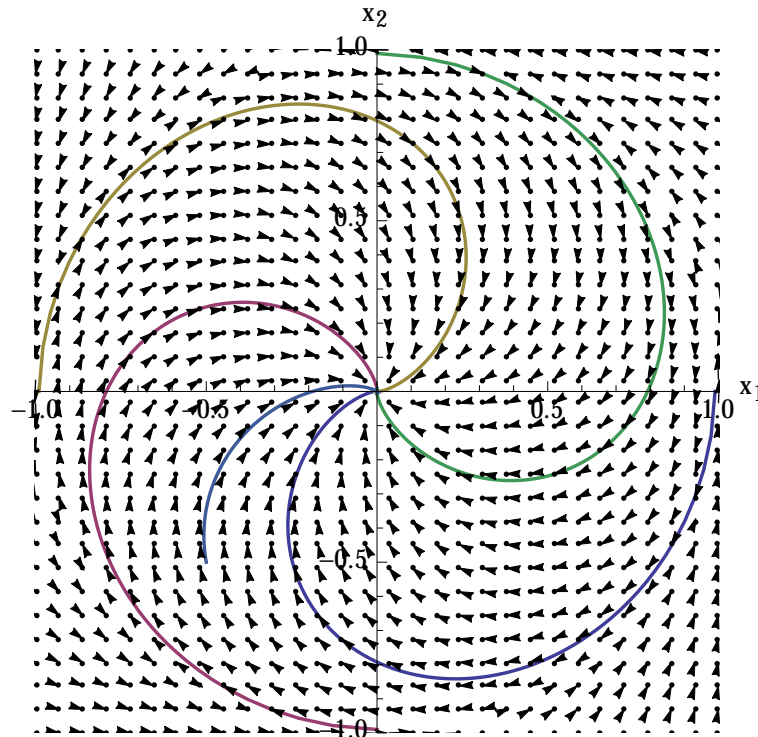
Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ linearisointi on $\dot{x} = -x$, jonka ratkaisut ovat $x(t) = e^{-t}x$, joten origo on linearisoinnin lähde ja ratkaisujen käyttäytyminen on hyvin yksinkertainen. Yhtälö $\dot{x} = f(x)$ on napakoordinaateissa

$$\begin{cases} \dot{r} = -r \\ \dot{\theta} = \frac{1}{\log r}, \end{cases}$$

joten sen ratkaisu napakoordinaateissa alkuarvolla (r_0, θ_0) on

$$\begin{cases} r(t) = e^{-t}r_0 \\ \theta(t) = \theta_0 - \log |\log r_0 - t|. \end{cases}$$

Siis ratkaisut lähestyvät nollaa hitaasti kiertyvää spiraalia pitkin ja erityisesti $\theta(t) \rightarrow -\infty$, kun $t \rightarrow \infty$.



8.4 Vakaa ja epävakaa monisto

Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä, jota vastaa virtaus ϕ ja olkoon b differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste. Tasapainopisteen b **vakaa monisto** on

$$W^s(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow \infty\}$$

ja sen **epävakaa monisto** on

$$W^u(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow -\infty\}$$

Jos b on tasapainopiste siten, että $W^s(b) \neq \emptyset$ ja $W^u(b) \neq \emptyset$, niin b on **satulapiste**.

Jos $U \subset \mathbb{R}^2$ ja $b \in U$ on vektorikentän f satulapiste, niin sen vakaata ja epävakaata monistoa kutsutaan usein **vakaaksi ja epävakaaksi käyräksi**.

Hartmanin ja Grobmanin lauseen nojalla hyperbolisen tasapainopisteen b vakaa ja epävakaa monisto ovat pisteen b ympäristössä lokaalisti homeomorfinia euklidisen avaruuden kanssa. Seuraava tulos tarkentaa huomattavasti Lauseen 8.7 tai Grobmanin ja Hartmanin lauseen antamaa kuvaa hyperbolisen satulapisteen ympäristössä.

Lause 8.12 (Vakaan ja epävakaan moniston lause). *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Olkoon b vektorikentän f hyperbolinen tasapainopiste siten, että differentiaalilla $Df(b)$ on $0 < k < n$ ominaisarvoa,¹ joilla on negatiivinen reaaliosa ja $n - k$ ominaisarvoa, joilla on positiivinen reaaliosa. Tällöin on $\delta > 0$ siten, että $W^s(b) \cap B(b, \delta)$ on avaruuden \mathbb{R}^n*

¹algebrallisen kertaluvun mukaan laskettuna

k-ulotteinen differentioituva alimonisto, joka sivuaa differentiaalin $Df(b)$ vakaata aliavaruutta origossa ja $W^u(b) \cap B(b, \delta)$ on $(n - k)$ -ulotteinen differentioituva alimonisto, joka sivuaa differentiaalin $Df(b)$ epävakaata aliavaruutta origossa.

Todistus. Katso esimerkiksi [HSD] Luku 8.3 ja [Per] Luku 2.7. □

Esimerkki 8.13. Esimerkin 8.6 differentiaaliyhtälön tasapainopisteen 0 vakaa monisto on $\mathbb{R} \times \{0\}$ ja sen epävakaa monisto on S .

Harjoitustehtäviä

8.1. Todista Lause 8.4(3).

8.2. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1 - 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Etsi differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteet ja määritä niiden tyypit.
- (b) Mitä linearisointi kertoo tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuisista?
- (c) Miten ratkaisut käyttäytyvät hyperbolisten tasapainopisteiden kautta kulkevilla suorilla?
- (d) Hahmottele vektorikenttää f ja kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisujen käyttäytymistä.

8.3. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä $f(x) = \begin{pmatrix} 4 - 2x_2 \\ 12 - 3x_1^2 \end{pmatrix}$.

- (a) Määritä vektorikentän f tasapainopisteet.
- (b) Määritä vektorikentän f linearisoinnit tasapainopisteissä.
- (c) Mitä voit päätellä tasapainopisteiden vakaudesta linearisointien perusteella?
- (d) Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisukäyrät.²
- (e) Miten alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = (-4, 2) \end{cases}$$

ratkaisut käyttäytyvät, kun $t \rightarrow -\infty$ ja $t \rightarrow \infty$?

8.4. Ratkaise vektorikentän $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$ määräämä differentiaaliyhtälö. Määritä tasapainopisteen 0 vakaa ja epävakaa monisto.³

8.5. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Tällöin 0 on vektorikentän f tasapainopiste, joka ei ole hyperbolinen. Miten ratkaisut käyttäytyvät tasapainopisteen lähellä?

Tehtävissä 8.6-8.8 tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \left(\frac{\cos x_1}{10} + \cos x_2 \right) \\ \sin x_2 \left(\cos x_1 - \frac{\cos x_2}{10} \right) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

²Katso lukua 6.1.

³Katso Esimerkki 8.6.

- 8.6.** Määritä yhtälön (8.2) tasapainopisteet. Mitä voit päätellä linearisoinneista tasapainopisteissä?
- 8.7.** Määritä yhtälön (8.2) satulapisteiden vakaat ja epävakaat käyrät.
- 8.8.** Määritä rajajoukko $\omega(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}^2$.

Luku 9

Liapunovin menetelmä

Tasapainopisteen vakaus tai asymptoottinen vakaus voidaan joskus päätellä tässä luvussa tarkasteltavalla Liapunovin menetelmällä. Tässä menetelmässä differentiaaliyhtälön ratkaisua ei tarvitse tuntea mutta tarvitaan vektorikentän kanssa oikealla tavalla yhteensopiva reaaliarvoinen funktio.

Tässä luvussa tarkastelemme myös fysiikassa merkittäviä Hamiltonin systeemejä, joiden energiafunktio eli Hamiltonin funktio on monissa tapauksissa Liapunovin funktio. Yleisessäkin tapauksessa Hamiltonin systeemin radat sisältyvät energiafunktion tasa-arvojoukkoihin, mikä erityisesti tason systeemeissä helpottaa usein ratkaisujen käyttäytymisen selvittämistä.

9.1 Liapunovin funktio

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Differentioituvan funktion $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ **rataderivaatta** eli **Lien derivaatta vektorikentän f suuntaan** on

$$\dot{L}(x) = DL(x)f(x) = (\nabla L(x) \mid f(x)).$$

Lemma 9.1. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Jos $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva ja x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, niin*

$$\dot{L}(x(t)) = \frac{d}{dt}L \circ x(t) \Big|_{t=0}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 9.2. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Jos $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva ja x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, siten, että $\dot{L} = 0$, niin differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisut sisältyvät funktion L tasa-arvojoukkoihin.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Olkoon $V \subset U$ vektorikentän f tasapainopisteen b avoin ympäristö. Differentioituva funktio $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ on vektorikentän f **Liapunovin funktio** pisteessä b , jos

- (1) $L(b) = 0$ ja $L(x) > 0$ kaikilla $x \in V - \{b\}$ ja
- (2) $\dot{L}(x) \leq 0$ kaikilla $x \in V - \{b\}$.

Lause 9.3 (Liapunovin lause). *Olkoon b vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos jossain pisteen b avoimessa ympäristössä $V \subset U$ on Liapunovin funktio, niin b on vakaa.*

Todistus. Olkoon L Liapunovin funktio pisteessä b . Olkoon $\delta > 0$ siten, että $\bar{B}(b, \delta) \subset V$ ja olkoon

$$\alpha = \min_{x \in \partial B(b, \delta)} L(x) > 0.$$

Olkoon

$$W = \{x \in B(b, \delta) : L(x) < \alpha\}.$$

Nyt W on tasapainopisteen b avoin ympäristö ja koska $\dot{L} \leq 0$, niin joukosta W lähtevät ratkaisut pysyvät siinä. Seurauksen 5.13 nojalla ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton. Siispä b on vakaa. \square

Esimerkki 9.4. Esimerkin 6.2 funktio L on Lotkan ja Volterran yhtälön Liapunovin funktio tasapainopisteessä $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$, sillä

$$DL(r, h)f(r, h) = \begin{pmatrix} \delta - \frac{\gamma}{r} & \beta - \frac{\alpha}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha - \beta h)r \\ (\delta r - \gamma)h \end{pmatrix} = 0.$$

Proposition 9.2 nojalla ratkaisut sisältyvät funktion L tasa-arvokäyriin ja Proposition 5.9 nojalla ratkaisut ovat jaksollisia.

Esimerkki 9.5. Funktio $L(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$ on lineaarisen differentiaaliyhtälön (7.5) Liapunovin funktio ja $\dot{L} \equiv 0$. Kuten edelläkin Liapunovin funktion tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja.

9.2 Hamiltonin systeemit

Tässä luvussa tutustumme fysiikassa merkittävään differentiaaliyhtälöiden tyyppiin, jonka tarkastelussa Liapunovin lauseet ovat hyödyllisiä. Otamme ensin käyttöön uuden merkinnän:

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio. Kirjoitetaan pisteen $z \in \Omega$ koordinaatit muodossa $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio. Differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

on **Hamiltonin systeemi**, jolla on n vapausastetta. Funktio H on systeemin **kokonaisenergia** tai **Hamiltonin funktio**.^a

^aMekaniikassa x kuvaa kappaleen paikkaa ja y sen liikemomenttia, katso Esimerkki 9.7.

Propositio 9.6. *Hamiltonin systeemin ratkaisut sisältyvät kokonaisenergiafunktion tasarvojoukkoihin*

Todistus. Harjoitustehtävä 9.5. □

Esimerkki 9.7 (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa Esimerkissä 5.1 ja Harjoitustehtävässä 6.4 tarkasteltu differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases} \quad (9.1)$$

Differentiaaliyhtälöllä (9.1) on numeroituva joukko tasapainopisteitä: Tasapainopisteet $(\pi + k2\pi, 0)$ vastaavat heilurin yläasemaa. Näissä pisteissä yhtälön linearisointi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

on hyperbolinen kaikilla $b \geq 0$ ja ominaisarvojen tulo on negatiivinen. Nämä tasapainopisteet ovat siis Lauseen 8.7 nojalla epävakaita. Tasapainopisteet $(k2\pi, 0)$ taas vastaavat heilurin ala-asemaa. Näissä pisteissä yhtälön linearisointi on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}.$$

Jos kitka on positiivinen, niin ala-asema on vakaa tasapainopiste, jos taas $b = 0$, niin ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia ja linearisointi on keskus.

Kitkaton matemaattinen heiluri on Hamiltonin systeemi. Sen Hamiltonin funktio on systeemin energia

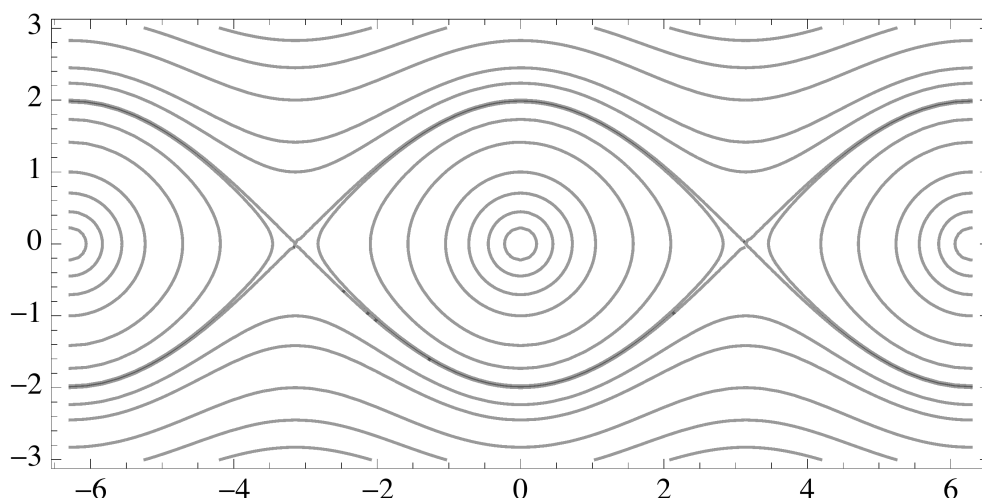
$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos \theta.$$

joka koostuu **liike-energiasta** $\frac{1}{2}v^2$ ja **potentiaalienergiasta** $1 - \cos \theta$.

Nyt $E(0, 0) = 0$ ja $E(\theta, v) > 0$, kun $(\theta, v) \neq (k2\pi, 0)$ ja

$$\dot{E} = DE(\theta, v) \begin{pmatrix} v \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = 0,$$

joten energia Liapunovin funktio ala-asemaa vastaavissa tasapainopisteissä $(\theta, v) = (k2\pi, 0)$: $E(k2\pi, 0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Siis 0 on vakaa tasapainopiste.



Kuva 9.1: Kitkattoman epälineaarisen heilurin yhtälön ratkaisuja.

Koska energia on sileä funktio, jonka gradientin nollakohdat ovat vektorikentän tasapainopisteissä, sen tasa-arvokäyrät ovat sileitä käyriä tasapainopisteiden ulkopuolella. Kuten Lotkan ja Volterran yhtälön tapauksessa näemme, että asa-arvokäyrät ovat systeemin suljettuja ratoja, kun $E(\theta, v) < 2 = E(\pi, 0)$.

Kitkattoman epälineaarisen heilurin hyperbolisten tasapainopisteiden $((1 + 2k)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, (globaalit) vakaat ja epävakaaat monistot saadaan valitsemalla vuorotellen alempi ja ylempi haara kokonaisenergian tasa-arvojoukossa

$$\{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : E(\theta, v) = E(\pi, 0) = 2\} = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 2(1 - \cos \theta)\},$$

kuvan 9.1 mukaisesti.

Jatkuvasti differentioituvan vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste b on **surkastumaton** (tai **degeneroitumaton**), jos $Df(p)$ on kääntävyä.

