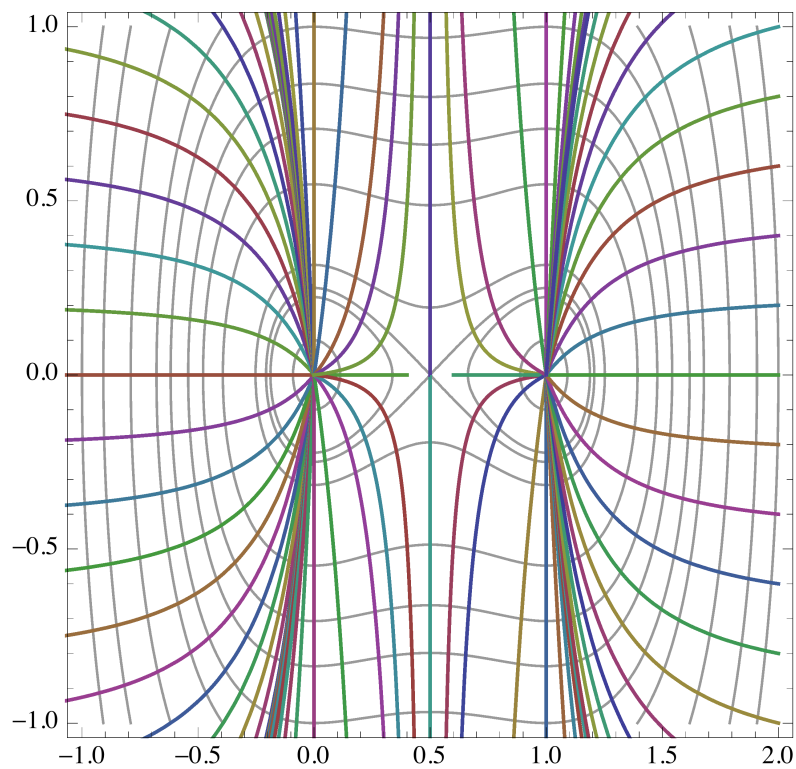

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi



JOUNI PARKKONEN

LUENTOJA JYVÄSKYLÄN YLIOPISTOSSA

SYKSYLLÄ 2019

Sisältö

I

1	Differentiaaliyhtälöt	1
1.1	Ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöt	1
1.2	Korkeamman asteen yhtälöistä	3
1.3	Vektorikentät ja autonomiset yhtälöt	4
1.4	Ratkaisujen olemassaolosta	6
	Harjoitustehtäviä	9
A	Napakoordinaatit	11
2	Lineaariset autonomiset yhtälöt ja matriisien eksponenttifunktio	13
2.1	Lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt	13
2.2	Matriisien normiavaruus	14
2.3	Matriisien eksponenttifunktio	16
2.4	Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisut	18
2.5	Muuttujanvaihtolemma	20
2.6	Ratkaisujen vektoriavaruus	21
	Harjoitustehtäviä	22
B	Lineaarialgebraa	25
B.1	Ominaisarvot ja ominaisvektorit	25
B.2	Konjugointi ja diagonalisoituvuus	26
B.3	Kompleksista lineaarialgebraa	27
	Harjoitustehtäviä	28
3	Tason lineaariset autonomiset alkuarvotehtävät	29
3.1	2×2 -matriisien luokittelu	29
3.2	Esimerkki muuttujanvaihtolemmän käytöstä	31
3.3	Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit	33
3.4	Parametrisoituja perheitä	36
	Harjoitustehtäviä	38
4	Lineaariset autonomiset alkuarvotehtävät korkeammassa ulottuvuudessa	41

4.1	Yleistetty ominaisavaruus	41
4.2	Blokkidiagonaalimatriisit	43
4.3	Jordanin kanoninen muoto	44
4.4	Mukautettu normi	48
	Harjoitustehtäviä	49
C	Metriset avaruudet	51
	Harjoitustehtäviä	53
5	Epälineaariset differentiaaliyhtälöt	55
5.1	Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause	55
5.2	Jatkuva riippuvuus alkuarvosta	57
5.3	Maksimaalinen määrittelyväli	59
5.4	Vakion variointi	61
	Harjoitustehtäviä	63
6	Epälineaarisen yhtälön ratkaisusta	65
6.1	Tason yhtälön ratkaisukäyrien etsiminen separoimalla	65
6.2	Tasapainopisteen vakaus	67
6.3	Linearisointi	68
6.4	FitzHughin ja Nagumon yhtälö.	71
	Harjoitustehtäviä	74
	Kirjallisuutta	77

Tästä tekstistä

Tämä teksti sisältää syksyn 2019 kurssien Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 ja 2 materiaalin.

Ensimmäisellä jatkokurssilla tutustutaan differentiaaliyhtälöryhmien teoriaan erityisesti lineaaristen systeemien kautta. Tällä kurssilla myös todistetaan epälineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause ja aloitellaan epälineaaristen yhtälöiden ratkaisujen tarkastelua.

Jälkimmäinen kurssi on syventävämpää materiaalia. Tällä kurssilla tutustutaan epälineaaristen yhtälöiden kvalitatiiviseen teoriaan ja tarkastellaan ratkaisujen asymptoottista käyttäytymistä. Kurssin lopussa todistetaan Poincarén ja Bendixsonin lause, joka antaa melko tarkan kuvan tason systeemien käyttäytymisestä. Tällä kurssilla autonomisia differentiaaliyhtälöitä tarkastellaan tavalla, joka liittyy ne osaksi dynaamisten systeemien teoriaa.

Molemmilla kursseilla edellytetään differentiaali- ja integraalilaskennan ja lineaarialgebran osaamista tasolla, joka saavutetaan näiden alojen peruskursseilla. On myös hyvä osata tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä yksiulotteisessa tapauksessa. Jälkimmäisellä kurssilla käytetään joitain edistyneempiä metristen avaruuksien tuloksia mutta topologian kurssin tiedot eivät ole tälläkään kurssilla välttämätön esitieto.

Olen pyrkinyt havainnollistamaan käsiteltävää teoriaa runsailla esimerkeillä ja kuvituksella. Differentiaaliyhtälöitä käytetään esimerkiksi fysikaalisten ja biologisten ilmiöiden mallintamisessa. Käsittelemme joitain näiden sovellusalojen differentiaaliyhtälöitä esimerkkeinä matemaattisesti mielenkiintoisista ilmiöistä. Itse mallintaminen jätetään muille kursseille.

Tekstin lopussa olevassa lähdeluettelossa on monia kurssin materiaalia tukevia ja laajentavia lähteitä. Erityisesti näistä nousevat esille [Har], [HSD], [Per] ja [Tes]. Näiden lisäksi suosittelen elokuvaa Chaos [LGA].

Merkintöjä

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.

Sisältö

- $f|_A$ kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.
- $C^0(X, Y)$ jatkuvien kuvausten $f: X \rightarrow Y$ avaruus.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.

Uusien käsitteiden **määritelmät** on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Tällaisessa laatikossa tehdään jokin tärkeä sopimus, nimetään jokin käsite siten, että kyseessä ei ole varsinainen matemaattinen määritelmä, tai tehdään muu huomio, jota halutaan korostaa.

Osa I

Luku 1

Differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tutustumme muutamiin esimerkkeihin erilaisista differentiaaliyhtälöistä ja niiden sovelluksista. Tutustumme terminologiaan ja autonomisten yhtälöiden geometriseen tulkintaan ja aloitamme myös hieman teoreettista tarkastelua.

1.1 Ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöt

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Tällä kurssilla merkintä $\dot{x}(t) = x'(t)$ tarkoittaa vektoriarvoisen differentioituvan kuvauksen $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}$, derivaattaa.

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja ja olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (jatkuva) kuvaus. **Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö^a** on yhtälö

$$\dot{x}(t) = f(x, t). \tag{1.1}$$

Siihen liittyvä **alkuarvotehtävä** on

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

joillain $x_0 \in U$ ja $t_0 \in I$.

^atai differentiaaliyhtälöryhmä

Jos funktio $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ kirjoitetaan komponenttifunktioiden avulla muodossa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)),$$

niin differentiaaliyhtälöryhmä (1.1) kirjoitettuna komponenteittain on

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Differensiaaliyhtälön muotoilussa kuvauksen f määrittelyjoukko jätetään usein hieman epämääräiseksi.

Differensiaaliyhtälön (1.1) **ratkaisu** alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ eli **alkuarvottehtävän**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ kaikilla $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$. Väli Δ on ratkaisun x **määrittelyväli**.

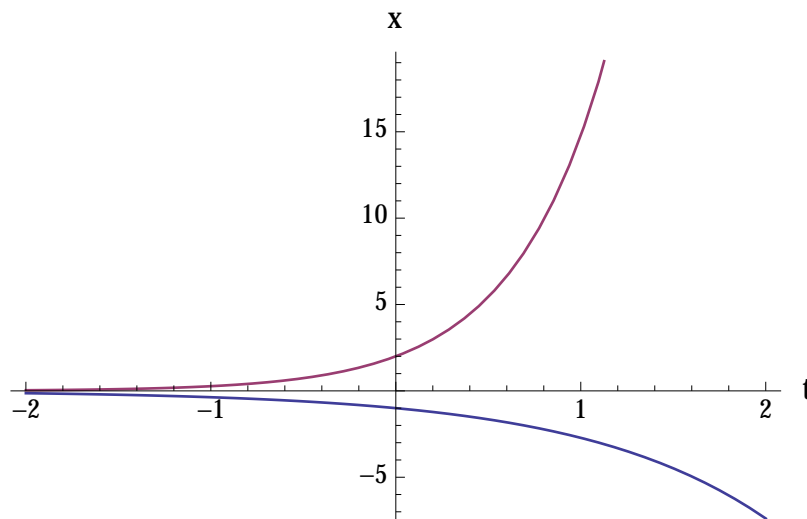
Parametriä t kutsutaan usein ajaksi ja differentiaaliyhtälön ajatellaan kuvaavan jonkin systeemin tilan x kehittymistä ajan kuluessa. Monissa esimerkiksi fysiikasta tai biologiasta tulevista differentiaaliyhtälöissä tilanne on juuri tämä.

Joissakin tapauksissa differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista täydellisesti niin, että ratkaisulle voidaan antaa täsmällinen lauseke. Tärkeimpänä esimerkkinä tällaisista systeemeistä tarkastelemme ensimmäisen kurssin alkupuolella lineaarisia autonomisia yhtälöitä.

Esimerkki 1.1 (Populaatiomalleja). Olkoot $\lambda, a \in \mathbb{R}$. Lineaarisen alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ x(0) = a \end{cases} \quad (1.3)$$

ratkaisu on $x(t) = ae^{\lambda t}$. Kuva näyttää ratkaisujen kuvaajat parametrien arvoilla $\lambda = a = 2$ ja $\lambda = 1, a = -1$.



Alkuarvotehtävän (1.3) ratkaisu voidaan määritellä koko reaaliakselilla. Tämä alkuarvotehtävä liittyy populaatioiden kehityksen varhaiseen mallintamiseen, tällöin t on aika ja x kuvaa populaation kokoa.

Malthusin lain mukaan populaation kasvuvauhti on suoraan verrannollinen populaation kokoon.

Verhulst korjasi Malthusin mallia ottamalla huomioon sen, että tarkasteltava ympäristö ei voi elättää rajattoman suurta populaatiota.

Verhulstin populaatiomallia kuvaa **logistinen differentiaaliyhtälö**

$$\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1.4)$$

joillain parametreillä $a, K > 0$.

1.2 Korkeamman asteen yhtälöistä

Esimerkki 1.2 (Harmoninen värähtelijä). Kiinnitetään ideaalinen jousi seinään toisesta päästään. Kiinnitetään jousen toiseen päähän pistemäinen paino, jonka massa on $m > 0$. Ajatellaan, että jousen liike on rajoitettu parametrillä x parametrisoidulle viivalle, jota pitkin sitä voi vetää tai painaa kokoon. Olkoon jousen pää pisteessä $x = 0$. Kun jouta venytetään tai painetaan kasaan, se vastustaa siirtymää voimalla $-kx$, missä $k > 0$ on **jousivakio**. Jousi aiheuttaa siis tarkasteltavalle painolle kiihtyvyyden yhtälöllä $m\ddot{x} = -kx$.

Differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} = -kx$$

on **harmonista värähtelijää** kuvaava toisen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö.

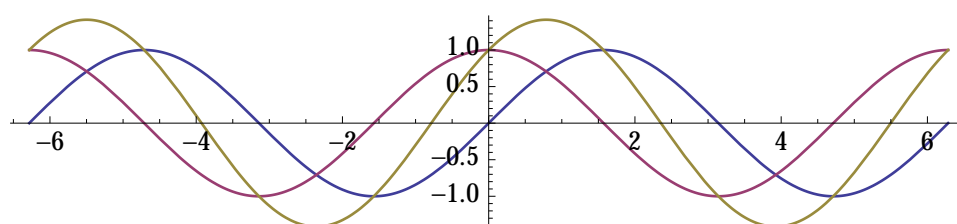
Harmonisen värähtelijän yhtälön rikoistapauksen $m = k = 1$

$$y''(t) + y(t) = 0 \quad (1.5)$$

kaikki ratkaisut saadaan funktioiden \sin ja \cos lineaarikombinaatioina. On helppo tarkastaa, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b, \end{cases} \quad (1.6)$$

on koko avaruudessa \mathbb{R} määritelty ratkaisu $y(t) = a \cos t + b \sin t$ jokaisella $a, b \in \mathbb{R}$.



Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (1.5) voidaan muuntaa tason ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi: Asetetaan $x_1 = y$ ja $x_2 = y'$. Tällöin siis yhtälö (1.5) on

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Matriisimuodossa alkuarvottehtävä (1.6) on siis $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$, missä $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Yhtälön (1.6) ratkaisu on luettavissa edeltä:

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \end{pmatrix}.$$

Esimerkin 1.2 menettely yleistyy korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöille: Olkoon $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Kertaluvun m differentiaaliyhtälö

$$y^{(m)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, t) \quad (1.7)$$

muunnetaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi asettamalla $y_i = y^{(i)}$ jokaiselle $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Tällöin differentiaaliyhtälön (1.7) sijaan voidaan tutkia m yhtälön ryhmää

$$\begin{cases} \dot{y}_i = y_{i+1} \text{ kaikilla } 0 \leq i \leq m-2 \\ \dot{y}_{m-1} = f(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, t). \end{cases} \quad (1.8)$$

Asettamalla $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ ja $F(z, t) = (z_2, z_3, \dots, z_m, f(z, t))$, saadaan yhtälö (1.8) muotoon

$$\dot{z} = F(z, t).$$

Propositio 1.3. *Olkoot f ja F kuten yllä. Funktio y on differentiaaliyhtälön (1.7) ratkaisu, jos ja vain jos kuvaus z on differentiaaliyhtälöryhmän (1.8) ratkaisu.* \square

1.3 Vektorikentät ja autonomiset yhtälöt

Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan t arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois merkinnöistä.

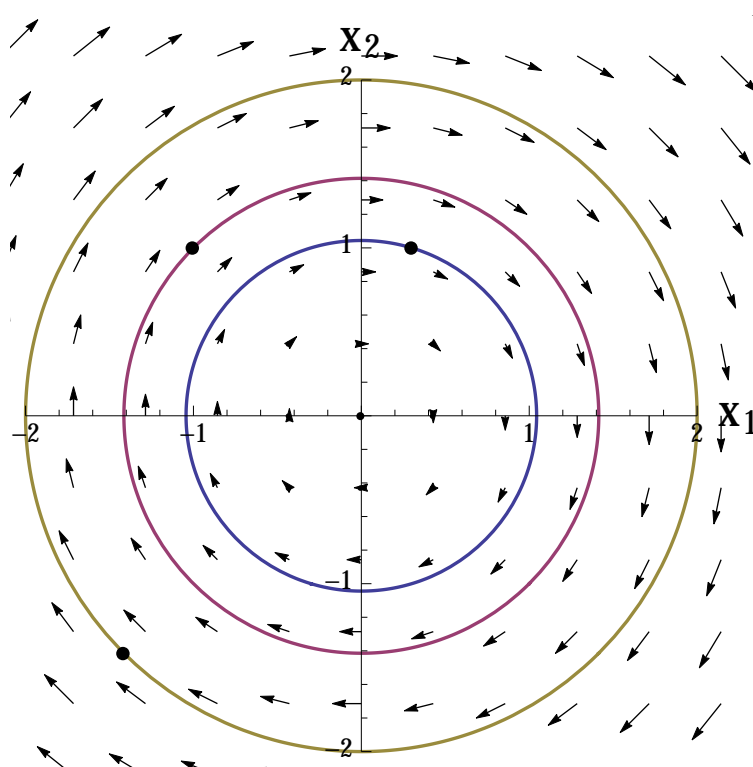
Kuvauksen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ määräämä **autonominen differentiaaliyhtälö** on

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.9)$$

Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä. Alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva polku joukossa U , jonka tangenttivektori $\dot{x}(t)$ pisteessä $x(t)$ on vektorikentän f arvo pisteessä $x(t)$. Lisäksi polku kulkee pisteen x_0 kautta ja toteuttaa $x(t_0) = x_0$.



Kuva 1.1: Differentiaaliyhtälön (1.2) vektorikenttä $f(x) = Ax$ ja ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.3, 1)$, $x_0 = (-1, 1)$ ja $x_0 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Kuvaus $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on **vektorikenttä** joukossa U .

Voimme itse asiassa aina olettaa, että differentiaaliyhtälö on autonominen:

Propositio 1.4. *Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin. Olkkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva. Määritellään $x_{n+1} = t$. Kuvaus $t \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ on differentiaaliyhtälön*

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.10)$$

ratkaisu, jos ja vain jos $t \mapsto (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ on autonomisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

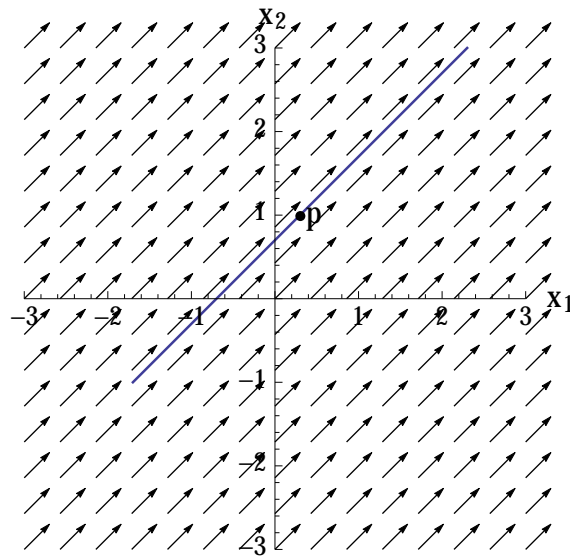
ratkaisu.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Tällä kurssilla tarkastelemme autonomisia ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

Vektorikentän f nollakohdat ovat differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ **tasapainopisteitä**.^a

^aequilibrium point



Kuva 1.2: Vakiovektorikenttä $f(x) = (1, 1)$ tasossa ja alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = p = (0.3, 1)$ ratkaisu aikavälillä $t \in]-2, 2]$.

Lemma 1.5. (1) Jos x_0 on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste, niin vakiokuvaus $t \mapsto x_0$ on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu.

(2) Jos x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, niin kuvaus $t \mapsto x(-t)$ on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -f(x)$ ratkaisu.