Lemma 9.8. *Yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin surkastumattoman tasapainopisteen linearisointi on keskus tai satula.*

Todistus. Harjoitustehtävä 9.6. □

Tämän avulla osoitetaan

Propositio 9.9. *Yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin degeneroitumaton tasapainopiste b on*

- *vakaa mutta ei asympotoottisesti vakaa, jos sen linearisointi on keskus ja*
- *epävakaa, jos sen linearisointi on satula.*

Todistus. Harjoitustehtävä 9.7. □

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli ja olkoon $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Funktion f määräämä **Newtonin systeemi** on toisen asteen differentiaaliyhtälö $\ddot{x} = f(x)$ tai vastaava differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \quad (9.2)$$

Newtonin systeemin **liike-energia** on $T(v) = \frac{1}{2}v^2$ ja sen **potentiaalienergia** pisteen $x_0 \in I$ suhteen on

$$V(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds .$$

Systeemin **kokonaisenergia** on $E = T + V$.

Propositio 9.10. *Newtonin systeemi on yhden vapausasteen Hamiltonin systeemi, jonka Hamiltonin funktio on systeemin energia.*

Todistus. Newtonin systeemille (9.2) pätee

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial x} = \partial V'(x) = -f(x)$$

ja

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial v} = T'(v) = v . \quad \square$$

Esimerkki 9.11. Esimerkissä 9.7 tarkasteltu kitkaton matemaattinen heiluri on Newtonin systeemi. Sen kokonaisenergia koostuu liike-energiasta $\frac{1}{2}v^2$ ja potentiaalienergiasta $1 - \cos \theta$.

9.3 Aito Liapunovin funktio

Olkoon $V \subset U$ vektorikentän f tasapainopisteen b avoin ympäristö. Differentioituva funktio $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ on vektorikentän f **aito Liapunovin funktio** pisteessä b , jos se on Liapunovin funktio pisteessä b ja

$$(\hat{2}) \quad \dot{L}(x) < 0 \text{ kaikilla } x \in V - \{b\}.$$

Lause 9.12 (Liapunovin lause). *Olkoon b vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos jossain pisteen b avoimessa ympäristössä $V \subset U$ on aito Liapunovin funktio, niin b on asympotoottisesti vakaa.*

Todistus. Jatkamme Lauseen 9.3 merkinnöillä. Oletetaan, että $\dot{L}(x) < 0$ kaikilla $x \neq b$. Olkoon x differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, jolle $x(0) \in V$. Erityisesti pisteen $x(0)$ positiivinen rata on rajoitettu, joten kompaktiuden nojalla on rajattomasti kasvava jono $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ siten, että $x_{t_k} \rightarrow w_0$ jollain $w_0 \in \overline{V}$. Koska V on aito Liapunovin funktio, saadaan Lemman 9.1 ja jatkuvuuden nojalla

$$V(w_0) < V(x_t) \quad (9.3)$$

kaikilla $t \geq 0$.

Oletetaan, että $w_0 \neq b$. Olkoon w ratkaisu, jolle pätee $w(0) = w_0$. Olkoon $s > 0$. Tällöin $L(w(s)) < L(w_0)$, koska L on aito Liapunovin funktio. Proposition 5.7 nojalla $V(x_{t_k+s}) < V(w_0)$, kun k valitaan niin, että x_{t_k} on riittävän lähellä pistettä w_0 , joten on päädytty ristiriitaan epäyhtälön (9.3) kanssa. \square

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ sileä funktio. Differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = -\nabla V(x) \quad (9.4)$$

on funktiota V vastaava **gradienttisysteemi**.

Propositio 9.13. *Olkoon V sileä funktio. Tällöin*

- (1) *vektorikenttä $-\nabla V$ on kohtisuorassa funktion V tasa-arvojoukkoa vastaan jokaisessa vektorikentän $-\nabla V$ säännöllisessä pisteessä. Tämän pisteen ympäristössä funktion V tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja.*
- (2) *jos b on gradienttisysteemin (9.4) tasapainopiste, niin sen linearisoinnin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia.*
- (3) *jos b on funktion V eristetty kriittinen piste, joka on aito lokaali minimipiste, niin funktio $x \mapsto V(x) - V(b)$ on on vastaavan gradienttisysteemin (9.4) aito Liapunovin funktio pisteessä b ja b on systeemin asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.*

Todistus. Kohdat (1)¹ ja (2) tehdään harjoituksissa.

Kohdan (3) todistusta varten huomaamme, että funktio $x \mapsto V(x) - V(b)$ on selvästi positiivinen jossain pisteen b punkteeratussa ympäristössä. Lisäksi

$$\dot{V}(x) = DV(x)(-\nabla V(x)) = -\|\nabla V(x)\|^2 < 0,$$

koska oletimme, että b on eristetty kriittinen piste. Väite seuraa Liapunovin lauseesta 9.12. \square

Esimerkki 9.14. Funktio $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

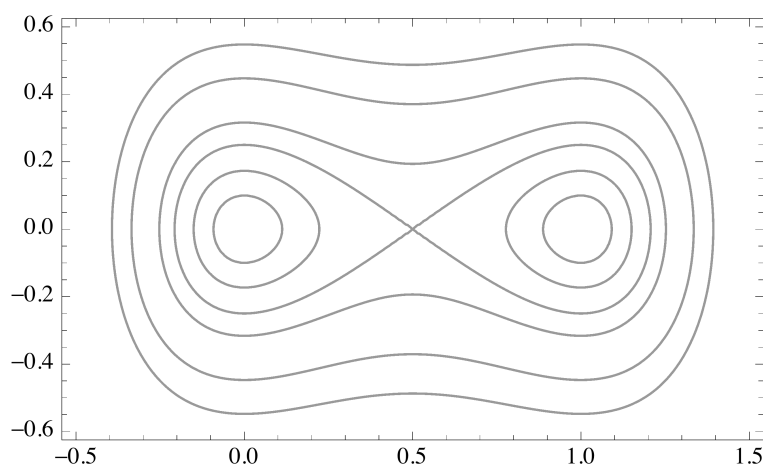
määrää gradienttisysteemin

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4x_1(x_1 - \frac{1}{2})(x_1 - 1) \\ -2x_2 \end{pmatrix},$$

jota tarkasteltiin Harjoitustehtävässä 6.3. Vektorikenttä ∇V on kohtisuorassa funktion V tasa-arvokäyriä vastaan. Koska $\nabla V(x) = 0$ ainoastaan, jos $x_2 = 0$ ja $x_1 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, niin tasa-arvokäyrät ovat sileitä kaikkialla paitsi tasapainopisteessä $(\frac{1}{2}, 0)$. Pisteet 0 ja $(0, 1)$ ovat funktion V minimipisteitä, joten V on aito Liapunovin funktio näissä pisteissä.

Kaikki tasapainopisteet ovat hyperbolisia ja kaikki radat suppenevat kohti jotain tasapainopistettä: Jos $x_1 < \frac{1}{2}$, niin $\phi_t(x)$ suppenee kohti asymptoottisesti vakaata tasapainopistettä 0 ja jos $x_1 > \frac{1}{2}$, niin $\phi_t(x)$ suppenee kohti asymptoottisesti vakaata tasapainopistettä $(1, 0)$, kun $t \rightarrow \infty$. Suoran $x_1 = \frac{1}{2}$ pisteet taas suppenevat kohti epävakaata tasapainopistettä $(\frac{1}{2}, 0)$.

¹Katso Vektorifunktioiden analyysi 2.

Kuva 9.2: Funktion V tasa-arvokäyriä

9.4 Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaate

Jos b on asymptoottisesti vakaa tasapainopiste, niin sen maksimaalista avointa ympäristöä W , jossa pätee $\phi_t(x) \rightarrow b$, kun $t \rightarrow \infty$ kaikille $x \in W$, sanotaan pisteen b **attraktioaltaaksi**.

Lause 9.15 (Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaate). *Olkkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ja olkkoon $b \in U$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste. Olkkoon $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ vektorikentän f Liapunovin funktio pisteessä b . Olkkoon $P \subset U$ pisteen b positiivisesti invariantti kompakti ympäristö. Oletetaan, että L ei ole vakio millään maksimaalisella ratkaisukäyrällä, joka sisältyy kokonaan joukkoon $P - \{b\}$. Tällöin b on asymptoottisesti vakaa tasapainopiste ja joukko P sisältyy pisteen b attraktioaltaaseen.*

Todistus. Olkkoon $x_0 \in P$ siten, että $\omega(x_0) \neq \{b\}$. Koska P on kompakti, niin $\omega(x_0)$ ei ole tyhjä. Harjoituksissa osoitettiin, että $\omega(x_0)$ sisältyy kokonaan joukkoon P ja että se on invariantti differentiaaliyhtälön virtauksessa.

Olkkoon $z \in \omega(x_0)$. Tällöin on $t_k \nearrow \infty$ siten, että $\phi_{t_k}(x_0) \rightarrow z$, kun $k \rightarrow \infty$. Nyt $L(\phi_{t_k}(x_0)) \geq L(z)$ kaikilla k ja $\lim_{k \rightarrow \infty} L(\phi_{t_k}(x_0)) = L(z)$. Toisaalta kaikille $s \in \mathbb{R}$ pätee $\lim L(\phi_{t_k+s}(x_0)) = L(z)$, koska L on vähenevä rataa pitkin, ja $\phi_{t_k+s}(x_0) \rightarrow \phi_s(z)$, kun $k \rightarrow \infty$, joten $L(\phi_s(z)) = L(z)$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$. Koska pisteen z rata sisältyy joukkoon P , onkin löydetty kokonaan joukkoon $P - \{b\}$ sisältyvä rata, jolla L on vakio, mutta tämä on vastoin oletusta. \square

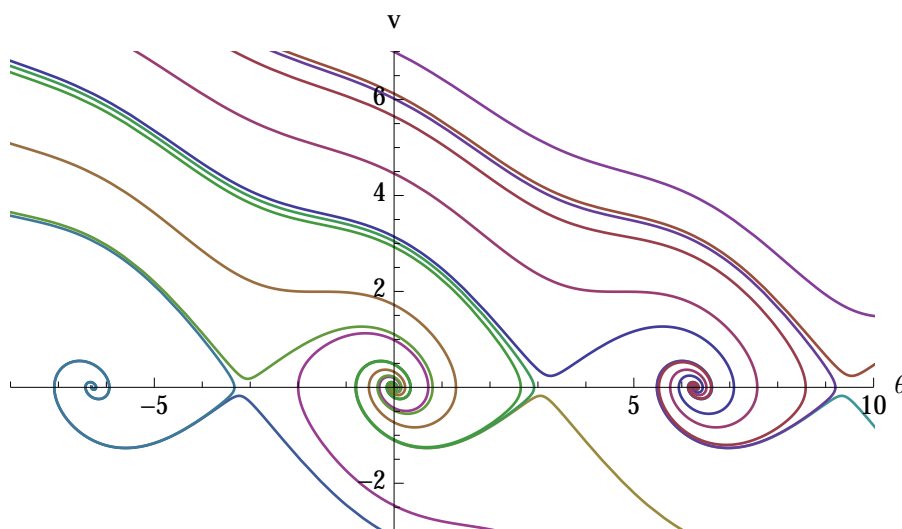
Esimerkki 9.16 (Epälineaarinen heiluri). Esimerkissä 9.7 määritelty energia on aito Liapunovin funktio kitkalliselle heilurille ala-asemaa vastaavissa tasapainopisteissä $(\theta, v) = (k2\pi, 0)$: $E(k2\pi, 0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja

$$\dot{E} = DE(\theta, v) \begin{pmatrix} v \\ -bv - \sin \theta \end{pmatrix} = -bv^2 < 0,$$

kaikilla $b > 0$ ja $v \neq 0$. Siis 0 on asymptoottisesti vakaa kaikilla $b > 0$.

Energian tasa-arvojoukko

$$\begin{aligned} & \{(\theta, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : E(\theta, v) = E(\pi, 0) = 2\} \\ & = \{(\theta, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : v^2 = 2(1 - \cos \theta)\} \end{aligned}$$



Kuva 9.3: Kitkallisen epälineaarisen heilurin yhtälön ratkaisuja, kun $b = \frac{1}{2}$.

on topologinen ympyrä, joka koostuu kahdesta epävakaasta tasapainopisteestä $(\pm\pi, 0)$ ja kahdesta niitä yhdistävästä radasta. Radat, joiden alkuarvo on tämän ympyrän rajamassa rajoitetussa joukossa

$$P = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : |\theta| < \pi, E(\theta, \pi) < 2\}$$

pysyvät Jordanin käyrälauseen² nojalla tässä joukossa, joka on siis positiivisesti invariantti. Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaatteen nojalla joukko P sisältyy origon attraktioaltaaseen. Nimittäin, jos E on vakio jollain radalla, niin

$$\dot{E}(\theta, v) = -bv^2 = 0.$$

Siispä $v = 0$, joten $\dot{\theta} = 0$. Lisäksi $\sin \theta = \dot{v} = 0$, joten ehdosta $|\theta| < \pi$ saadaan $\theta = 0$. Joukossa $P - \{0\}$ ei siis ole ratoja, joilla E on vakio. “Fysikaalinen päättely” tai Mathematica kertovat, että attraktioallas on huomattavasti suurempi.³

9.5 Vakaista ja epävakaista monistoista

Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä. Vektorikentän f määräämän differentiaaliyhtälön rata \mathcal{O} on **homokliininen**, jos $\omega_f(x) = \alpha_f(x)$ on satulapiste kaikille $x \in \mathcal{O}$. Rata on **heterokliininen**, jos $\omega_f(x) \neq \alpha_f(x)$ ovat satulapisteitä kaikille $x \in \mathcal{O}$.

Esimerkki 9.17. Esimerkissä 9.14 käsitelty funktio $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$V(x) = x^2(x - 1)^2 + y^2,$$

²Lause C.7.

³Katso Kuva 9.3.

määrää yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -4x(x - \frac{1}{2})(x - 1), \end{cases}$$

jonka radat ovat kuvassa 9.2 esitetyjä funktion V tasa-arvokäyrien komponentteja. Systeemillä on kaksi homokliinistä rataa, jotka muodostavat tasapainopisteen $(\frac{1}{2}, 0)$ kanssa kahdeksikon muotoisen tasa-arvokäyrän $V(x, y) = \frac{1}{16}$. Oikeanpuoleinen silmukka on rata $\mathcal{O}(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0)$, jolle $\phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$ oikealta alaviistosta, kun $t \rightarrow \infty$ ja $\phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$ oikealta yläviistosta, kun $t \rightarrow -\infty$. Vasemmanpuoleinen silmukka on rata $\mathcal{O}(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0)$, joka käyttäytyy vastaavasti.

Esimerkki 9.18. Propositio 9.9 ei sovellu funktion $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$$

määräämään Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

tasapainopisteen 0 tarkasteluun koska 0 on tarkasteltavan vektorikentän surkastunut tasapainopiste. Samasta syystä emme voi myöskään soveltaa Vakaan ja epävakaan moniston lausetta. Voimme kuitenkin määrittää origon vakaan ja epävakaan moniston Hamiltonin funktion avulla: $H(0, 0) = 0$, joten epävakaa ja vakaa monisto sisältyvät tasarvojoukkoon

$$H^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = \frac{2}{3}x^3\}.$$

Tämä käyrä on muodoltaan **kärki** (cusp). Koska $\dot{y} = x^2 > 0$ kaikkialla, nähdään, että käyrän alempi haara on origon vakaa monisto ja ylempi haara on origon epävakaa monisto.

Harjoitustehtäviä

9.1. Todista Lemma 9.1 ja Propositio 9.2.

9.2. Osoita, että funktio $L(x) = \|x\|^2$ on differentiaaliyhtälön

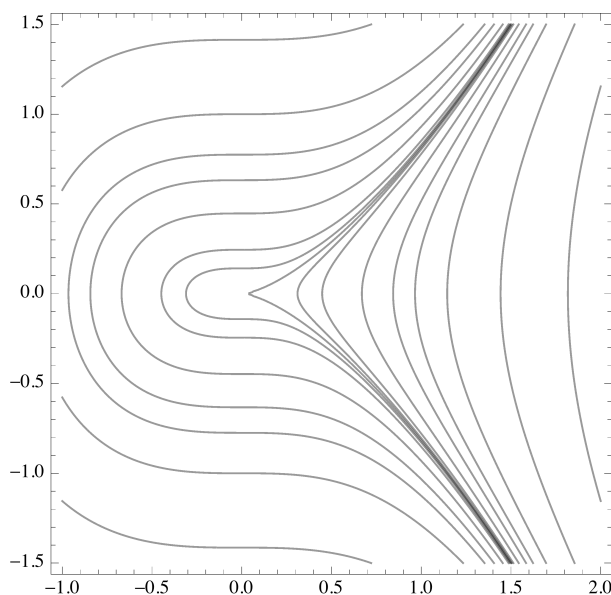
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ -x_2(x_1^2 + x_3^2 + 1) \\ -\sin x_3 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

aito Liapunovin funktio origossa.

9.3. Arvioi niiden pisteiden joukkoa, joille differentiaaliyhtälön (9.5) ratkaisut lähestyvät origoa, kun $t \rightarrow \infty$.

9.4. Osoita, että kaikki gradienttisysteemin ω -rajapisteet ovat systeemin tasapainopisteitä.

9.5. Osoita, että Hamiltonin systeemin kokonaisenergian rataderivaatta on 0. Osoita, että Hamiltonin systeemin ratkaisukäyrät sisältyvät kokonaisenergian tasarvojoukkoihin.



Kuva 9.4: Hamiltonin funktiota $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$ vastaavan Hamiltonin systeemin ratoja lähellä tasapainopistettä 0.

9.6. Todista Lemma 9.8

9.7. Todista Propositio 9.9.

9.8. Ratkaise kokonaisenergiaa

$$H(x, y) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2}$$

vastaava kahden vapausasteen Hamiltonin systeemi.

9.9. Olkoon $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $V(t) = (t^2 - 1)^2$. Tarkastele tason differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) - \mu x_2 \end{pmatrix}$$

tasapainopisteitä parametrin $\mu \geq 0$ eri arvoilla.

9.10. Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä $f(x) = (2x_2(x_3 - 1), -x_1(x_3 - 1), -x_3^3)$. Osoita, että funktio $L(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$ on vektorikentän f Liapunovin funktio origossa sopivalla vakioiden a, b, c valinnalla. Mitä voit päätellä origon vakaudesta?

9.11. Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

on Hamiltonin systeemi. Määritä kriittisten pisteiden vakaus. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit vakaat ja epävakaat monistot.

9.12. Osoita, että differentiaaliyhtälö⁴

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -x - 2xy \end{cases}$$

on Hamiltonin systeemi. Määritä kriittisten pisteiden vakaus. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit vakaat ja epävakaat monistot.

Lorenzin differentiaaliyhtälö on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

9.13. Olkoon $0 < r < 1$. Osoita, että 0 on Lorenzin differentiaaliyhtälön ainoa tasapainopiste. Osoita, että funktio $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2 + \sigma(x_2^2 + x_3^2)$$

on aito Liapunovin funktio origossa.

⁴Katso Harjoitustehtävä 8.2

Luku 10

Virtauksen sileys ja Peanon olemassaololause

Osoitamme tässä luvussa, että C^1 -vektorikentän virtaus on C^1 -kuvaus. Todistus perustuu epäautonomisen variaatioyhtälön käyttöön.

Aloitamme todistamalla yleisen ratkaisujen olemassaolotuloksen, jossa vektorikentästä oletetaan vähemmän kuin Picardin ja Lindelöfin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseissa. Alla todistettavan Peanon lauseen päätelmä on myös heikompi, ratkaisun yksikäsitteisyttä ei saada tässä tapauksessa. Esimerkin 1.8 vektorikenttä toteuttaa Peanon lauseen ehdot mutta ei Picardin ja Lindelöfin lauseen ehtoja.

10.1 Peanon olemassaololause

Lause 10.1 (Peanon olemassaololause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoot $b \in U$ ja $r > 0$ siten, että $\overline{B}(b, r) \subset U$. Olkoon $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli. Oletetaan, että kuvaus $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuva ja $\|f(x, t)\| \leq M$ joukossa $I \times B(b, r)$. Olkoon $\alpha = \min(a, r/M)$. Tällöin alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = b \end{cases} \quad (10.1)$$

on ainakin yksi välillä $[t_0, t_0 + \alpha]$ määritelty ratkaisu.

Todistus. Olkoon $\delta > 0$ ja olkoon $y_0: [t_0 - \delta, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -kuvaus, jolla on ominaisuudet

$$y_0(t_0) = b, \quad \|y_0(t) - b\| \leq r, \quad \text{ja} \quad \|y_0'(t)\| \leq M,$$

kun $t \in [t_0 - \delta, t_0]$. Määritellään kuvaus $y_\varepsilon: [t_0 - \delta, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ kaikille $0 < \varepsilon \leq \delta$ asettamalla ensin

$$y_\varepsilon(t) = y_0(t),$$

kun $t \in [t_0 - \delta, t_0]$, ja

$$y_\varepsilon(t) = b + \int_{t_0}^t f(s, y_\varepsilon(s - \varepsilon)) ds,$$

kun $t \in [t_0, t_0 + \min(\varepsilon, \alpha)]$. Tällöin y_ε toteuttaa

$$\|y_\varepsilon(t) - b\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_\varepsilon(s - \varepsilon)) ds \right\| \leq M|t - t_0| \leq r,$$

koska $|t - t_0| \leq \alpha \leq r/M$ ja vastaavalla laskulla nähdään, että y_ε on M -Lipschitz-jatkuva välillä $[t_0 - \delta, t_0 + \min(\varepsilon, \alpha)]$. Asetetaan sitten

$$y_\varepsilon(t) = b + \int_{t_0}^t f(s, y_\varepsilon(s - \varepsilon)) ds,$$

kun $t \in [t_0 + \min(\varepsilon, \alpha), t_0 + \min(2\varepsilon, \alpha)]$, ja saadaan M -Lipschitz-jatkuva kuvaus, joka toteuttaa $\|y_\varepsilon(t) - b\| \leq r$, kun $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \min(2\varepsilon, \alpha)]$. Jatketaan näin, kunnes on määritelty jatkuva kuvaus $y_\varepsilon: [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolla on samat ominaisuudet koko määrittelyvälillään.

Perhe $(y_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq \delta}$ on rajoitettu, koska kaikkien kuvausten kuvajoukot sisältyvät palloon $\overline{B}(b, r)$ ja se on yhtäjatkuva koska kaikki kuvaukset ovat M -Lipschitz-jatkuvia. Siis Arzelà ja Ascolin lauseen¹ nojalla on jono $(\varepsilon(n))_{n \in \mathbb{N}}$, jolle $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ ja $y_{\varepsilon(n)}$ suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa kuvausta $y: [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \rightarrow \overline{B}(b, r)$, kun $n \rightarrow \infty$. Koska kuvaus f on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $I \times \overline{B}(b, r)$, saadaan integraaliyhtälö

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\varepsilon(n)}(t) = b + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{\varepsilon(n)}(s - \varepsilon(n))) ds = b + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

joten y on alkuarvot tehtävän (10.1) ratkaisu. □

Esimerkki 10.2. Tarkasteltaessa yksiulotteisen alkuarvot tehtävän $\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ratkaisua välillä $[0, 1]$ Peanon olemassaololauseen avulla voidaan aloittaa vakioratkaisulla $y_0 \equiv 1$. Määritellään sitten

$$y_\varepsilon(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$$

välillä $[0, \varepsilon]$ ja sen jälkeen

$$y_\varepsilon(t) = 1 + \int_0^t y_\varepsilon(s - \varepsilon) ds = 1 + \varepsilon + \int_\varepsilon^t (1 + s - \varepsilon) ds = 1 + t + \frac{(t - \varepsilon)^2}{2}$$

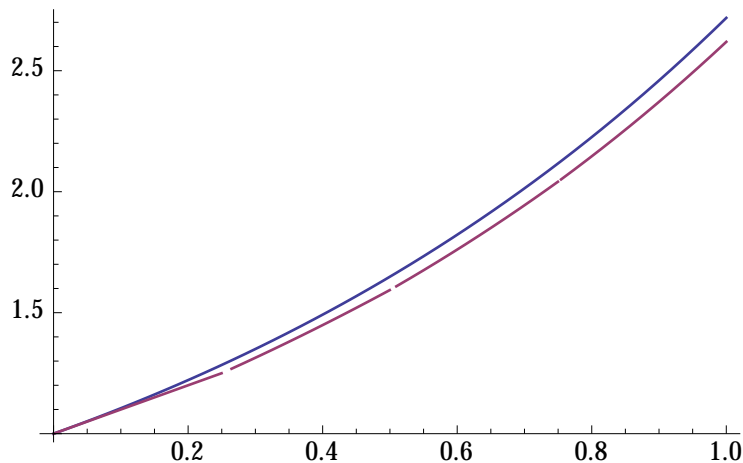
ja jatketaan näin. Kun $\varepsilon \rightarrow 0$ funktiot y_ε suppenevat tasaisesti kohti eksponenttifunktiota. Kuvassa funktion $y_{1/4}$ ja alkuarvot tehtävän ratkaisun, eksponenttifunktion (ylempi käyrä) kuvaajat.

Todistamme vielä yleisen tuloksen siitä, miten differentiaaliyhtälöiden ratkaisut käyttäytyvät kun yhtälö muuttuu hieman. Tämän tuloksen seurausta sovelletaan variaatioyhtälöön.

Lause 10.3. *Olkoon $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$. Olkoot $Y_i \in \mathbb{R}^n$, $t_i \in I$, $i \in \mathbb{N}$ ja olkoon $r > 0$. Olkoot $f_i \in C^0(I \times \overline{B}(Y_0, r), \mathbb{R}^n)$ ja olkoot y_i alkuarvot tehtävän*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_i) = Y_i \end{cases}$$

¹Lause C.6



ratkaisuja välillä I , kun $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että jono $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on tasaisesti rajoitettu. Jos $f_i \rightarrow f_0$, $t_i \rightarrow t_0$ ja $Y_i \rightarrow Y_0$, kun $i \rightarrow \infty$, niin jonolla $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on suppeneva osajono. Tämän osajonon rajafunktio on alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (10.2)$$

ratkaisu. Jos alkuarvottehtävällä (10.2) on yksikäsitteinen ratkaisu, niin $y_i \rightarrow y_0$, kun $i \rightarrow \infty$.

Todistus. Koska kuvaukset f_i ovat jatkuvia ja suppenevat tasaisesti kohti kompaktissa joukossa jatkuvaa funktiota f_0 , on $K \geq 0$, jolle pätee $\|f_i\| \leq K$ kaikille $i \in \mathbb{N}$. Siis kuvaukset y_i ovat K -Lipschitz-jatkuvia kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jono $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on siis yhtäjatkuva. Arzelàn ja Ascolin lauseen nojalla jonolla $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on suppeneva osajono $(y_{i(k)})_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$. Samaan tapaan kuin Lauseen 10.1 todistuksen lopussa nähdään, että jonon $(y_{i(k)})_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ rajafunktio on alkuarvottehtävän (10.2) ratkaisu. \square

10.2 Gronwallin epäyhtälö

Peanon lauseen lisäksi tarvitsemme seuraavan teknisen tuloksen:²

Propositio 10.4 (Gronwallin epäyhtälö). *Olkoon $g: [0, a] \rightarrow [0, \infty[$ jatkuva funktio. Jos on $C \geq 0$ ja $K \geq 0$, joille*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds$$

kaikille $t \in [0, a]$, niin $g(t) \leq Ce^{Kt}$ välillä $[0, a]$. Erityisesti, jos $C = 0$, niin g on vakio-funktio $g \equiv 0$.

Todistus. Olkoon $G(t) = C + K \int_0^t g(s) ds$. Oletetaan ensin, että $C > 0$. Oletuksen mukaan $0 \leq g(t) \leq G(t)$ ja $G(t) \geq C > 0$ kaikilla $t \in [0, a]$. Analyysin peruslauseen nojalla $\dot{G}(t) = g(t)$. Nyt

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \frac{Kg(t)}{G(t)} \leq \frac{KG(t)}{G(t)} = K.$$

²Tulos tunnetaan myös Grönwallin amerikkalaistuneen nimen mukaan Gronwallin epäyhtälönä.

Siis $\log G(t) - \log G(0) \leq Kt$, joten kaikilla $t \in [0, a]$ pätee

$$g(t) \leq G(t) \leq G(0)e^{Kt} = Ce^{Kt},$$

kuten väitettiin.

Jos $C = 0$, niin jokaiselle $C' > 0$ saadaan edellisen perusteella arvio $g(t) \leq C'e^{Kt}$ kaikilla $t \in [0, a]$. Mutta tällöin $g(t) \leq C'e^{Ka} \rightarrow 0+$, kun $C' \rightarrow 0+$, joten $g(t) = 0$ kaikilla $t \in [0, a]$. \square

Parannamme seuraavaksi Proposition 5.7 tulosta ja todistamme Gronwallin epäyhtälön avulla Lipschitz-vektorikentän määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisujen jatkuvan riippuvuuden alkuarvoista eksplisiittisemmässä muodossa.

Lause 10.5 (Jatkuva riippuvuus alkuarvoista). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ K -Lipschitz-kuvaus. Olkoot $x, y: I \rightarrow U$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisuja suljetulla välillä $I = [t_0, t_1]$. Tällöin kaikille $t \in I$ pätee*

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \|y(t_0) - x(t_0)\|e^{K(t-t_0)}.$$

Todistus. Olkoon $g = \|x - y\|$. Koska

$$y(t) - x(t) = y(t_0) - x(t_0) + \int_{t_0}^t (f(y(s)) - f(x(s))) ds,$$

saamme kolmioepäyhtälöstä arvion

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \|y(t_0) - x(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t (f(y(s)) - f(x(s))) ds \right\| \\ &\leq \|y(t_0) - x(t_0)\| + K \int_{t_0}^t \|y(s) - x(s)\| ds \\ &\leq \|y(t_0) - x(t_0)\| + K \int_{t_0}^t g(s) ds. \end{aligned}$$

Väite seuraa Gronwallin epäyhtälöstä. \square

10.3 Lineaarinen epäautonominen yhtälö

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu, rajoitettu väli ja olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin yhtenäinen joukko, $I, U \neq \emptyset$. Olkoon $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ jatkuva kuvaus ja olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva. Differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{10.3}$$

on **lineaarinen differentiaaliyhtälö**.

Jos $f \equiv 0$, niin yhtälö (10.3) on **homogeeninen**.

Lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisuilla on seuraava hyvä ominaisuus, joka yleistää Seurauksen 2.20.

Propositio 10.6 (Superpositioperiaate). *Olkoon $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ jatkuva. Jos x_0 on lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön*

$$\dot{x} = A(t)x$$

ratkaisu ja x_f on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (10.4)$$

ratkaisu, niin $x_f + x_0$ on differentiaaliyhtälön (10.4) ratkaisu.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 10.7. *Lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisut muodostavat n -ulotteisen reaalisen vektoriavaruuden.*

Todistus. Todistetaan samaan tapaan kuin vastaava väite Seurauksen 2.20 todistuksessa. □

Lineaarille yhtälöille pätee vahvempi versio OY-lauseesta:

Lause 10.8. *Olkoon $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ kompakti väli. Olkoon $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ jatkuva kuvaus. Tällöin alkuarvotekävällä*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu välillä I .

Todistus. Se, että ratkaisuja on korkeintaan yksi, osoitetaan Gronwallin epäyhtälön ja superpositioperiaatteen 10.6 avulla samaan tapaan kuin Lause 10.5. Ratkaisun olemassaolo lokaalisti seuraa olemassaololauseesta 10.1. Ratkaisun olemassaolo koko välillä I tehdään paloittain jatkamalla. Yksityiskohdat tehdään harjoituksissa. □

Seuraus 10.9. *Olkoon x lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisu. Jos $x(t_0) = 0$ jollain t_0 , niin $x \equiv 0$.*

Todistus. Vakiokuvaus $x \equiv 0$ on alkuarvotekävän ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = 0$. Ratkaisu on yksikäsitteinen koko välillä Lauseen 10.8 nojalla. □

Seuraus 10.10. *Olkoot $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$. Jos vektorit $x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), \dots, x^{(k)}(t_0)$ ovat lineaarisesti riippumattomia jollain $t_0 \in I$, niin vektorit $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ ovat lineaarisesti riippumattomia kaikilla $t \in I$.*

Todistus. Harjoitus. □

Jos $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ ovat n -ulotteisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja ja jos $X: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on kuvaus, jolle matriisin $X(t)$ sarakkeet ovat $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$, niin X on ratkaisujen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ **Wronskin determinantti**.