Todistus. Kohta (1) on selviö, kohta (2) tehdään harjoituksissa. □

1.4 Ratkaisujen olemassaolosta

Todistamme kurssilla myöhemmin tuloksen, joka kertoo, milloin alkuarvotehtävällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Lause 1.6 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoon $x_0 \in U$ ja olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Tällöin alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on määritelty jollain avoimella välillä $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

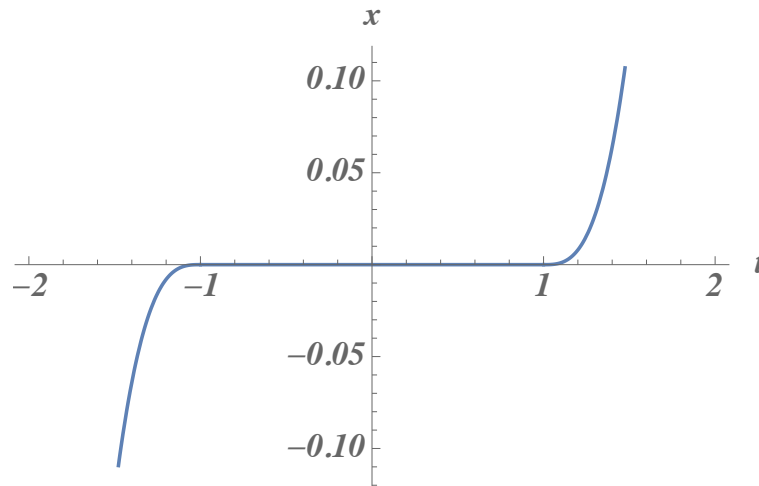
Jos Lauseen 1.6 oletukset eivät ole voimassa, niin alkuarvotehtävällä voi olla useita eri ratkaisuja kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 1.7. Vakiofunktio $0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0(t) = 0$, on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

ratkaisu. Toisaalta funktio $p_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p_3(t) = t^3$ on alkuarvotehtävän (1.12) ratkaisu, joten tehtävän ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Itse asiassa alkuarvotehtävällä (1.12) on äärettömän monta ratkaisua $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: Olkoot $a \leq 0 \leq b$ ja olkoon

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & \text{kun } t \leq a \\ 0, & \text{kun } a \leq t \leq b \\ (t-b)^3, & \text{kun } t \geq b \end{cases}.$$



On helppo tarkastaa, että kaikki funktiot $x_{a,b}$ ovat derivoituvia ja että myös ne alkuarvotehtävän (1.12) ratkaisuja. Tässä esimerkissä vektorikenttä $f_{2/3}(x) = 3x^{2/3}$ on jatkuva, mutta se ei ole differentioituva pisteessä $x = 0$.

Lemma 1.8. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ja olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Olkoot $x_1: I_1 \rightarrow U$ ja $x_2: I_2 \rightarrow U$ alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ ratkaisuja avoimilla väleillä I_1 ja I_2 . Tällöin alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $I_1 \cup I_2$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $x_1(t) = x_2(t)$ kaikilla $t \in I_1 \cap I_2$. Jos tämä ei päde, niin on maksimaalinen osaväli $[t_0, t^*] \subset I_1 \cap I_2$, jossa ratkaisut yhtyvät. Olkoon $x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*)$. Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t^*) = x^* \end{cases} \quad (1.13)$$

on Lauseen (1.6) nojalla yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä $]x^* - \delta, x^* + \delta[$. Funktiot x_1 ja x_2 ovat alkuarvotehtävän (1.13) ratkaisuja välillä $]t^* - \delta, t^* + \delta[\cap I_1 \cap I_2$, joten ne yhtyvät tällä välillä. Tämä on ristiriita ajan t^* määritelmän kanssa.

Funktio $x: I_1 \cup I_2 \rightarrow U$, joka määritellään asettamalla $x(t) = x_k(t)$, kun $t \in I_k$, $k \in \{1, 2\}$, on hyvin määritelty ja se on alkuarvotehtävän ratkaisu välillä $I_1 \cup I_2$. Yksikäsitteisyys seuraa todistuksen alkuosasta. \square

Propositio 1.9. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoot $x_0 \in U$ ja $t_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $J =]\alpha, \beta[$ yhdiste kaikista alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

määrittelyväleistä. Tällöin alkuarvotehtävällä (1.14) on yksikäsitteinen ratkaisu välillä J .

Todistus. Määritellään kuvaus $x:]\alpha, \beta[\rightarrow U$ näin: Jokaisella $t \in J$ on alkuarvotehtävän (1.14) ratkaisu u , joka on määritelty jollain ajan t sisältämällä välillä. Asetetaan $x(t) = u(t)$. Lemman 1.8 nojalla x on nyt hyvin määritelty. Lisäksi se on alkuarvotehtävän (1.14) ratkaisu. Välillä J määritellyn ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa Lemmasta 1.8. \square

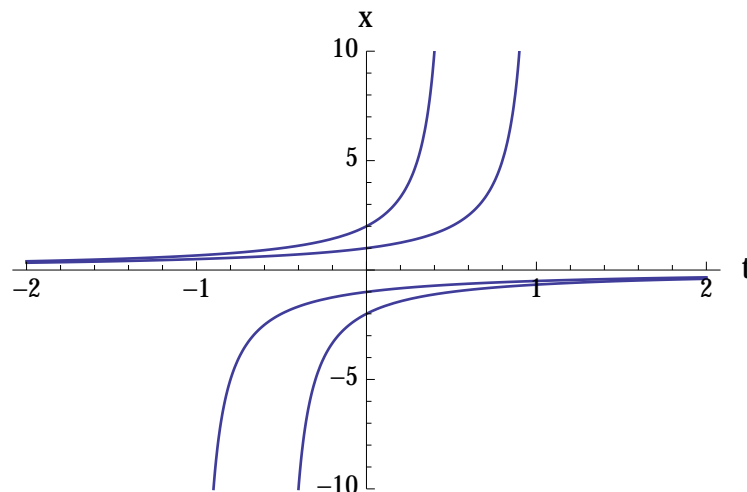
Proposition 1.9 väli J ei sisälly aidosti alkuarvotehtävän (1.14) mihinkään ratkaisuväliin.

Alkuarvotehtävän (1.14) kaikkien ratkaisuvälien yhdiste on sen **maksimaalinen määrittelyväli**. Maksimaalisella määrittelyvälillä määritelty ratkaisu on **maksimaalinen ratkaisu**. Maksimaalisen ratkaisun kuvajoukko on pisteen x_0 **rata**.

Esimerkki 1.10. Olkoon $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = a \end{cases},$$

ratkaisu $x(t) = \frac{a}{1-at}$ "räjähtää äärellisessä ajassa tulevaisuudessa tai menneisyydessä" vaikka yhtälön oikean puolen funktio $x \mapsto x^2$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.



Seuraava autonomisten differentiaaliyhtälöiden ominaisuus on tärkeä geometrisen hahmottamisen apukeino:

Seuraus 1.11. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Jos kahden pisteen radat leikkaavat, niiden radat ovat joukkoina samat.

Todistus. Olkoot x ja y vektorikentän f määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja maksimaalisilla määrittelyväleillään I_x ja I_y . Oletetaan, että $x(t_x) = y(t_y)$. Olkoon $s: I_x \rightarrow I_x - t_x + t_y$ kuvaus $s(t) = t - t_x + t_y$. Nyt x ja $y \circ s$ ovat alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(t_x) = x(t_x) \end{cases}$$

ratkaisuja, joten ne yhtyvät välillä I_x . Kuvausten y ja $y \circ s$ kuvajoukko on sama, joten väite seuraa. \square

Harjoitustehtäviä

1.1. Todista Propositio 1.4.

1.2. Todista Propositio 1.5(2).

1.3. Ratkaise logistinen differentiaaliyhtälö (1.4) parametrilla $K = 1$ ja tarkastele sen ratkaisujen käyttäytymistä eri alkuarvoilla, kun $t \rightarrow \infty$.