Seuraava tulos Wronskin determinantin kaksijakoisesta käyttäytymisestä saadaan erikoistapauksena Seurauksesta 10.10.

Seuraus 10.11. *Jos Wronskin determinantti saa arvon 0 jossain määrittelyvälin pisteessä, niin se on nollafunktio.* □

10.4 Virtauksen sileys

Autonomisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisun $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ variaatioyhtälö on

$$\dot{u}(t) = Df(x(t))u(t). \quad (10.5)$$

Variaatioyhtälö on epäautonominen homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö.

Lause 10.12. *Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Olkkoon $x: I = [t_0, t_0 + a] \rightarrow U$ alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = b \end{cases} \quad (10.6)$$

ratkaisu. Olkkoon $\xi \in \mathbb{R}^n$ siten, että $x + \xi \in U$. Olkkoon $y = y_\xi: I \rightarrow U$ alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(t_0) = b + \xi \end{cases}$$

ratkaisu ja olkkoon $u = u_\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ alkuarvotehtävän (10.6) ratkaisua x vastaavan variaatioyhtälön

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Df(x(t))u(t) \\ u(t_0) = \xi \end{cases}$$

ratkaisu. Tällöin

$$y(t) = x(t) + u(t) + o(\xi)$$

tasaisesti kaikilla $t \in I$.

Todistus. Koska f on jatkuvasti differentioituva, sille pätee

$$f(p) = f(q) + Df(q)(p - q) + o(p - q),$$

kun $p \rightarrow q$ tasaisesti (muuttujan q suhteen) joukon U kompakteilla osajoukoilla. Tarkasteltavien alkuarvotehtävien kanssa ekvivalenteista integraaliyhtälöistä

$$\begin{aligned} y(t) &= b + \xi + \int_{t_0}^t f(y(s))ds, \\ x(t) &= b + \int_{t_0}^t f(x(s))ds, \text{ ja} \\ u(t) &= \xi + \int_{t_0}^t Df(x(s))u(s)ds \end{aligned}$$

saadaan

$$\begin{aligned} y(t) - (x(t) + u(t)) &= \int_{t_0}^t (f(y(s)) - f(x(s)) - Df(x(s))u(s))ds \\ &= \int_{t_0}^t Df(x(s))(y(s) - x(s) - u(s))ds + \int_{t_0}^t o(x(s) - y(s))ds. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Valitaan $\delta > 0$ siten, että ratkaisukäyrän $x(I)$ suljettu δ -ympäristö $\mathcal{N}_\delta(x(I))$ sisältyy joukkoon U . Koska f on C^1 , se on K -Lipschitz-jatkuva joukossa $\mathcal{N}_\delta(x(I))$ jollain $K \geq 0$.

Oletetaan, että $\|\xi\| = \|y(t_0) - x(t_0)\| \leq e^{-K^a}\delta$. Tällöin jäännöstermiä voidaan arvioida Lauseen 10.5 avulla:

$$\int_{t_0}^t o(x(s) - y(s))ds = \int_{t_0}^t o(\|x(t_0) - y(t_0)\|e^{K(s-t_0)})ds = o(\xi),$$

kun $\xi \rightarrow 0$.

Olkoon $N = \max_{s \in I} \|Df(x(s))\|$. Yhtälöstä (10.7) saadaan arvio

$$\|y(t) - (x(t) + u(t))\| \leq N \int_{t_0}^t \|y(t) - (x(t) + u(t))\| + o(\xi),$$

joten Gronwallin epäyhtälön nojalla kaikille $t \in [t_0, t_0 + a]$ pätee

$$\|y(t) - (x(t) + u(t))\| \leq o(\xi)e^{N(t-t_0)} \leq o(\xi)e^{Na} = o(\xi). \quad \square$$

Seuraus 10.13. *Olkoon $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$. Olkoot $Y_i \in \mathbb{R}^n$, $t_i \in I$, $i \in \mathbb{N}$. Olkoot $A_i \in C^0(I, \text{Mat}_n(\mathbb{R}))$ ja olkoot y_i alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) \\ y(t_i) = Y_i \end{cases} \quad (10.8)$$

ratkaisuja välillä I , kun $i \in \mathbb{N}$. Jos $A_i \rightarrow A_0$, $t_i \rightarrow t_0$ ja $Y_i \rightarrow Y_0$, kun $i \rightarrow \infty$, niin $y_i \rightarrow y_0$, kun $i \rightarrow \infty$.

Todistus. Gronwallin epäyhtälön avulla saadaan, että ratkaisujen jono on tasaisesti rajoitettu. Lauseen 10.8 nojalla yhtälöllä (10.8) on yksikäsitteinen ratkaisu, joten Lause 10.3 antaa väitteen. \square

Seuraus 10.14. *Jatkuvasti differentioituvan vektorikentän virtaus on jatkuvasti differentioituva.*

Todistus. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä ja olkoon ϕ sen virtaus. Olkoon $(b, t_0) \in U \times \mathbb{R}$. Virtauksen ϕ aikaderivaatta on $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, x) = f(\phi(t_0, x))$, joten se on jatkuva.

Lauseen 10.12 merkinnöillä

$$\phi(t_0, b + \xi) = y(t_0) = x(t_0) + u_\xi(t_0) + o(\xi) = \phi(t_0, b) + u_\xi(t_0) + o(\xi),$$

joten virtauksen differentiaali avaruuskomponenttien suhteen pisteessä (b, t_0) on lineaarikuvaus $\xi \rightarrow u_\xi(t_0)$. Jatkuva differentioituvuus seuraa Seurauksesta 10.13. \square

Harjoitustehtäviä

10.1. Todista Lauseeseen 10.6 sisältyvä superpositioperiaate.

10.2. Täydennä Lauseen 10.8 todistus.

10.3. Todista Seuraus 10.10.

10.4. Olkoon Γ vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -vektorikentän ω -rajasykli ja olkoon ϕ vastaava virtaus. Osoita, että joukko

$$\{x \in U : \omega(x) = \Gamma\} - \Gamma$$

on avoin.³

³Lause 10.5.

Luku 11

Ratkaisujen globaali käyttäytyminen

Tässä luvussa tarkastelemme luvussa 7.3 määriteltyjen differentiaaliyhtälön ω - ja α -rajajoukkojen rakennetta. Etsimme vastauksia kysymykseen, millaista joukkoa kohti differentiaaliyhtälön ratkaisut voivat kasautua. Osoittautuu, että tasossa tilanne on yksinkertaisempi kuin korkeammassa ulottuvuudessa. Luvussa 12 havaitsemme, että korkeammassa ulottuvuudessa rajajoukon rakenne voi olla monimutkaisempi.

Tässä luvussa tarvitsemme käänteiskuvauslausetta ja implisiittifunktiolausetta ja harjoituksissa myös Greenin lausetta. Nämä tärkeät differentiaali- ja integraalilaskennan tulokset kerrataan liitteessä B.2.

11.1 Ensimmäinen paluu-aika ja Poincarén kuvaus

Tässä luvussa tarkastelemme vektorikentän virtausta lähellä pistettä, joka ei ole tasapainopiste.

Pistettä, joka ei ole tarkasteltavan vektorikentän tasapainopiste, sanotaan **säännölliseksi pisteeksi**.

Osoitamme Lauseen 10.14 avulla, että säännöllisen pisteen lähellä virtaus käyttäytyy hyvin säännöllisesti:

Propositio 11.1. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Olkoon x_0 vektorikentän f säännöllinen piste. Tällöin on pisteen x_0 avoin ympäristö N , $\varepsilon > 0$ ja C^1 -diffeomorfismi $H: N \rightarrow]-\varepsilon, \varepsilon[^n$ siten, että*

$$H(\phi(t, x)) = H(x) + (t, 0, \dots, 0) \tag{11.1}$$

kaikille $x \in U$ ja itseisarvoltaan riittävän pienille t .

Todistus. Oletetaan, että $x_0 = 0$ ja että $f(0) = (\alpha, 0, \dots, 0)$. Olkoon $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ pieni pallo ja määritellään $G: V \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$G(y) = \phi(y_1, (0, y_2, \dots, y_n)).$$

Kuvaus G on selvästi C^1 , koska se on muodostettu virtauksen avulla ja virtaus on Seurausten 10.14 nojalla jatkuvasti differentioituva. Lisäksi

$$\frac{\partial G(0)}{\partial y_1} = \frac{\partial \phi(0,0)}{\partial t} = f(0) = (\alpha, 0, \dots, 0),$$

ja kuvaus $x \mapsto \phi(0, (0, x))$ on avaruuden \mathbb{R}^{n-1} identtinen kuvaus, jonka differentiaali origossa on identtinen kuvus. Siis $DG(0) = \text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$, joka on kääntyvä, joten käänteiskuvauslauseen¹ nojalla G on kääntyvä jossain origon pienessä ympäristössä.

Olkoon nyt H kuvauksen G käänteiskuvaus jossain pienessä origon ympäristössä. Tällöin H toteuttaa ehdon (11.1), jos ja vain jos G toteuttaa

$$\phi(t, G(y)) = G(y + (t, 0, \dots, 0))$$

kaikille y lähellä origoa ja kaikille itseisarvoltaan riittävän pienille t . Virtausominaisuuden perusteella saadaan

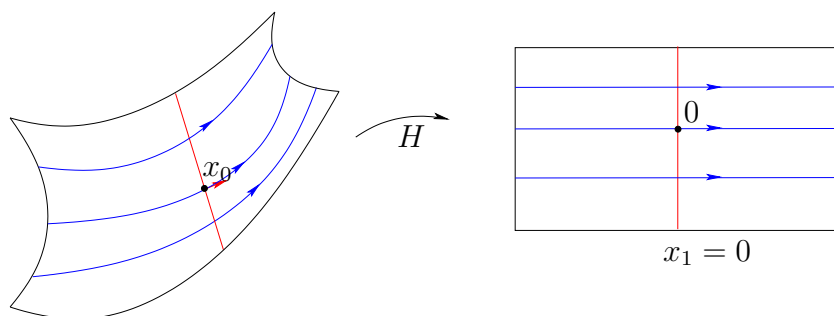
$$\begin{aligned} \phi(t, G(y)) &= \phi(t, \phi(y_1, (0, y_2, \dots, y_n))) = \phi(y_1 + t, (0, y_2, \dots, y_n)) \\ &= G(y_1 + t, y_2, \dots, y_n) = G((y_1, y_2, \dots, y_n) + (t, 0, \dots, 0)) \end{aligned}$$

kuten pitikin. Halutun muotoinen ympäristö saadaan valitsemalla sivun pituus $\varepsilon > 0$ riittävän pieneksi □

Diffeomorfismin H antamissa koordinaateissa virtaus on Proposition 11.1 nojalla siirto ajan t verran suuntaan, joka määräytyy vektorikentän arvosta pisteessä p , kunhan aika on riittävän pieni.

Proposition 11.1 antama ympäristö N on **virtauslaatikko**.^a

^aflow box



Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $S \subset U$ lokaali hyperpinta siten, että f ei ole pinnan S tangenttivektori missään pisteessä. Tällöin S on vektorikentän f **lokaali poikkileikkaus**.

Poikkileikkaus, joka on hypertason osa, on **hypertasopoikkileikkaus**. Jos hypertasopoikkileikkaus S on ortogonaalinen vektorin $f(x_0)$ kanssa jossain pisteessä $x_0 \in S$, niin S on **lokaali ortogonaalinen hypertasopoikkileikkaus** pisteessä x_0 .

¹Lause B.1

Proposition 11.1 diffeomorfismin H antamissa koordinaateissa hypertason $\{y_1 = 0\}$ kuutiota $]-\varepsilon, \varepsilon[$ leikkaavan osan alkukuvaa kuvauksella H on lokaali ortogonaalinen hypertasopoikkileikkaus pisteessä x_0 .

Esimerkki 11.2. Olkoon $\beta > 0$ ja olkoon $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$. Puolisuora

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = 0\}$$

on lokaali poikkileikkaus koska matriisin A määräämä vektorikenttä $x \mapsto Ax$ on kohtisuorassa joukon S kanssa jokaisessa joukon S pisteessä.

Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä ja olkoon ϕ vektorikentän f määräämä (osittainen) virtaus. Olkoon x_0 säännöllinen piste, jonka rata on jaksollinen. Olkoon S lokaali poikkileikkaus pisteessä x_0 ja olkoon

$$S_0 = \{x \in S : \text{on } t > 0, \text{ jolla } \phi_t(x) \in S\}.$$

Funktio $\tau: S_0 \rightarrow [0, \infty]$,

$$\tau(x) = \min\{t > 0 : \phi_t(x) \in S\},$$

on pisteen x ensimmäinen paluu aika poikkileikkaukseen S . Kuvaus $P: S_0 \rightarrow S$,

$$P(x) = \phi(\tau(x), x) \in S,$$

on Poincarén kuvaus.

Poincarén kuvaus P ei ole välttämättä määritelty koko poikkileikkauksessa S .

Esimerkki 11.3. Olkoot A ja S kuten esimerkissä 11.2. Jokaisella $x_0 \in S$ alkuarvotetävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on $x(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} x_0$, joten jokaisella $x_0 \in S$ on sama paluu aika $1/\beta$.

Yleisessä tapauksessa paluu aikaa ei saa selville samaan tapaan kuin Esimerkissä 11.3. Seuraava tulos kertoo kuitenkin, että paluu aika käyttäytyy siististi.

Propositio 11.4. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä ja olkoon ϕ vektorikentän f määräämä (osittainen) virtaus. Olkoon x_0 säännöllinen piste, jonka rata on jaksollinen. Olkoon S lokaali ortogonaalinen hypertasopoikkileikkaus pisteessä x_0 . Ensimmäinen paluu aika ja Poincarén kuvaus ovat differentioituvia kuvauksia jossain pisteen x_0 avoimessa ympäristössä poikkileikkauksella S .*

Todistus. Proposition 11.1 nojalla voimme olettaa, että Olkoon $T = \tau(x_0)$ pisteen x_0 jakso. Tarkastellaan jatkuvasti differentioituvaa funktiota

$$F(t, x) = (\phi_t(x) - x_0 \mid f(x_0)).$$

Pisteen x_0 jaksollisuudesta seuraa, että $F(T) = 0$. Määritelmän mukaan $\phi_t(x)$ on poikkileikkauksen S sisältävässä hypertasossa täsmälleen silloin, kun $F(t, x) = 0$.

Koska x_0 on säännöllinen piste,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(T, x_0) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(T, x_0) \mid f(x_0) \right) = \|f(x_0)\|^2 > 0.$$

Implisiittifunktiolauseen² nojalla on $r > 0$ ja yksikäsitteinen funktio $\tau: B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että $\tau(x_0) = T$ ja $F(\tau(x), x) = 0$ kaikille $x \in B(x_0, r)$. Saadaan siis määriteltyä jatkuvasti differentioituva kuvaus $P_0: B(x_0, r) \rightarrow f(x_0)^\perp$. Käyttämällä jatkuvuutta voidaan rajoittaa kuvaukset τ ja P_0 riittävän pieneen pisteen x_0 ympäristöön hypertasossa $f(x_0)^\perp$, jotta ne määrittelevät ensimmäisen paluuaajan ja Poincarén kuvauksen. \square

11.2 Tason systeemit

Autonomisen differentiaaliyhtälön ratojen rakenne kaksiulotteisessa tilanteessa on yksinkertaisempi kuin yleisessä tapauksessa. Tämä johtuu siitä, että radat eivät voi leikata olematta samoja ja koska rata on aina joko injektiivinen tai syklinen. Jordanin käyrälauseen³ nojalla syklin komplementti koostuu kahdesta erillisestä avoimesta epätyhjistä joukosta.

Vektorikentän f lokaali poikkileikkaus voidaan samastaa avoimen välin $I \subset \mathbb{R}$ kanssa. Kun tällainen samastus on valittu, tulee poikkileikkauksen jonojen monotonisuus määritellyksi luonnollisella tavalla.

Propositio 11.5. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -vektorikenttä ja olkoon ϕ vektorikentän f määrittämä (osittainen) virtaus. Olkoon S vektorikentän f lokaali poikkileikkaus. Olkoon x piste, jonka positiivinen rata kohtaa poikkileikkauksen S äärettömän monta kertaa. Olkoot $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ siten, että $\phi_{t_k}(x) \in S$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin jono $(\phi_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ on monotoninen poikkileikkauksella S .*

Todistus. Tarkastellaan kolmea perättäistä aikaa t_{k-1}, t_k, t_{k+1} . Tarkastellaan topologista ympyrää

$$\Sigma = \phi([t_{k-1}, t_k], x) \cup [\phi_{t_k}(x), \phi_{t_{k-1}}(x)].$$

Jordanin käyrälauseen nojalla ympyrän janssa homeomorfinen käyrä Σ jakaa tason kahteen yhtenäiseen osaan. Olkoon D joukon $\mathbb{R}^2 - \Sigma$ rajoitettu komponentti, joka on topologinen kiekko.

Jos vektori $f(\phi_{t_k}(x))$ osoittaa joukon D sisään, niin sama pätee kaikkialla janalla $[\phi_{t_k}(x), \phi_{t_{k-1}}(x)] \subset S$. Siis $\phi_{t_{k+1}}(x) \in D$ koska ratkaisukäyrä $\phi([t_k, \infty[, x)$ ei leikkaa joukkoa Σ , joten tarkasteltavat pisteet ovat väitetyssä järjestyksessä. Toinen tapaus todistetaan vastaavasti. \square

Propositio 11.6. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Olkoon S vektorikentän f lokaali poikkileikkaus. Olkoon $x \in U$. Tällöin joukossa $\omega(x) \cap S$ on korkeintaan yksi piste.*

Todistus. Olkoot $y_1, y_2 \in \omega(x) \cap S$, $y_1 \neq y_2$. Tällöin pisteen x rata kasautuu pisteisiin y_1 ja y_2 , joten se ei voi olla monotoninen, mikä on ristiriita Proposition 11.5 kanssa. \square

²Lause B.2

³Lause C.7

Seuraus 11.7. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä ja olkoon ϕ vektorikentän f määräämä (osittainen) virtaus. Olkoon $x \in U$. Jos $\omega(x) \cap \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$, niin $\omega(x) = \mathcal{O}(x)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 11.8. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Olkoon $x \in U$. Jos $\omega(x)$ on yhtenäinen ja sisältää syklin $\mathcal{O}(y)$, niin $\omega(x) = \mathcal{O}(y)$.*

Todistus. Propositioista 11.4 seuraa, että radalla $\mathcal{O}(y)$ on avoin ympäristö N siten, että ensimmäinen paluuaika ja Poincarén kuvaus on määritelty kaikissa radan $\mathcal{O}(y)$ poikkileikkauksissa, jotka sisältyvät joukkoon N . Jos $\mathcal{O}(y) \subsetneq \omega(x)$, niin on $z \in N \cap (\omega(x) - \mathcal{O}(y))$, koska $\omega(x)$ yhtenäinen ja ϕ -invariantti. Voimme olettaa, että on poikkileikkaus S siten, että $y, z \in S$. Proposition 11.6 nojalla joukossa $\{y, z\} \subset \omega(x) \cap S$ on vain yksi piste, mikä on ristiriita. □

11.3 Poincarén ja Bendixsonin lause

Seurauksen 7.9 nojalla virtauksen kompakti rajajoukko on yhtenäinen. Seuraavaksi todistettava Poincarén ja Bendixsonin lause kuvailee tason systeemien mahdollisten kompaktien rajajoukkojen rakennetta tarkemmin.

Lause 11.9 (Poincarén ja Bendixsonin lause). *Jos tason avoimen joukon C^1 -vektorikentän virtauksen kompakti rajajoukko ei sisällä yhtään tasapainopistettä, niin se on sykli.*

Todistus. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $\phi = \phi^f$ vektorikentän f määräämä virtaus. Olkoon $x \in U$. Olkoon $y \in \omega(x) = \omega_\phi(x)$. Oletetaan, että joukon $\omega(x)$ kaikki pisteet ovat säännöllisiä

Koska $\omega(x)$ on kompakti, niin Proposition 7.8 mukaan $\omega(y) \subset \omega(x)$ on invariantti kompakti joukko, joka sisältää ainakin yhden pisteen z . Olkoon S lokaali poikkileikkaus pisteessä z .

Olkoot $y_k \in S \cap \mathcal{O}^+(y)$ siten, että $y_k \rightarrow z$, kun $k \rightarrow \infty$. Koska $\omega(x)$ on invariantti, pätee $\mathcal{O}^+(y) \cap S \subset \omega(x) \cap S$. Proposition 11.6 nojalla $\omega(x) \cap S = \{z\}$, joten $y_k = z$ kaikilla k . Siis $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(z)$ on sykli, joten Proposition 11.8 nojalla $\omega(x) = \mathcal{O}(y)$ □

Seuraus 11.10. *Olkoon ϕ C^1 -vektorikentän määräämä virtaus avoimessa joukossa U . Olkoon $\mathcal{O}(y)$ sykli, jolle joukon $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}(y)$ rajoitettu komponentti W sisältyy joukkoon U . Jos joukossa W on piste, joka ei ole jaksollinen, niin joukossa W on tasapainopiste tai rajasykli.*

Todistus. Olkoon $x \in W$ piste, joka ei ole jaksollinen. Proposition 7.8(2) nojalla $\omega(x)$ ja $\alpha(x)$ eivät ole tyhjiä joukkoja. Jos joukossa W ei ole rajasykliä eikä tasapainopistettä, niin Poincarén ja Bendixsonin lauseen mukaan $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}(y)$. Mutta tämä on mahdotonta, koska noin käyttäytyvän radan $\mathcal{O}(x)$ leikkaus jossain radan Γ pisteessä olevan poikkileikkauksen kanssa ei voi olla monotoninen. □

Lause 11.11. *Olkoon ϕ C^1 -vektorikentän määräämä virtaus avoimessa joukossa U . Olkoon $y \in U$ siten, että $\mathcal{O}(y)$ on sykli, jolle joukon $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}(y)$ rajoitettu komponentti W sisältyy joukkoon U . Tällöin W sisältää tasapainopisteen.*

Todistus. Oletetaan, että joukossa W ei ole tasapainopistettä. Olkoon $\text{area}(\Gamma')$ joukkoon W sisältyvän syklin Γ' rajaaman joukon pinta-ala. Olkoon

$$A = \inf\{\text{area}(\Gamma') : \Gamma' \subset W \text{ on sykli}\}.$$

Olkoon $(\mathcal{O}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ pinta-alan minimoiva jono syklejä ja olkoon $x_k \in \Gamma_k$. Kompaktiuden nojalla voimme olettaa, että jono x_k suppenee kohti pistettä $z \in U \cup \mathcal{O}(y)$. Jos $\mathcal{O}(z)$ ei olisi sykli, niin Poincarén ja Bendixsonin lauseen mukaan $\omega(z)$ olisi rajasykli. Harjoitustehtävän 10.4 nojalla $\omega(x_k) = \omega(z)$ suurilla k , mutta tämä on mahdotonta, koska tällöin $\omega(x_k) = \emptyset$. Siis $\mathcal{O}(z)$ on sykli.

Jatkuva riippuvuus alkuarvoista antaa yhtälön $\text{area}(\mathcal{O}(z)) = A$. Oletuksen mukaan z ei ole tasapainopiste, joten $A > 0$. Radan $\mathcal{O}(z)$ sisäpuolella ei ole jaksollisia ratoja, koska ne rajaisivat pinta-alan, joka on pienempi kuin A . Tämä on ristiriita Seurauksen 11.10 kanssa. \square

Lause 11.12. *Olkoon ϕ C^1 -vektorikentän määräämä virtaus avoimessa joukossa U . Olkoon $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on vakio radoilla. Jos ei ole avointa epätyhjää joukkoa $V \subset U$, jossa L on vakio, niin vektorikentällä ei ole rajasykliä.*

Todistus. Harjoitustehtävä 11.3. \square

11.4 Yleistetty Poincarén ja Bendixsonin lause

Seuraavassa esimerkissä differentiaaliyhtälön rajajoukko on kompakti mutta se sisältää sekä kiintopisteen että säännöllisiä pisteitä. Sen sijaan siihen ei sisälly yhtään sykliä.

Esimerkki 11.13. Funktio $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

määrää Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3, \end{cases}$$

jonka radat sisältyvät funktion V tasa-arvojoukkoihin. Pisteet $(\pm 1, 0)$ ovat vakaita mutta eivät asymptoottisesti vakaita tasapainopisteitä, joissa Liapunovin funktiolla $V + \frac{1}{4}$ on lokaali aito minimi. Tasa-arvokäyrä $V^{-1}(0)$ koostuu hyperbolisesta kiintopisteestä 0 ja kahdesta homokliinisestä radasta, jotka yhdessä muodostavat kahdeksikon.

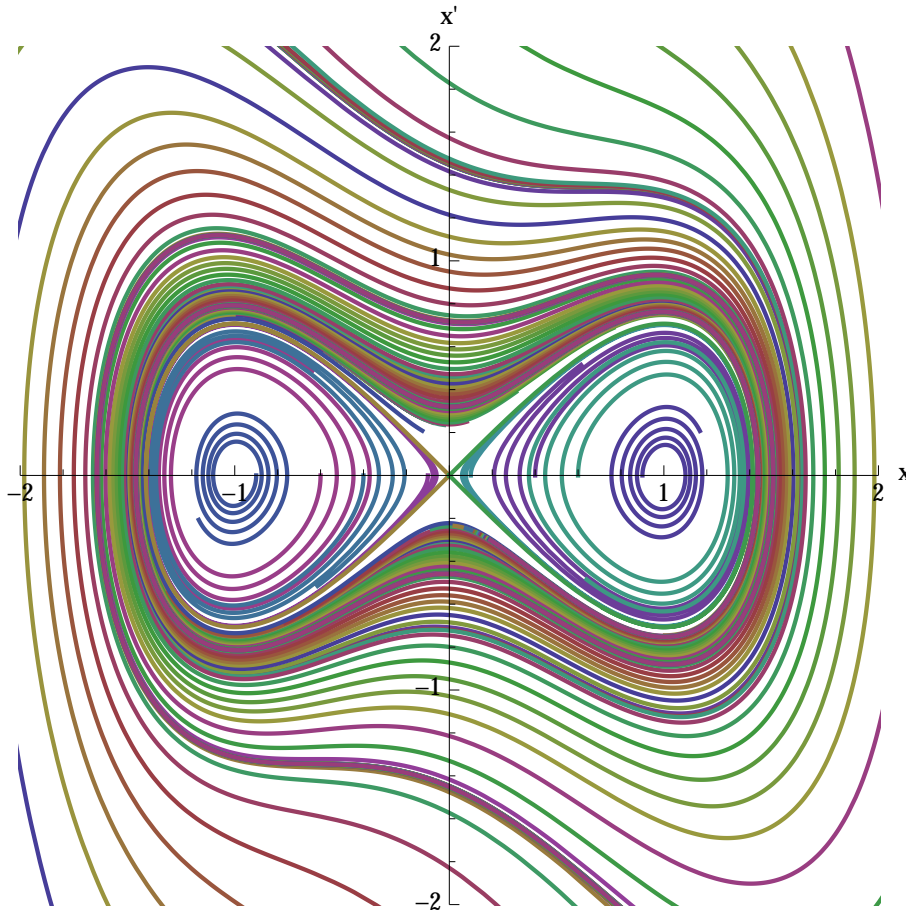
Olkoon $\mu \in \mathbb{R}$ ja häiritään Hamiltonin systeemin vektorikenttää parametrilla μ riippuvalla funktiolla ja tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - 4\mu y V(x, y). \end{cases}$$

Funktiota V voidaan käyttää differentiaaliyhtälön tutkimiseen kuten Liapunovin funktiota. Sen rataderivaatta on

$$\dot{V}(x, y) = -4\mu y^2 V(x, y).$$

Kun $\mu > 0$, $V(x, y) > 0$ ja $y \neq 0$, rataderivaatta on negatiivinen, joten nähdään, että kahdeksikon $V^{-1}(0)$ ulkopuolelta lähtevät radat kasautuvat kohti koko joukkoa $V^{-1}(0)$, kun $t \rightarrow \infty$. Vastaavasti joukon $V^{-1}(0)$ kummankin silmukan sisäpuolelta lähtevät radat kasautuvat kohti sitä puoliskoa, jonka sisällä ne ovat.



Kuva 11.1: Esimerkin 11.13 ratoja, kun $\mu = 0.1$.

Lause 11.14 (Yleistetty Poincarén ja Bendixsonin lause). *Olkoon Ω tason avoimen joukon C^1 -vektorikentän virtauksen kompakti rajajoukko ja olkoon E sen tasapainopisteiden joukko. Jos $\Omega \cap E \neq \emptyset$ on äärellinen, niin $\Omega - E$ on yhdiste äärellisen monesta radasta, joiden rajajoukot ovat kiintopisteitä.*

Todistus. Jos $\Omega = \omega(x)$ on äärellinen, niin se koostuu Seurauksen 7.9 nojalla yhdestä kiintopisteestä. Oletetaan sitten, että rajajoukko $\omega(x)$ sisältää säännöllisen pisteen y . Väite seuraa, kun osoitamme, että $\omega(y)$ on kiintopiste, vastaavaan tapaan voidaan osoittaa, että $\alpha(y)$ on kiintopiste.

Oletetaan, että $z \in \omega(y)$ on säännöllinen piste. Olkoon S poikkileikkaus pisteessä z . Tällöin on rajatta kasvava jono $t_i \nearrow \infty$ siten, että $\phi_{t_i}(y) \in S$ ja $\phi_{t_i}(y) \rightarrow z$, kun $i \rightarrow \infty$. Seurauksen 11.6 nojalla joukko $\{\phi_{t_i}(y) : i \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ koostuu yhdestä pisteestä, joten tämän pisteen on oltava z . Siis $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(z)$ on jaksollinen, joten Proposition 11.8 nojalla

$\omega(x) = \mathcal{O}(y)$. Tämä on mahdotonta, koska oletimme, että rajajoukossa on ainakin yksi kiintopiste. \square

Harjoitustehtäviä

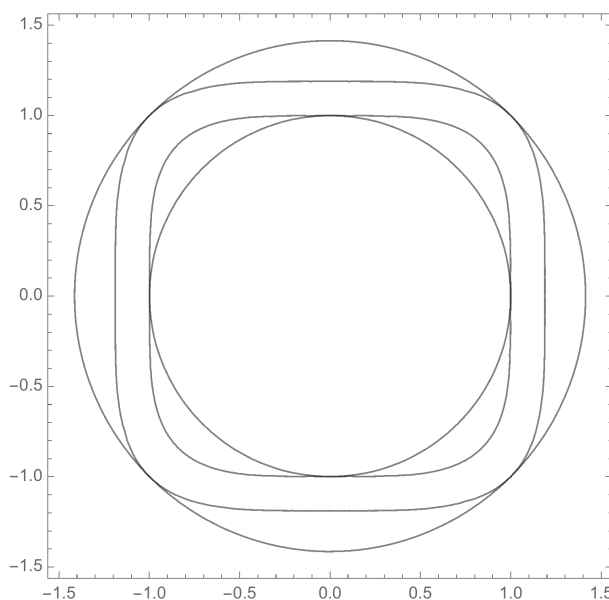
11.1. Todista Seuraus 11.7.

11.2. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_1^3 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}$$

Osoita, että differentiaaliyhtälöllä $\dot{x} = f(x)$ on rajasykli renkaassa⁴

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\|^2 \leq 2\}.$$



Kuva 11.2: Funktioiden $x \mapsto \|x\|^2$ ja $x \mapsto x_1^4 + x_2^4$ tasa-arvokäyriä.