Tehtävissä 1.4 ja 1.5 tarkastellaan vektorikenttää $N: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $N(x) = -\frac{x}{\|x\|}$.

1.4. (1) Hahmottele kuva vektorikentästä N .

(2) Voiko vektorikentän N jatkaa tasossa \mathbb{R}^2 määritellyksi jatkuvaksi vektorikentäksi?

1.5. (1) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$. Osoita, että lauseke

$$x(t) = x_0 - t \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

antaa alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

ratkaisun.

(2) Piirrä kuva muutaman ratkaisun radoista alkuarvon x_0 eri arvoilla.

(3) Mikä on alkuarvot tehtävän (1.15) ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli?

1.6. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Tarkastele alkuarvot tehtävää

$$\begin{cases} \dot{x} = x\|x\|, \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

(1) Hahmottele kuva vektorikentästä.

(2) Ratkaise alkuarvot tehtävä.

(3) Kuvaile ratkaisujen käyttäytymistä.

1.7. Osoita, että kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

(1) Miten ratkaisu käyttäytyy, kun λ on positiivinen tai negatiivinen?

(2) Hahmottele ratkaisukäyriä muutamilla alkuarvon (a, b) eri arvoilla.

- (3) Siinä tapauksessa, että $x(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$, osoita, että polun x tangenttivektori lähestyy vaakasuoraa suuntaa.¹

Tehtävissä 1.8 ja 1.9 ratkaise alkuarvotehtävä, määritä ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli ja kuvaile ratkaisun käyttäytymistä.

$$1.8. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} \\ x(0) = (1, 1) \end{cases} .$$

$$1.9. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{2x_1} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ x(0) = (1, 1) \end{cases} .$$

- 1.10. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (-x_1, x_2 + x_1^2)$. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Miten ratkaisut käyttäytyvät alkuarvoilla x_0 , jotka ovat lähellä vektorikentän f tasapainopistettä?

¹Tangenttivektorin raja-arvo on 0, mutta mistä suunnasta se lähestyy nollaa?

Liite A

Napakoordinaatit

Joissain tapauksissa differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytyminen on helpompi hahmottaa napakoordinaattien avulla.

Napakoordinaattikuvaus on $N: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$,

$$N(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Derivoimalla komponenttifunktiot saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

ja derivoimalla yhtälöiden

$$\begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

vasemmat ja oikeat puolet saadaan käyttökelpoiset yhtälöt

$$\begin{cases} r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ r^2\dot{\theta} = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1. \end{cases} \tag{A.2}$$

Näiden yhtälöiden avulla voidaan usein muodostaa alkuperäisen yhtälöparin kanssa yhtäpitävä yhtälö napakoordinaateissa. Joskus tämä uusi yhtälö on helpompi ratkaista kuin alkuperäinen.

Luku 2

Lineaariset autonomiset yhtälöt ja matriisien eksponenttifunktio

Tässä luvussa tutustumme matriisien eksponenttifunktioon ja ratkaisemme sen avulla kaikki lineaariset autonomiset alkuarvot tehtävät.

2.1 Lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt

Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Ax$ on **lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö** ja A on sen **kerroinmatriisi**.

Esimerkki 2.1. (1) Olkoot $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Diagonaalimatriisin $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ määräämä tason differentiaaliyhtälö on komponenteittain kirjoitettuna

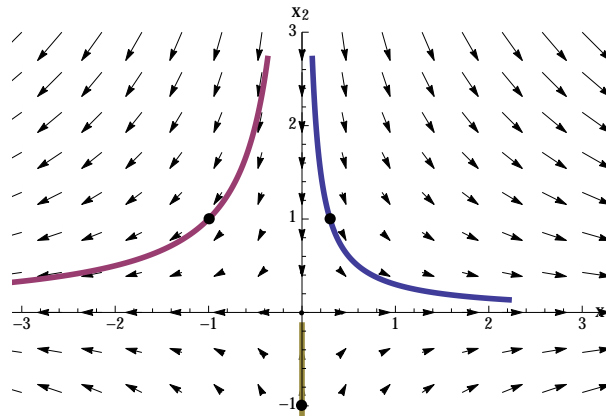
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}^2$. Tason alkuarvot tehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ ratkaisu on Esimerkin 1.1 mukaan

$$x(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Jos alkuarvo (a, b) on x_i -akselilla, $i \in \{1, 2\}$, niin koko rata sisältyy x_i -akseliin. Eri-tyisesti vakiokuvaus 0 on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = 0$. Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät x_1 -akselia, kun $t \rightarrow \infty$ ja x_2 -akselia, kun $t \rightarrow -\infty$.

(2) Harmonisen värähtelijän yhtälöryhmä (1.2) on lineaarinen autonominen yhtälö, jonka kerroinmatriisi on $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Esimerkissä 1.2 näimme, että tämän yhtälön kaikki radat ovat rajoitettuja.



Kuva 2.1: Alkuarvotehtävän (2.1) ratkaisuja, kun $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Lineaarisia autonomisia differentiaaliyhtälöitä voi käsitellä lineaarialgebran keinoilla ja eksakti ratkaiseminen on periaatteessa mahdollista kaikissa tapauksissa. Tässä luvussa tarkastelemme lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisemista matriisien eksponenttifunktion avulla.

Luvuissa 3 ja 4 luokittelemme lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt ja osoitamme, että esimerkiksi tason tapauksessa ratkaisujen luonne voidaan päätellä kerroinmatriisin ominaisarvojen ja niiden kertalukujen avulla. Tätä varten kertaamme ja laajennamme lineaarialgebran kurssien antamia tietoja liitteessä B. Kurssimateriaalien lisäksi tässä ja seuraavassa luvussa käsiteltäviin asioihin voi perehtyä esimerkiksi lähteiden [Gre], [Gro] tai [HJ] avulla.

2.2 Matriisien normiavaruus

Tarkastelemme Luvussa 2.4 periaatteessa suoraviivaista menetelmää autonomisen lineaarisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi. Aloitamme sopimalla, milloin kaksi $n \times n$ -matriisia on lähellä toisiaan.

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty[, v \mapsto \|v\|$, on **normi**, jos

- (1) $\|v\| = 0$, jos ja vain jos $v = 0$,
- (2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kaikille $v \in V$ ja
- (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ kaikille $v, w \in V$.

Pari $(V, \|\cdot\|)$ on **normiavaruus**.