11.3. Todista Lause 11.12.

11.4. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Jos pisteen x rata on sykli joukossa U ja radan $\mathcal{O}(x)$ rajaama avoin tasojoukko sisältyy joukkoon U , niin funktio $\nabla \cdot f$ on vakiofunktio 0 tai se saa positiivisia ja negatiivisia arvoja.⁵

11.5. Olkoot $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia funktioita ja olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ p(x_1)x_2 + q(x_1) \end{pmatrix}.$$

Osoita, että differentiaaliyhtälöllä $\dot{x} = f(x)$ ei ole syklejä.

⁴Tarkastele vektorikenttää f renkaan A reunoilla esimerkiksi sisätulon avulla. Tällöin kuvasta 11.2 voi olla hyötyä ja siitä saatavaa tietoa voi käyttää perustelematta.

⁵Käytä Greenin lausetta, Seuraus B.4.

Luku 12

Korkeammista ulottuvuuksista

Kurssin viimeisessä luvussa tarkastelemme pääasiassa vähintään 3-ulotteisen avaruuden avoimissa joukoissa määriteltyjä vektorikenttiä. Tutustumme Lorenzin differentiaaliyhtälöön, joka on klassinen esimerkki monimutkaisesti käyttäytyvästä systeemistä. Havaitsemme, että Lorenzin yhtälön radoilla on ominaisuuksia, joita ei havaita tason avoimissa osajoukoissa määriteltyissä differentiaaliyhtälöissä.

12.1 Attraktori

Differentiaaliyhtälön ratkaisuja tarkastellessa on usein hyödyllistä havaita puoleensavetäviä osajoukkoja.

Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon ϕ virtaus avaruudessa X . Joukko $\Lambda \subset X$ on virtauksen ϕ **attraktori**, jos

- (1) Λ on kompakti ja ϕ -invariantti.
- (2) Joukolla Λ on avoin positiivisesti ϕ -invariantti ympäristö U siten, että

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U).$$

- (3) Virtauksen ϕ rajoittumalla joukkoon Λ on tiheä rata.
- (4) joukolla Λ ei ole aitoa osajoukkoa, jolla on ominaisuudet (1)–(3).

Esimerkki 12.1. (1) Asymptoottisesti vakaa tasapainopiste on attraktori. Jos tasapainopiste on vakaa mutta ei asymptoottisesti vakaa, niin se ei ole attraktori.

(2) Harjoitustehtävän 10.4 avulla voi osoittaa, että C^1 -vektorikentän ω -rajasykli on attraktori.

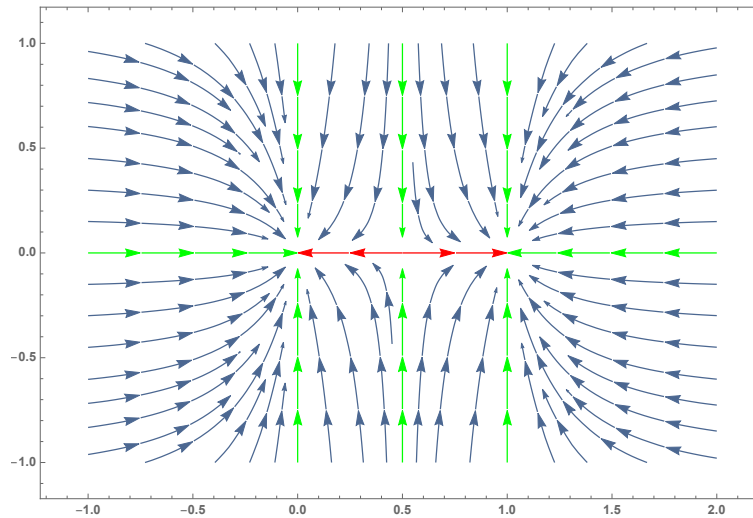
(3) Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä

$$f(x) = -2(x_1 - 1)x_1(2x_1 - 1), -2x_2.$$

On helppo nähdä, että

$$\bigcap_{t>0} \phi_t(\mathbb{R}^2) = [-1, 1] \times \{0\}.$$

Joukko $[-1, 1] \times \{0\}$ koostuu viidestä radasta $\mathcal{O}((-1, 0)) = \{(-1, 0)\}$, $\mathcal{O}((0, 0)) = \{(0, 0)\}$, $\mathcal{O}((1, 0)) = \{(1, 0)\}$, $\mathcal{O}((-\frac{1}{2}, 0)) =]-1, 0[\times \{0\}$ ja $\mathcal{O}((\frac{1}{2}, 0)) =]0, 1[\times \{0\}$. Mikään näistä radoista ei ole tiheä joukossa $[-1, 1] \times \{0\}$, joten $[-1, 1] \times \{0\}$ ei ole attraktori.



Kuva 12.1: Esimerkin 12.1(3) differentiaaliyhtälön ratoja.

Tason tapauksessa huomasimme Luvussa 8.4 ja Harjoitustehtävässä 7.2, että tasapainopiste ja sykli voivat olla joillekin pisteille puoleensavetäviä ja toisille hylkiviä. Tällainen joukko ei ole attraktori mutta sen havaitseminen kertoo paljon ratkaisujen käyttäytymisestä. Vakaa ja epävakaa monisto voidaan määritellä yleisemminkin kuin kiintopisteelle.

Olkoon ϕ virtaus avaruudessa \mathbb{R}^n . Jaksollisen radan Γ **vakaa monisto** on

$$W^s(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) = \Gamma\}$$

ja sen **epävakaa monisto** on

$$W^u(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) = \Gamma\}.$$

Esimerkki 12.2. Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Koska $\|f\|$ kasvaa turhan nopeasti, kun $x_1^2 + x_2^2$ kasvaa, f määrää vain osittaisen virtauksen. Sen sijaan kenttä

$$F(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|^2}$$

määrää virtauksen Proposition 7.13 nojalla. Kenttää f on toisaalta helpompi tarkastella.

Tason $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ yksikköympyrä

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

on invariantti differentiaaliyhtälön $\dot{x} = F(x)$ määräämässä osittaisessa virtauksessa. Itse asiassa Γ on minkä tahansa pisteen $p \in \Gamma$ jaksollinen rata. Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ sylinterikoordinaattimuodosta

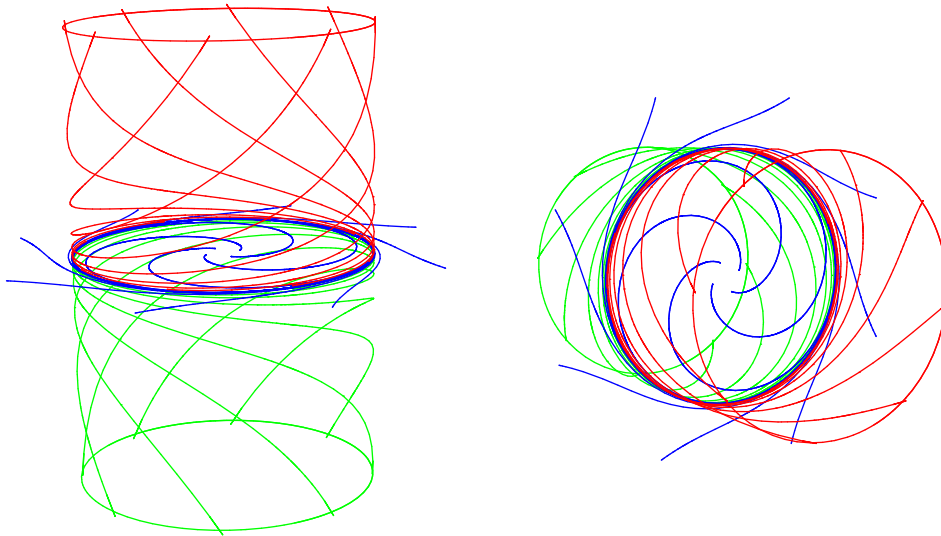
$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

nähdään, että

$$W^s(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0, x \neq 0\}$$

ja

$$W^u(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$



Kuva 12.2: Kaksi näkökulmaa x_1x_2 -tason ympyrän vakaasta ja epävakaasta monistosta. Siniset radat ovat vakaassa monistossa, punaiset ja vihreät epävakaassa.

Vaihtamalla vektorikentän viimeisen komponentin suunnan vastakkaiseksi saamme differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

jossa ympyrän Γ vakaa monisto on $\mathbb{R}^3 - (\{0\} \times \mathbb{R})$.

12.2 Lorenzin differentiaaliyhtälö

Luvun 11 tulokset antavat melko tarkan kuvan tason differentiaaliyhtälöiden käyttäytymisestä. Erityisesti ratkaisujen asymptoottinen käyttäytyminen on tässä tapauksessa kohtuullisen kesyä. Asymptoottista käyttäytymistä kuvaavan Poincarén ja Bendixsonin lauseen todistus käyttää oleellisella tavalla Jordanin käyrälausetta, jonka mukaan topologinen ympyrä jakaa tason kahteen erilliseen komponenttiin.

Korkeammassa ulottuvuudessa havaitaan monia ilmiöitä, joita tasossa ei voi olla. Tarkastelemme esimerkkinä Lorenzin differentiaaliyhtälöä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad (12.1)$$

joka riippuu kolmesta positiivisesta parametrusta σ , b ja r . Yhtälö kehitettiin alunperin hyvin vahvasti yksinkertaistetuksi ilmastomalliksi 60-luvulla. Joillain parametreilla yhtälön ratkaisujen käyttäytyminen on melko yksinkertaista mutta toisilla taas monimutkaista ja mielenkiintoisempaa.

Lorenzin differentiaaliyhtälön vektorikentällä f on tasapainopiste origossa. Kun $0 < r < 1$, niin 0 on itse asiassa ainoa tasapainopiste. Vektorikentän f linearisaatio tasapainopisteessä 0 on

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Harjoituksissa osoitetaan, että 0 on nielu, kun $0 < r < 1$.

Propositio 12.3. *Olkoon $0 < r < 1$. Tällöin $\omega(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^3$.*

Todistus. Harjoitustehtävässä 9.13 osoitettiin, että funktio $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2 + \sigma(x_2^2 + x_3^2)$$

on aito Liapunovin funktio origossa. Väite seuraa Lauseen 9.12 todistuksesta. \square

Kun $r > 1$, origo muuttuu satulapisteeksi, jolla on yksi positiivinen ominaisarvo. Parametreilla $r > 1$ Lorenzin yhtälöllä on myös tasapainopisteet

$$P_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

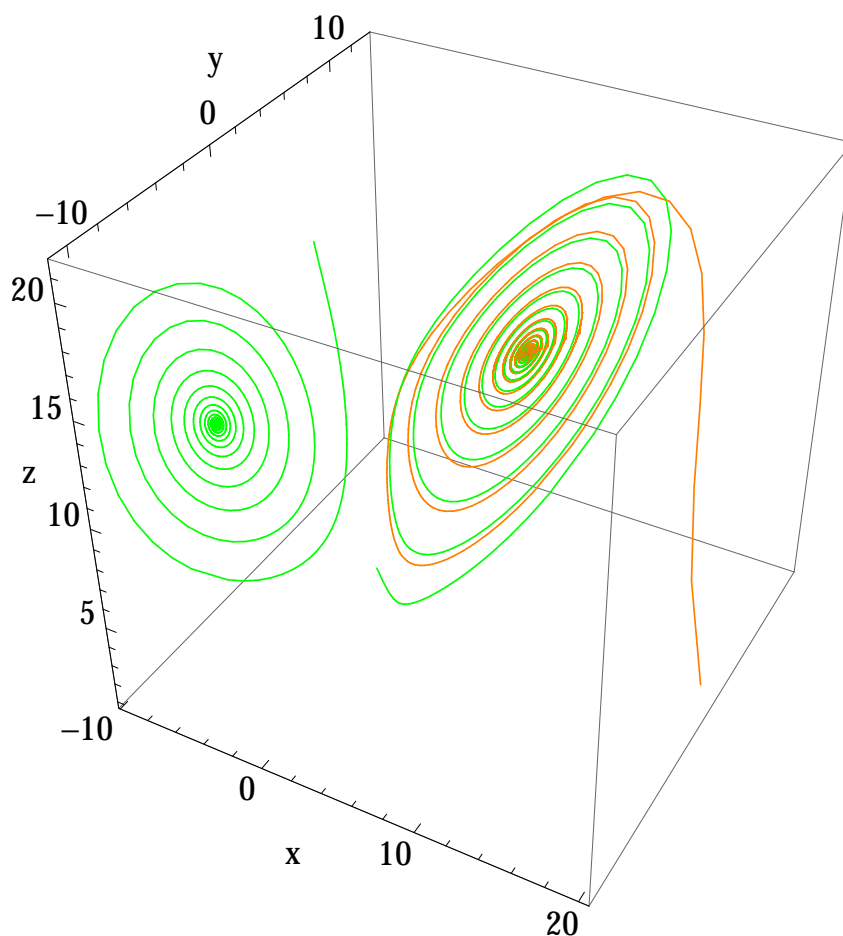
Kun $r \rightarrow 1+$, niin $P_{\pm} \rightarrow 0$, joten ajatellaan, että tasapainopisteet P_{\pm} syntyvät parametrimilla $r = 1$ ja erkanevat origosta, kun parametri r kasvaa suuremmaksi kuin 1 .

Tasapainopisteet P_{\pm} ovat nieluja parametrivälillä

$$1 < r < r_H(\sigma, b) = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}.$$

Näillä parametreilla systeemin käyttäytyminen on melko yksinkertaista. Klassisilla parametreilla $\sigma = 10$ ja $b = \frac{8}{3}$ saadaan

$$r_H(10, \frac{8}{3}) = \frac{470}{19} \approx 24.7368.$$



Kuva 12.3: Lorenzin differentiaaliyhtälön ratkaisuja kolmella eri alkuarvolla parametreilla $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ja $r = 14$.

Jo ennen tätä rajaa systeemissä tapahtuu mielenkiintoisia muutoksia, joita on selostettu Esimerkiksi Lorenzin differentiaaliyhtälöä laajasti käsittelevässä lähteessä [Spa].

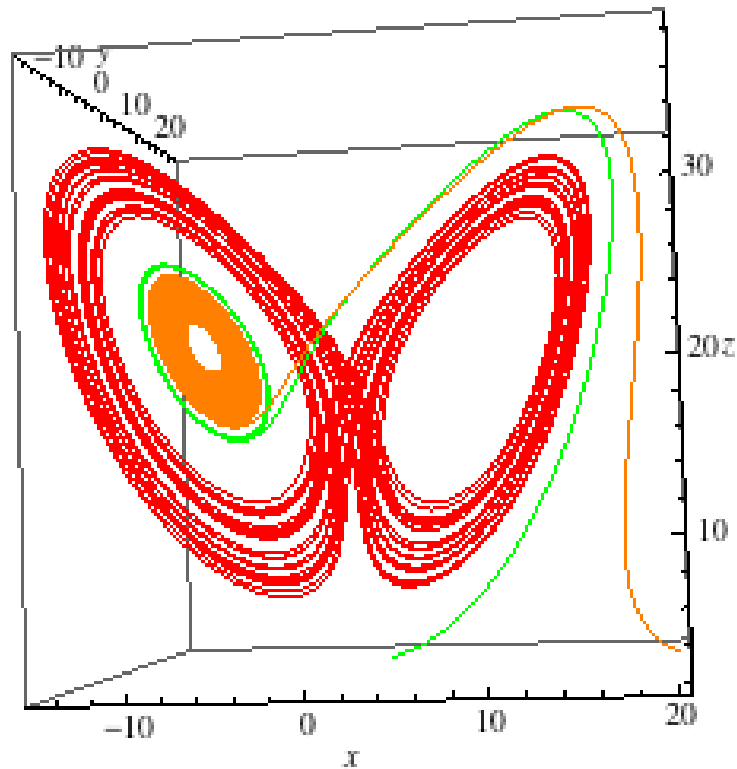
Parametrilla $r = 1$ tapahtuva ratkaisujen käyttäytymisen muutos on esimerkki differentiaaliyhtälöiden parametrisoidussa perheessä tapahtuvasta **bifurkaatiosta**. Bifurkaatioista voi lukea lisää esimerkiksi lähteen [HSD] Luvuissa 8.5 ja 12.4 ja lähteen [Per] Luvussa 4.