Esimerkki 2.2. (1) Lineaarialgebran kursseilla osoitetaan, että euklidinen normi $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ on normi.

(2) Lauseke

$$\|A\|_\infty = \|(a_{ij})\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

(3) Lauseke

$$\|A\|_1 = \|(a_{ij})\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

(4) Lauseke

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Lemma 2.3. *Olkoot $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tällöin $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$.*

Todistus.

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\|_1 = \|A\|_1 \|B\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

Vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat **ekvivalentit**, jos on $c > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{c} \|v\|' \leq \|v\| \leq c \|v\|$$

kaikille $v \in V$.

Lause 2.4. *Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa kaikki normit ovat ekvivalentteja.* \square

Varustetaan reaalisten $n \times n$ -matriisien vektoriavaruus M_n normilla $\|\cdot\|$. Matriisien muodostama jono A_i suppenee kohti matriisia A , jos $\|A_i - A\| \rightarrow 0$, kun $i \rightarrow \infty$.

Propositio 2.5. *Olkoot $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ normeja avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jono $(A_i)_{i=1}^\infty$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, jos ja vain jos jono $(A_i)_{i=1}^\infty$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|')$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. \square

Propositio 2.6. *Olkoon $\|\cdot\|$ normi avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jono $(A_i)_{i=1}^\infty$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, jos ja vain jos kaikki sen kertoimien muodostamat jonot $(a_{kl})_{i=1}^\infty$ suppenevat reaalilukujen joukossa.*

Todistus. Harjoitustehtävä. \square

Propositio 2.7. *Neliömatriisien normiavaruus $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on homeomorfinen n^2 -ulotteisen euklidisen avaruuden kanssa.* \square

2.3 Matriisien eksponenttifunktio

Määritellään matriisien potenssit tavanomaiseen tapaan asettamalla $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ ja induktiivisesti $A^{k+1} = AA^k$ kaikille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja kaikille $k \geq 2$.

Olkoon $(B_k)_{k=0}^\infty$ jono avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Sarja $\sum_{k=0}^\infty B_k$ on jono $(\sum_{k=0}^n B_k)_{n=0}^\infty$.
Olkoon $(c_k)_{k=0}^\infty$ jono reaalilukuja. Sarja $\sum_{j=0}^\infty c_j A^j$ on **potenssisarja**.

Propositio 2.8. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Sarja*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \quad (2.2)$$

suppenee.

Todistus. Olkoon $a_{ij}^{(k)}$ matriisin A^k ij -kerroin. Tällöin

$$|a_{ij}^{(2)}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} \right| \leq n \|A\|_\infty^2,$$

ja induktiolla

$$|a_{ij}^{(N)}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(N-1)} a_{kj} \right| \leq n^{N-1} \|A\|_\infty^N.$$

Siispä

$$\frac{|a_{ij}^{(N)}|}{N!} \leq \frac{n^{N-1} \|A\|_\infty^N}{N!} \leq \frac{n^N \|A\|_\infty^N}{N!},$$

ja koska reaalinen eksponenttifunktio suppenee itseisesti, niin Weierstrassin M -testin ja Proposition 2.6 nojalla sarja (2.2) suppenee. \square

Sarja (2.2) määrittelee **matriisien eksponenttifunktion** $\exp: \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$,

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Esimerkki 2.9. (1) $\exp \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$.

(2) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Tällöin

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I_2,$$

$$A^3 = -\beta^2 I_2 \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = -\beta^2 A,$$

$$A^4 = \beta^4 I_2,$$

\vdots

ja induktiolla saadaan siis

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 2.10. *Olkoot $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ siten, että $AB = BA$. Tällöin $\exp(tA)B = B \exp(tA)$. Erityisesti $\exp(tA)A = A \exp(tA)$.*

Todistus. Induktiolla on helppo todistaa, että kaikille $K \in \mathbb{N}$ pätee $A^k B = BA^k$: Oletuksen mukaan väite pätee, kun $k = 1$. Jos $A^{k-1}B = BA^{k-1}$, niin

$$A^k B = BA^k = A^{k-1}AB = A^{k-1}BA = BA^{k-1}A = BA^k.$$

Siis kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$B \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} B,$$

mistä väite seuraa. □

Jos $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, C on kääntyvä ja $B = CAC^{-1}$, niin A ja B ovat toistensa konjugaatteja ja C on konjugoiva matriisi.

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä konjugointi on usein kätevä väline seuraavan ominaisuuden vuoksi:

Lemma 2.11. *Jos $B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, C on kääntyvä, niin $\exp(CBC^{-1}) = C \exp(B)C^{-1}$.*

Todistus. Matriisituloille pätee $(CBC^{-1})^k = CB^kC^{-1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siis osasummille pätee

$$\sum_{k=0}^n \frac{(CBC^{-1})^k}{k!} = C \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} C^{-1},$$

joten Lemman 2.3 nojalla pätee

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{(CBC^{-1})^k}{k!} - C \exp(B)C^{-1} \right\|_1 = \left\| C \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} - \exp(B) \right) C^{-1} \right\|_1 \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. □

2.4 Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisut

Matriisien eksponenttifunktio antaa menetelmän kaikkien lineaaristen homogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen.

Aloitamme hyödyllisellä abstraktilla havainnolla. Tässä tuloksessa määritämme kuvauksen $t \mapsto \exp(tA)$ derivaatan. Proposition 2.7 nojalla matriisien avaruus $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on n^2 -ulotteinen reaalinen vektoriavaruus, joka on siis isomorfinen avaruuden \mathbb{R}^{n^2} kanssa.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin. Kuvaus $F: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on **jatkuva (differentioituva)**, jos se on jatkuva (differentioituva) kuvauksena avaruuteen \mathbb{R}^{n^2} .

Vektorianalyysin/calculuksen kursseilta muistamme: Jos $A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, niin A on differentioituva, jos ja vain jos kaikki funktiot A_{ij} ovat differentioituvia/derivoituvia. Tällöin $\dot{A}(t) = (\dot{A}_{ij}(t))_{i,j=1}^n$.

Propositio 2.12. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja olkoon $E_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$,*

$$E_A(t) = \exp(tA).$$

Tällöin

$$\dot{E}_A(t) = AE_A(t).$$

Todistus. Olkoon $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$. Derivoimalla suppenevaa potenssisarjaa termeittäin saamme

$$\dot{E}_A(t)_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)} t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_{ij}^{(k)} t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)} t^k}{k!}.$$

Siis

$$\dot{E}_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = AE_A(t).$$

Keskimmäinen näistä yhtälöistä on selvä, koska vastaava pätee kaikille äärellisille osasummille. □

Lemma 2.13. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Olkoot $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $B: \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja $G: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differentioituvia kuvauksia.*

(1) *Olkoon $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(t) = A(t)G(t)$. Tällöin $\dot{F} = A\dot{G} + \dot{A}G$.*

(2) *Olkoon $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C(t) = A(t)B(t)$. Tällöin $\dot{C} = A\dot{B} + \dot{A}B$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 2.14. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tällöin $\exp A$ on kääntyvä ja*

$$\exp(-A) = (\exp A)^{-1}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.15 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Alkuarvotettävän*
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
 ainoa ratkaisu on $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) = \exp(tA)x_0$.

Todistus. Proposition 2.12 nojalla

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)x_0) = A \exp(tA)x_0,$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten x on alkuarvottehtävän ratkaisu. Osoitamme, että se on ainoa ratkaisu: Olkoon $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ alkuarvottehtävän ratkaisu. Olkoon $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z(t) = e^{-tA}y(t)$. Lemman 2.13 nojalla

$$\dot{z}(t) = -A \exp(-tA)y(t) + \exp(-tA)Ay(t) = \exp(-tA)(A - A)y(t) = 0,$$

joten z on vakiokuvaus $z(t) \equiv z(0) = y(0) = x_0$. Siispä kuvauksen z määritelmä antaa Proposition 2.14 avulla $y(t) = \exp(tA)x_0$. \square

Ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa myös olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseesta 1.6.

Lemma 2.16. *Jos $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ $AB = BA$, niin $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.*

Todistus. Lemman 2.10 nojalla $\exp(tA)B = B \exp(tA)$. Olkoon

$$F(t) = \exp(t(A + B)) - \exp(tA) \exp(tB).$$

Lemman 2.13 nojalla

$$\dot{F}(t) = (A + B) \exp(t(A + B)) - (A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA)B \exp(tB)) = (A + B)F(t).$$

Lauseen 2.15 nojalla $F(t) = \exp(t(A + B))F(0) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Väite seuraa tästä. \square

Esimerkki 2.17. Olkoon

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Lemman 2.16 ja Esimerkin 2.9 nojalla

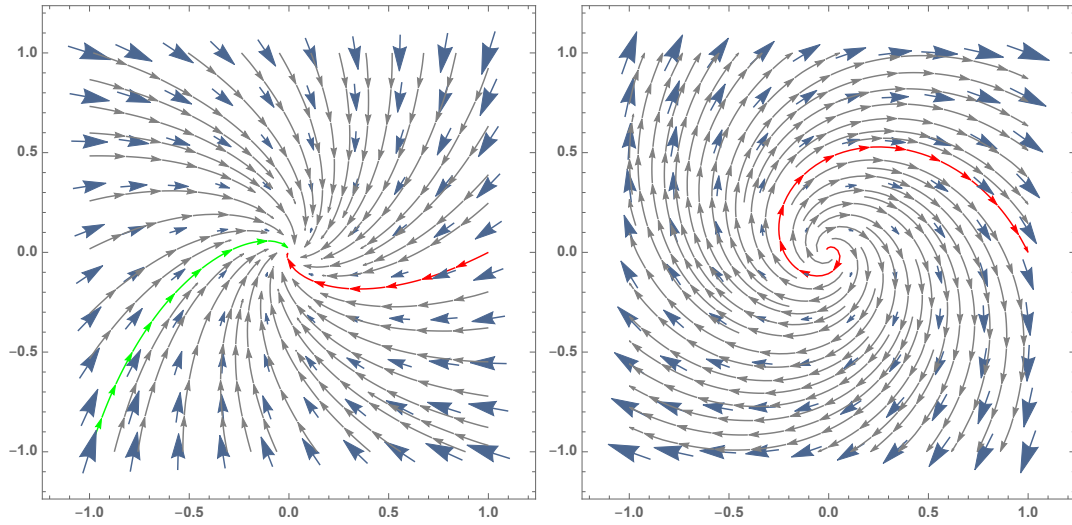
$$\exp(\Lambda) = \exp(\alpha I_n) \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \right) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Lauseen 2.15 nojalla alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \Lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on

$$\exp(t\Lambda)x_0 = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} e^{t\alpha}(\cos(\beta t)x_{01} + \sin(\beta t)x_{02}) \\ e^{t\alpha}(-\sin(\beta t)x_{01} + \cos(\beta t)x_{02}) \end{pmatrix}.$$



Kuva 2.2: Esimerkin 2.17 alkuarvotehtävien ratkaisuja, kun $\beta = \pi/3$ ja vasemmalla $\alpha = -2$ ja oikealla $\alpha = 1/2$.

2.5 Muuttujanvaihtolemma

Lemman 2.11 avulla voimme ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälön, jos tunnemme ratkaisun sen kerroinmatriisin jotain konjugaattia vastaavalle differentiaaliyhtälölle ja tunnemme konjugoivan matriisin.

Esimerkki 2.18. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lauseen 2.15 nojalla alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ratkaisu on $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y(t) = \exp(tA)y_0$. Matriisin $\exp(tA)$ määrittäminen suoraan määritelmästä vaikuttaa hankalalta.

Huomaamalla, että $tA = K \operatorname{diag}(2t, t)K^{-1}$ matriisilla $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Lemma 2.11 antaa helposti

$$\exp(tA) = K \exp(\operatorname{diag}(2t, t)) K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

joten

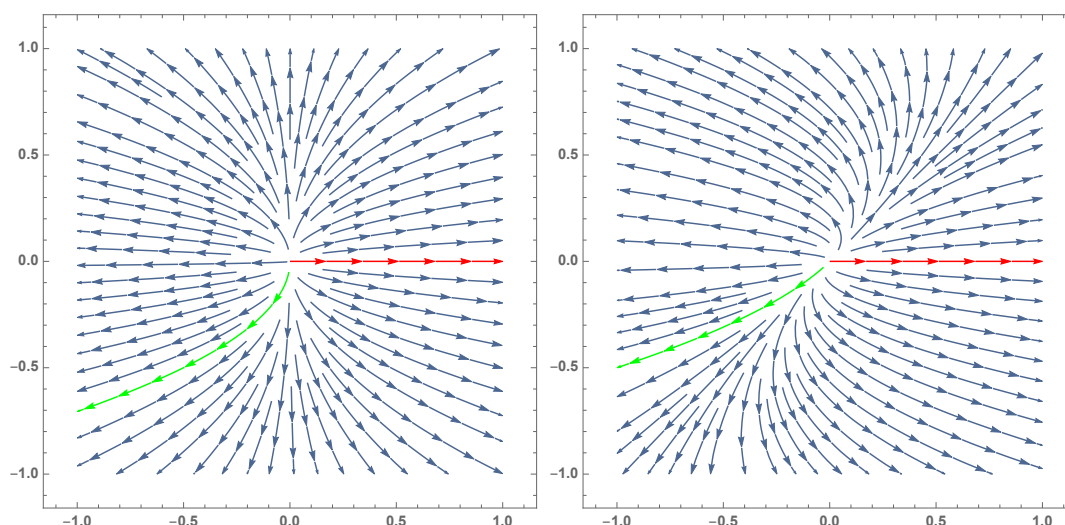
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} e^{2t}y_{01} + (e^t - e^{2t})y_{02} \\ e^t y_{02} \end{pmatrix}.$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{diag}(2t, t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

ratkaisut ovat Esimerkin 2.9(1) nojalla

$$x(t) = \exp(t \operatorname{diag}(2, 1))x_0 = \operatorname{diag}(e^{2t}, e^t)x_0 = \begin{pmatrix} e^{2t}x_{01} \\ e^t x_{01} \end{pmatrix}.$$



Kuva 2.3: Yhtälöiden (2.4) (vasemmalla) ja (2.3) (oikealla) ratkaisuja. Jälkimmäisen yhtälön punainen ja vihreä ratkaisu saadaan matriisin K avulla vastaavista ensimmäisen yhtälön ratkaisuista.