Dynaamisten systeemien yhteydessä puhutaan usein hieman epämääräisesti **kaaoksesta** ilman että termin sisältöä kiinnitetään kovin tarkasti. Yksi kaaokselta yleensä edellytettävistä piirteistä on **perhosefekti** eli herkkä riippuvuus alkuarvoista.

Metrisen avaruuden X virtaus ϕ **riippuu herkästi alkuarvoista**, jos systeemillä on **herkkyykvio** $\Delta > 0$ siten, että jokaisella $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ on $y \in B(x, \varepsilon)$ ja $T > 0$, joille $d(\phi_T(x), \phi_T(y)) \geq \Delta$.

Herkkä riippuvuus alkuarvosta tarkoittaa, että pieni epätarkkuus lähtötilanteessa voi muuttaa tulevaisuuden kokonaan.

Voidaan osoittaa, että parametreilla $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ja $r = 28$ ja monilla muillakin parametreilla Lorenzin systeemi riippuu herkästi alkuarvoista, mutta emme paneudu tähän



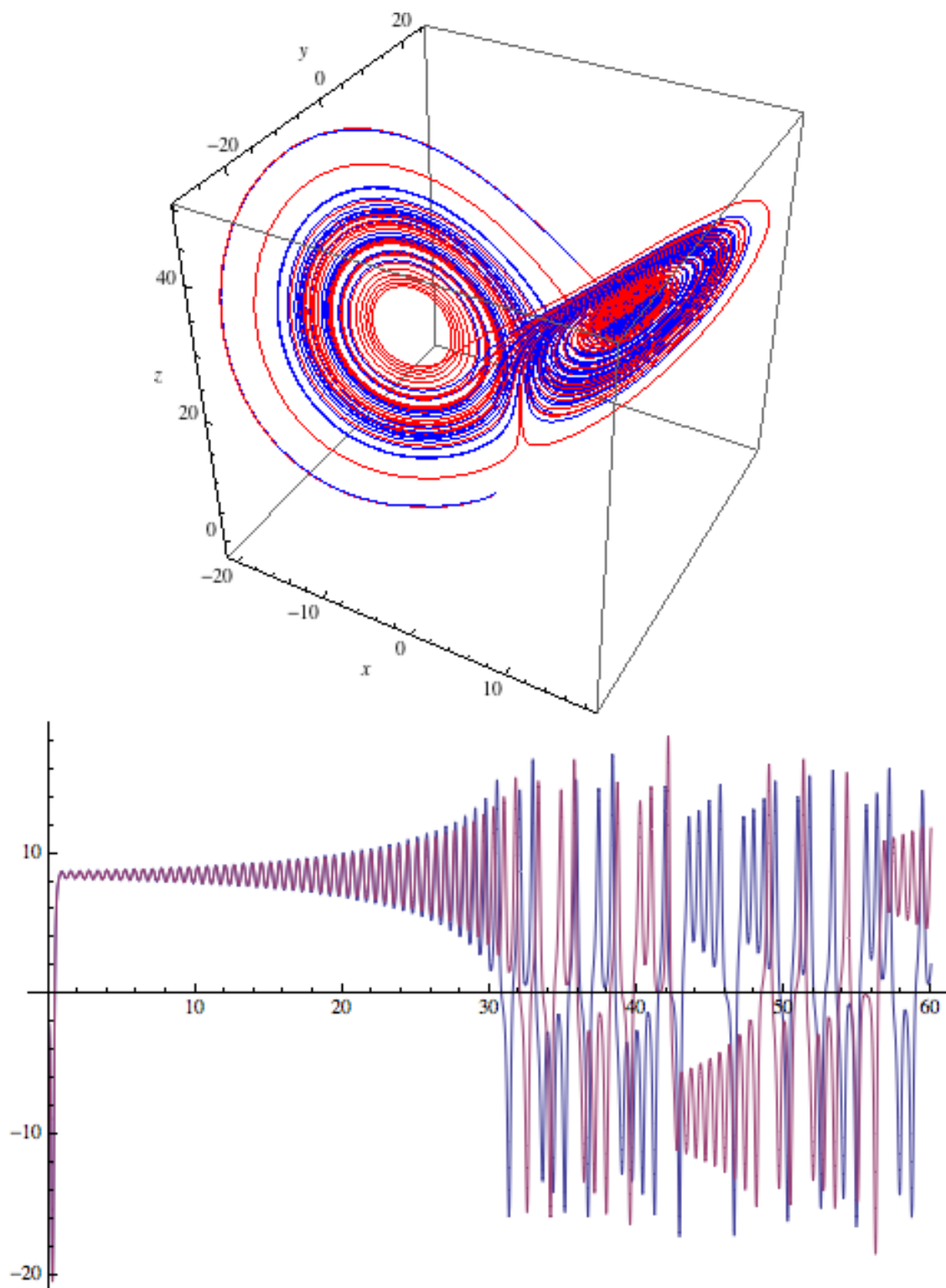
Kuva 12.4: Lorenzin differentiaaliyhtälön ratkaisuja kolmella eri alkuarvolla parametreilla $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ja $r = 23.295$.

asiaan tällä kurssilla. Numeerisesti voi havaita, että lähekkäisten pisteiden radat poikkeavat dramaattisesti toisistaan, kun aika etenee riittävän pitkään. Kuitenkin eri pisteillä vaikuttaisi olevan sama rajajoukko.

Lorenzin yhtälö lienee ensimmäinen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisujen huomattiin käyttäytyvät kaoottisesti sopivilla parametreilla. Sitten Lorenzin yhtälö ja sen eri variaatiot ovat eläneet omaa elämäänsä mahdollisista sovelluksista riippumattomina esimerkkeinä systeemeistä joissa havaitaan kaoottista käyttäytymistä. Klassisin valinta kaoottisen käytöksen esittämiseen on $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ja $r = 28$.

Lorenzin yhtälö parametreilla $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ja $r = 28$ on esimerkki systeemistä, jonka rajajoukot ovat eksoottisempia kuin tasossa tavattavat. Sanotaan, että systeemillä on **outo attraktori**. Lorenzin systeemin attraktoria sanotaan oudoksi muun muassa sen vuoksi, että sillä on **fraktaalinen** rakenne, joka ilmenee muun muassa siinä, että rajajoukon Hausdorffin dimensio (≈ 2.06) ei ole kokonaisluku ja attraktorin leikkaus missä tahansa sen pisteessä olevan poikkileikkauksen kanssa muistuttaa rakenteeltaan Cantorin joukkoa. Tällä parametrilla attraktorin kuvan kuuluisa perhoskuviokuva on hyvin selkeä.

Lorenzin systeemin perhosefektiä käsitellään elokuvan Chaos [LGA] luvuissa 7-9. Lorenzin yhtälöä käsitellään myös lähteissä [HSD] Luvussa 14 ja [Per] Luvussa 4.5.



Kuva 12.5: Lorenzin differentiaaliyhtälön ratkaisuja parametreilla $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ja $r = 28$. Alempi kuva esittää ratkaisujen x -koordinaatteja.

Harjoitustehtäviä

12.1. Osoita, että C^1 -vektorikentän ω -rajasykli on attraktori.

12.2. Olkoon $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \times B \rightarrow \mathbb{R}^4$ vektorikenttä

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ \frac{x_3}{2} - x_4 - \frac{x_3^3 + x_4^2 x_3}{2} \\ x_3 + \frac{x_4}{2} - \frac{x_4^3 + x_3^2 x_4}{2} \end{pmatrix}.$$

Miten vektorikentän f määräämä virtaus käyttäytyy?¹

12.3. Tarkastele differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - \|x\|^2) \\ x_1 + x_2(1 - \|x\|^2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ratkaisujen käyttäytymistä. Mitä tapahtuu ympyrän $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ lähellä?

Pisteen a **vahva vakaa monisto** virtauksessa $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ on

$$W_\phi^{\text{ss}}(a) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(x), \phi_t(a)) = 0\}.$$

12.4. Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (1, x_2, -x_3)$. Määritä pisteen x_0 vahva vakaa monisto vektorikentän f määräämässä virtauksessa kaikille $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

12.5. Ratkaise Lorenzin differentiaaliyhtälö, kun $\sigma = 0$.

12.6. Osoita, että Lorenzin yhtälön vektorikentän linearisoinnin ominaisarvot ovat negatiivisia, kun $0 < r < 1$. Osoita, että linearisaatiolla on positiivinen ominaisarvo, kun $r > 1$.

12.7. Olkoon $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x) = rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3 - 2r)^2.$$

Olkoon

$$\mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \dot{L}(x) \geq 0\}.$$

Olkoon $M = \max_{x \in \mathcal{E}_0} L(x)$ ja olkoon

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \dot{L}(x) < M + 1\}.$$

Osoita, että $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1$. Osoita, että $\dot{L}(x) < -\delta$ jollain $\delta > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^3 - \mathcal{E}_1$. Osoita, että jokaisella $x \in \mathbb{R}^3$ on $t(x) > 0$ siten, että $\phi_t(x) \in \mathcal{E}_1$, kun $t > t_0$. Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^3$ maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton.

¹Katso Esimerkki 6.7

Harjoitustöitä

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssin 2 suoritukseen kuuluu lyhyt kirjallisuuden avulla tehtävä harjoitustyö. Kirjoita selkeästi jäsenmely esitys yhdestä tehtävästä. Työssä on suotavaa käyttää lähdemateriaalia. Joitain lähteitä on mainittu tehtävänannossa, muitakin voi etsiä kirjastosta. Autan tarvittaessa esimerkiksi lähteiden tulkitsemisessä.

Kurssin suoritus arvostellaan, kun harjoitustyö on palautettu.

12.8 (Vakaan moniston lause). Todista Vakaan ja epävakaan moniston lauseesta vakaan moniston osa. Voit käsitellä tulosta joko vain tason systeemeille kuten [HSD] tai yleisemmin kuten [Per]. Sitä, että monisto sivuaa linearisoinnin vakaata aliavaruutta ei tarvitse osoittaa yleisessä tapauksessa.

Lähteet: Luennot, harjoitukset, [HSD] luku 8.3, [Per] luku 3.5., [Tes] luku 9.2, [Chi] luku 4.1, [CL] luku 13.4. Lisäksi muutamia teknisiä seikkoja kuten Perkon todistuksen integraaliyhtälöön (7) päätyminen selitetään Schechterin kurssimateriaalissa [Sch] kohdassa Proof of the stable manifold theorem.

12.9 (Liénardin lause ja van der Polin yhtälö). Sopivilla funktioita H ja g koskevilla ehdoilla osoitetaan, että differentiaaliyhtälöllä

$$\begin{cases} \dot{u} = v - H(u) \\ \dot{v} = -g(u) \end{cases}$$

on täsmälleen yksi (puoleensavetävä) rajasykli. Muotoile ja todista tämä tulos ja sovelta sitä van der Polin yhtälöön

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1) + \dot{x} + x = 0$$

tai rajoitu todistuksessa vain van der Polin yhtälön tarkasteluun.

Lähteet: Luennot, harjoitukset, [Per] luku 3.8: [HSD] luvut 12.2 ja 12..3.

12.10 (Vinogradin esimerkki). Vinograd [Vin] osoitti, että differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + y^5}{\|x\|^2(1 + \|x\|^4)} \\ \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{\|x\|^2(1 + \|x\|^4)} \end{pmatrix}$$

tasapainopiste 0 ei ole vakaa mutta origolla on avoin ympäristö U , jossa kaikille $x \in U$ pätee $\omega(x) = 0$. Osoita, että näin todella on esimerkiksi lähteen [Hah, §40] avulla. Havainnollista yhtälön ratojen käyttäytymistä kuvilla.

Lähteet [CL] ja [Per] ovat saatavana Mattilanniemen kirjastosta.

Lähteet [Chi] ja [HSD] ovat saatavana kirjaston kautta e-kirjana.

Lähde [Tes] on saatavana esiversiona kirjoittajan kotisivulta
<http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/index.html>.

Lähde [Hah] on saatavana archive.org internetkirjastosta
<https://archive.org/details/stabilityofmotio0000hahn>.

Liitteet

Liite A

Lineaarialgebraa

Tässä liitteessä palautamme mieleen lineaarialgebran kurseilla käsitellyä ominaisarvoihin ja diagonalisoitumiseen liittyvää teoriaa. Laajennamme käsittelyä kompleksisiin ominaisarvoihin ja kompleksisiin vektoriavaruuksiin.

A.1 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Jos A on reaalinen $n \times n$ -matriisi, niin vektori $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ on matriisin A **ominaisvektori ominaisarvolla** $\lambda \in \mathbb{R}$, jos $Av = \lambda v$.

Matriisin A reaalista ominaisarvoa λ vastaavat ominaisvektorit muodostavat nollavektorin kanssa **ominaisavaruuden**

$$E_\lambda = E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda I).$$

Ominaisavaruuden E_λ dimensio on ominaisarvon λ **geometrinen kertaluku**.

Matriisin A **karakteristinen polynomi**

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Ominaisvektori on siis nollasta poikkeava vektori matriisia $A - \lambda I$ standardikannassa vastaavan lineaarikuvauksen ytimessä. Tästä nähdään, että matriisin A reaaliset ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin reaaliset juuret. Kurseilla LAG1 ja LAG2 on tapana käsitellä ainoastaan reaalisia ominaisarvoja, mutta tällä kurssilla on luontevaa käsitellä myös karakteristisen polynomin kompleksisia juuria.

Jos A on reaalinen $n \times n$ -matriisi, ja $\lambda \in \mathbb{C}$ on karakteristisen polynomin χ_A juuri, niin λ on matriisin A **ominaisarvo**. Jos $\lambda \in \mathbb{R}$, niin se on **reaalinen ominaisarvo**, muuten se on **kompleksinen ominaisarvo**.

Matriisin A ominaisarvot muodostavat sen **spektrin** $\text{Sp}(A)$

Ominaisarvon kertaluku karakteristisen polynomin juurena on sen **algebraallinen kertaluku**.

Jos λ on reaalisen matriisin A ominaisarvo, niin myös sen kompleksikonjugaatti $\bar{\lambda}$ on ominaisarvo. Tämä on helppo nähdä, koska karakteristisen polynomin kertoimet ovat reaalisia.

Karakteristisen polynomin aste on n , joten Algebran peruslauseen¹ mukaan karakteristisella polynomilla on kertaluku huomioiden n juurta.

Esimerkki A.1. (1) Matriisin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ karakteristinen polynomi on

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

joten sillä on kompleksiset ominaisarvot i ja $-i$.

(2) Matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on yksi algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo 1. Ominaisarvon 1 geometrinen kertaluku on 1: Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä $Av = v$ kutistuu yhtälöksi $v_2 = 0$, joka määrää 1-ulotteisen aliavaruuden.

Lemma A.2. *Matriisin determinantti on sen ominaisarvojen tulo.*

Todistus. Jos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat matriisin $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ karakteristisen polynomin juuret siten, että k -kertainen juuri esiintyy luettelossa k kertaa, $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$. Erityisesti polynomin $\chi_A(\lambda)$ vakiotermin on $\prod_{i=1}^n \lambda_i$. Toisaalta matriisin $B_\lambda = A - \lambda I_n = (B_{ij})_{i,j=1}^n$ determinantin

$$\chi_A(\lambda) = \det B_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1)1} B_{\sigma(2)2} \cdots B_{\sigma(n)n}$$

termin $\varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1)1} B_{\sigma(2)2} \cdots B_{\sigma(n)n}$, jossa esiintyy kertoimia B_{ii} , muuttujan λ suhteen vakiotermin on $\varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n}$. Siis polynomin $\chi_A(\lambda)$ vakiotermin on

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det A. \quad \square$$

Esimerkki A.3. Jos A on 2×2 -matriisi, niin

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A.$$

A.2 Konjugointi ja diagonalisoituvuus

Matriisi A on **diagonalisoituva**, jos se on jonkin diagonaalimatriisin konjugaatti.

Jos $n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva, niin vektoriavaruudella \mathbb{R}^n on kanta, joka koostuu matriisin A ominaisvektoreista. Tässä tapauksessa ominaisavaruuksien dimensoiden summa on n . Lineaarialgebran kursseilla osoitetuista tuloksista saadaan suoraan:

Lemma A.4. *$n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva, jos ja vain jos sen ominaisarvojen geometrinen kertalukujen summa on n .* □

¹todistetaan esimerkiksi kompleksianalyysin kursseilla

Esimerkki A.5. Lineaarialgebran tulosten nojalla osoitetaan, että 2×2 -matriisi B on diagonalisoituvaa, jos sillä on kaksi eri (reaalista) ominaisarvoa. Toisaalta 2×2 -matriisi voi olla diagonalisoituvaa vaikka sillä olisi vain yksi ominaisarvo ($\lambda = \mu$ Esimerkissä 2.1) ja esimerkiksi matriisilla $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ei selvästi ole yhtään ominaisvektoria eikä siis yhtään reaalista ominaisarvoa, koska sitä standardikannassa vastaava lineaarikuvaus on kierto myötäpäivään kulman $\pi/2$ verran.

Lause A.6. Olkoot A ja B reaalisia $n \times n$ -matriiseja, joille pätee $A = CBC^{-1}$ jollain kääntyvällä reaalisella $n \times n$ -matriisilla C . Tällöin

- (1) matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot.
- (2) matriisia C vastaava lineaarikuvaus kuvaa matriisin B ominaisavaruudet bijektiivisesti matriisin A ominaisavaruuksiksi.
- (3) $\text{tr } A = \text{tr } B$.
- (4) $\det A = \det B$. □

A.3 Kompleksista lineaarialgebraa

Lineaarisen algebran ja geometrian kursseilla käsitellään yleensä ainoastaan reaalisia vektoriavaruuksia ja niiden lineaarikuvauksia. Lineaarialgebran teoria voidaan kuitenkin muotoilla yleisemmin korvaamalla aksioomissa esiintyvä reaalilukujen kunta \mathbb{R} millä tahansa kunnalla, esimerkiksi rationaaliluvuilla tai kompleksiluvuilla. Kompleksinen lineaarialgebra auttaa meitä ymmärtämään paremmin esimerkiksi neliömatriisien jakautumista konjugaattiluokkiin.

Kompleksisen vektoriavaruuden aksioomat ovat samat kuin reaaliosassa tapauksessa, mutta kaikki ominaisuudet, joissa reaaliosassa esiintyy \mathbb{R} vaaditaan kompleksiluvuille.

Olkkoon $V \neq \emptyset$ joukko, jolla on laskutoimitus $+$ ja vakiolla kertominen $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, jotka toteuttavat ehdot

- (1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in V$
- (2) $(x + y) + v = x + (y + v)$ kaikilla $x, y, v \in V$
- (3) on $0 \in V$, jolle $0 + x = x$ kaikilla $x \in V$ ja
- (4) jokaisella $x \in V$ on $-x \in V$, jolle $x + (-x) = 0$.
- (5) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ kaikille $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $v, w \in V$,
- (6) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $v \in V$,
- (7) $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $v \in V$ ja
- (8) $1v = v$ kaikille $v \in V$,

niin V varustettuna tällä rakenteella on \mathbb{C} -vektoriavaruus.^a

^aMuistamme algebrasta, että $(V, +)$ on kommutatiivinen ryhmä ehtojen (1)–(4) nojalla.

Yleisten vektoriavaruuksien teoriaan voi tutustua esimerkiksi lähteen [Gre] ja monien algebran kirjojen kuten [Dur] avulla.

Esimerkki A.7. \mathbb{C}^n on kompleksinen vektoriavaruus, jonka (kompleksinen) dimensio on n : Standardikanta, joka koostuu vektoreista e_1, \dots, e_n , missä e_i on vektori, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on $1 \in \mathbb{C}$ paikalla i , on selvästi lineaarisesti riippumaton.

Kompleksisessa vektoriavaruudessa \mathbb{C}^n määritellään vektorien reaali- ja imaginaariosa ja kompleksikonjugaatti komponenteittain kuvauksina $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Jos $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, niin

$$\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n),$$

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$$

ja

$$\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Harjoitustehtäviä

A.1. Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja olkoon V sitä vastaava ominaisvektori. Osoita, että e^λ on matriisin $\exp A$ ominaisarvo ja että V on sitä vastaava ominaisvektori.

Liite B

Differentiaalilaskentaa

B.1 Napakoordinaatit

Joissain tapauksissa differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytyminen on helpompi hahmottaa napakoordinaattien avulla.

Napakoordinaattikuvaus on $N: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$,

$$N(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Derivoimalla komponenttifunktiot saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

ja derivoimalla yhtälöiden

$$\begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

vasemmat ja oikeat puolet saadaan käyttökelpoiset yhtälöt

$$\begin{cases} r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ r^2\dot{\theta} = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1. \end{cases} \tag{B.2}$$

Näiden yhtälöiden avulla voidaan usein muodostaa alkuperäisen yhtälöparin kanssa yhtäpitävä yhtälö napakoordinaateissa. Joskus tämä uusi yhtälö on helpompi ratkaista kuin alkuperäinen.

B.2 Tärkeitä lauseita

Lause B.1 (Käänteiskuvauslause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoon $x_0 \in U$ siten, että $Df(x_0)$ on kääntyvä. Tällöin pisteellä x_0 on avoin ympäristö $V \subset U$ siten, että kuvaus $f|_V: V \rightarrow f(V)$ on diffeomorfismi.*

Todistus. Katso [Apo2, Thm. 13.7]. □

Lause B.2 (Implisiittikuvauslause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoon $(x_0, t_0) \in U$ siten, että $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}^k$ ja matriisi $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} f_j(x_0, t_0)\right)_{i,j=1}^n$ on kääntyvä. Tällöin on pisteen t_0 avoin ympäristö $V \subset \mathbb{R}^k$ ja yksikäsitteinen $g \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$, jolle pätee $g(t_0) = x_0$ ja $f(g(t), t) = f(x_0, t_0)$ kaikille $t \in V$.*

Todistus. Katso [Apo2, Thm. 13.6], [Fle, luku 4.6] tai [Spi, Thm 12-2]. □

Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ väli, $a < b$ ja olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jatkuva injektio, jolle pätee $\gamma(a) = \gamma(b)$. Kuvaus γ on **Jordanin polku** ja sen kuvajoukko $\gamma([a, b])$ on **Jordanin käyrä**.

Lause B.3 (Greenin lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jatkuvasti differentioituva Jordanin polku, jonka rajaama joukko R sisältyy joukkoon U . Tällöin*

$$\int_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \mid \dot{\gamma}(t) \right) dt.$$

Todistus. Katso [Apo1, Thm. 11.10]. □

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Vektorikentän $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ **divergenssi** on

$$\nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right).$$

Seuraus B.4 (Greenin lauseen divergenssimuoto). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jatkuvasti differentioituva Jordanin polku, jonka rajaama joukko R sisältyy joukkoon U . Tällöin*

$$\int_R (\nabla \cdot f) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(f_1(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t) - f_2(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) \right) dt. \quad \square$$

Liite C

Metriset avaruudet

Tässä liitteessä käsittelemme metristen avaruuksien teoriaa olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistuksen tarpeisiin. Metrisiä avaruuksia käsitellään yksityiskohtaisemmin omalla kurssillaan,¹

C.1 Metriikka

Olkoon $X \neq \emptyset$. Kuvaus $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ **metriikka** joukossa X , jos

- $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys) ja
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on **metrinen avaruus**.

Metriikka on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden \mathbb{R}^n euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Joukon A metriikka $d|_{A \times A}$ on metrisen avaruuden X **indusoima** metriikka joukossa A .

Käytämme indusoidulle metriikalle usein samaa merkintää kuin ympäröivän avaruuden X metriikalle.

¹Katso esimerkiksi [Par]

Esimerkki C.1 (S^n). Euklidisen avaruuden yksikköpallon pinta on

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}.$$

Koska S^{n-1} on epätyhjä joukko, sille voidaan määrittellä diskreetti metriikka. Koska S^{n-1} on ympäröivän euklidisen avaruuden epätyhjä osajoukko, sillä on euklidisen avaruuden indusoima metriikka.

Tällä kurssilla merkintä S^{n-1} tarkoittaa avaruuden \mathbb{R}^n yksikköpallon pintaa varustettuna euklidisen avaruuden indusoimalla metriikalla.

C.2 Täydellinen metrinen avaruus

Metrisen avaruuden (X, d) Cauchyn jonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa.

Metrinen avaruus X on **täydellinen**, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

Esimerkki C.2. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Välillä I määriteltyjen jatkuvien kuvausten $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektoriavaruus $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksiminormilla

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|$.

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $K > 0$. Kuvaus $F: X \rightarrow Y$ on **K -Lipschitz-kuvaus** tai **K -Lipschitz(-jatkuva)**, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille $x, y \in X$. Jos F on K -Lipschitz jollain $K > 0$, niin sanotaan, että F on **Lipschitz-jatkuva**. Jos F on K -Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on kutistava (vakiolla K).

Piste $x \in X$ on kuvauksen $F: X \rightarrow X$ **kiintopiste**, jos $F(x) = x$.

Lause C.3 (Banachin kiintopistelause). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F: X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste.*

Todistus. Olkoon $x \in X$ ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Olkoon $F: X \rightarrow X$ kutistava kuvaus vakiolla $K < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono ja koska X on täydellinen, tämä jono suppenee kohti jotain pistettä $x_{\infty} \in X$.

Piste x_{∞} on kuvauksen F kiintopiste, sillä kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} d(x_{\infty}, F(x_{\infty})) &\leq d(x_{\infty}, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_{\infty})) \\ &\leq (1+K)d(x_{\infty}, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $j \rightarrow \infty$. Metriikan positiivisuudesta seuraa, että $x_{\infty} = F(x_{\infty})$.

Jos x_{∞} ja y_{∞} ovat kiintopisteitä, niin

$$Kd(x_{\infty}, y_{\infty}) \geq d(F(x_{\infty}), F(y_{\infty})) = d(x_{\infty}, y_{\infty}),$$

joten $d(x_{\infty}, y_{\infty}) = 0$ ja siis $x_{\infty} = y_{\infty}$. □

Käytämme tuloavaruudessa $X \times Y$ metriikkaa

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Propositio C.4. *Olkkoon X täydellinen metrinen avaruus ja olkkoon Y metrinen avaruus. Olkkoon $0 < K < 1$ ja olkkoon $F: X \times Y \rightarrow X$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $F_y = F(\cdot, y): X \rightarrow X$ on kutistava kuvaus vakiolla K jokaiselle $y \in Y$. Olkkoon $g: Y \rightarrow X$ kuvaus, jonka arvo pisteessä y on kuvauksen F_y kiintopiste. Tällöin kuvaus g on jatkuva.*

Todistus. Havaitaan, että kaikille $x \in X$ pätee

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^k d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) + d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)),$$

joten

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) = \frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x)),$$

sillä äärellinen summa on pienempi kuin $\frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x))$ ja $d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, koska $g(y)$ on kutistavan kuvauksen F_y kiintopiste. Valitaan $x = g(y') = F(g(y'), y')$, jolloin yllä oleva epäyhtälö antaa

$$d_X(g(y'), g(y)) \leq \frac{1}{1-K} d_X(F(g(y'), y'), F(g(y'), y)). \quad (\text{C.1})$$

Tulometriikan määritelmän mukaan $d_Y(y', y) = d_1((g(y'), y'), (g(y'), y))$, joten kuvauksen F jatkuvuuden ja yhtälön (C.1) nojalla nähdään, että $d_X(g(y'), g(y)) \rightarrow 0$, kun $d_Y(y', y) \rightarrow 0$, kuten väitettiin. □

C.3 Arzelà ja Ascolin lause

Olkkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Perhe $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ on **yhtäjatkuva**,^a jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$, jolle $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ kaikille $f \in \mathcal{F}$, kun $d_X(x, y) < \delta$.

^aenglanniksi equicontinuous

Esimerkki C.5. Jos (X, d_X) ja (Y, d_Y) ovat metrisiä avaruuksia, niin M -Lipschitz-kuvausten perhe

$$\text{Lip}_M(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y : d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq M d_X(x_1, x_2) \text{ kaikilla } x_1, x_2 \in X\}$$

on yhtäjatkuva: ehdosta $d_X(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon}{M}$ seuraa $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ kaikille kuvauksille $f \in \text{Lip}_M(X, Y)$ kaikille $x_1, x_2 \in X$.

Lause C.6 (Arzelà ja Ascolin lause). *Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $F \subset C^0(X, \mathbb{E}^1)$ epättyhjä osajoukko, joka on rajoitettu, yhtäjatkuva ja suljettu. Tällöin F on kompakti.*

Todistus. Katso esimerkiksi [Par, Lause 11.20], [Mun, §45] tai [BH, Lemma 3.10]. \square

C.4 Jordanin käyrälause

Metrinen avaruus X on **yhtenäinen**, jos ei ole avoimia epättyhjiä joukkoja U ja V , joille pätee $U \sqcup V = X$. Metrisen avaruuden (X, d_X) osajoukko E on **yhtenäinen**, jos metrinen avaruus (E, d_X) on yhtenäinen.

Metrisen avaruuden X osajoukko E on yhtenäinen, jos ja vain jos ei ole avaruuden X avoimia epättyhjiä joukkoja U ja V , joille pätee $U \cap V = \emptyset$, $U \cap E \neq \emptyset$, $V \cap E \neq \emptyset$ ja $(U \cap E) \cup (V \cap E) = E$.

Olkoon X metrinen avaruus. Inklusion suhteen maksimaalinen yhtenäinen osajoukko $A \subset X$ on avaruuden X **komponentti**.

Lause C.7 (Jordanin käyrälause). *Olkoon $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä. Joukolla $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ on kaksi komponenttia.*

Todistus. Katso [Mun, Thm. 63.4]. \square

Harjoitustehtäviä

C.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Osoita, että lauseke

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

määrää normin vektoriavaruuksessa $C^0(I, \mathbb{R}^n)$. Osoita, että $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|$.²

C.2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Olkoon A epättyhjä joukko ja olkoon $K > 0$. Olkoon kuvaus $f_\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ K -Lipschitz-jatkuva jokaisella $\alpha \in A$. Osoita, että perhe $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ on yhtäjatkuva.

²JMA 4

Kirjallisuutta

- [Apo1] T. M. Apostol. *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*. Second edition. Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1969.
- [Apo2] T. M. Apostol. *Mathematical analysis*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., second edition, 1974.
- [BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1999.
- [Chi] C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, volume 34 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [CL] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.
- [Dur] J. R. Durbin. *Modern algebra*. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1986. An introduction.
- [Fit] R. FitzHugh. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1(6):445 – 466, 1961.
- [Fle] W. Fleming. *Functions of several variables*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, second edition, 1977. Undergraduate Texts in Mathematics.
- [Gre] W. Greub. *Linear algebra*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 23.
- [Gro] S. Grossman. *Elementary linear algebra*. Saunders College Publishing, 1991.
- [Hah] W. Hahn. *Stability of motion*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 138. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [Har1] P. Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:610–620, 1960.
- [Har2] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Birkhäuser, Boston, Mass., second edition, 1982.

- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [HJ] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [LGA] J. Leys, É. Ghys, and A. Alvarez. Chaos. A mathematical adventure. <http://www.chaos-math.org/en>.
- [Mun] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., second edition, 2000.
- [Par] J. Parkkonen. Metriset avaruudet ja topologia. <http://users.jyu.fi/~parkkone/MetTop2018/Topo2018.pdf>, 2018.
- [Per] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993. Corrected reprint of the 1991 original.
- [Sch] S. Schecter. Ordinary Differential Equations II. Supplementary readings. http://www4.ncsu.edu/~schecter/ma_732_sp13/resources.html.
- [Spa] C. Sparrow. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, volume 41 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Spi] M. Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.
- [Tes] G. Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [Vin] R. È. Vinograd. Inapplicability of the method of characteristic exponents to the study of non-linear differential equations. *Mat. Sb. N.S.*, 41(83):431–438, 1957.