Seuraava tulos yleistää Esimerkin 2.18 ratkaisumenetelmän:

Propositio 2.19 (Muuttujanvaihtolemma). *Olkoot $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ siten, että C on kääntyvä ja $A = CBC^{-1}$. Tällöin x on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Bx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu, jos ja vain jos $y = Cx$ on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 = Cx_0 \end{cases}$ ratkaisu.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 2.15 ja Lemmasta 2.11. □

Muuttujanvaihtolemma voi todistaa myös huomaamalla, että ketjusäännön nojalla pätee

$$\dot{y} = C\dot{x} = CBx = CBC^{-1}y = Ay.$$

2.6 Ratkaisujen vektoriavaruus

Millä tahansa joukolla $X \neq \emptyset$ määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden joukko

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$$

muodostaa reaalisen vektoriavaruuden, kun funktioiden yhteenlasku määritellään pisteittäin asettamalla kaikille $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

kaikille $x \in X$ ja reaaliluvulla kertominen määritellään asettamalla kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kaikille $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

kaikille $x \in X$.

Seuraus 2.20. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Lineaarisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut muodostavat n -ulotteisen reaalisen vektoriavaruuden.

Todistus. Osoitetaan, että ratkaisut muodostavat funktioiden avaruuden lineaarisen aliavaruuden. Edellä olemme nähneet, että ratkaisujen joukko ei ole tyhjä. Olkoot x ja y ratkaisuja ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tällöin derivoinnin lineaarisuuden, ratkaisun määritelmän ja matriisilla kertomisen lineaarisuuden nojalla

$$\frac{d}{dt}(\lambda x + \mu y) = \lambda \dot{x} + \mu \dot{y} = \lambda Ax + \mu Ay = A(\lambda x + \mu y),$$

joten $\lambda x + \mu y$ on ratkaisu. Siis ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden.

Olkoot $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektoriavaruuden \mathbb{R}^n standardikantavektorit. Lauseen 2.15 mukaan kuvaukset $x_1 = e^{tA}\mathbf{e}_1, \dots, x_n = e^{tA}\mathbf{e}_n$ ovat tarkasteltavan lineaarisen homogeenisen yhtälön ratkaisuja. Ne ovat lineaarisesti riippumattomia sillä

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)(0) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i = 0$$

vain, jos $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Siis ratkaisujen avaruuden dimensio on vähintään n .

Olkoon x jokin ratkaisu. Tällöin

$$x(0) = \sum_{i=1}^n x(0)_i \mathbf{e}_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)(0).$$

Kuvaukset x ja $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ ovat alkuarvottehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = x(0) \end{cases}$ ratkaisuja, joten Lauseen 2.15 yksikäsitteisyystuloksen nojalla $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Siis differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen avaruus on n -ulotteinen. \square

Harjoitustehtäviä

2.1. Todista Propositio 2.5.

2.2. Todista Propositio 2.6.

2.3. Todista Propositio 2.8 käyttämällä normia $\|\cdot\|_1$ normin $\|\cdot\|_\infty$ sijaan.

2.4. Todista Lemma 2.13.

2.5. Todista Propositio 2.14.¹

2.6. Laske $\exp A$, kun (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.7. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Laske $\exp tA$, kun²

(a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

¹Osoita, että kuvaus $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $F(t) = \exp(tA)\exp(-tA)$, on vakio.

²Lemma 2.16 auttaa.

(b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2.8. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Määritä $\exp A$, $\exp B$ ja $\exp(A + B)$.

2.9. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Osoita, että $C^{-1}AC$ on diagonaalimatriisi.

(b) Määritä $\exp A$.

2.10. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Osoita, että $C^{-1}AC$ on diagonaalimatriisi.

(b) Ratkaise alkuarvot tehtävä $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (2, 3) \end{cases}$.

Liite B

Lineaarialgebraa

Tässä liitteessä palautamme mieleen lineaarialgebran kurseilla käsitellyä ominaisarvoihin ja diagonalisoitumiseen liittyvää teoriaa. Laajennamme käsittelyä kompleksisiin ominaisarvoihin ja kompleksisiin vektoriavaruuksiin.

B.1 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Jos A on reaalinen $n \times n$ -matriisi, niin vektori $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ on matriisin A **ominaisvektori ominaisarvolla** $\lambda \in \mathbb{R}$, jos $Av = \lambda v$.

Matriisin A reaalista ominaisarvoa λ vastaavat ominaisvektorit muodostavat nollavektorin kanssa **ominaisavaruuden**

$$E_\lambda = E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda I).$$

Ominaisavaruuden E_λ dimensio on ominaisarvon λ **geometrinen kertaluku**.

Matriisin A **karakteristinen polynomi**

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Ominaisvektori on siis nollasta poikkeava vektori matriisia $A - \lambda I$ standardikannassa vastaavan lineaarikuvauksen ytimessä. Tästä nähdään, että matriisin A reaaliset ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin reaaliset juuret. Kurseilla LAG1 ja LAG2 on tapana käsitellä ainoastaan reaalisia ominaisarvoja, mutta tällä kurssilla on luontevaa käsitellä myös karakteristisen polynomin kompleksisia juuria.

Jos A on reaalinen $n \times n$ -matriisi, ja $\lambda \in \mathbb{C}$ on karakteristisen polynomin χ_A juuri, niin λ on matriisin A **ominaisarvo**. Jos $\lambda \in \mathbb{R}$, niin se on **reaalinen ominaisarvo**, muuten se on **kompleksinen ominaisarvo**.

Matriisin A ominaisarvot muodostavat sen **spektrin** $\text{Sp}(A)$

Ominaisarvon kertaluku karakteristisen polynomin juurena on sen **algebraallinen kertaluku**.

Jos λ on reaalisen matriisin A ominaisarvo, niin myös sen kompleksikonjugaatti $\bar{\lambda}$ on ominaisarvo. Tämä on helppo nähdä, koska karakteristisen polynomin kertoimet ovat reaalisia.

Karakteristisen polynomin aste on n , joten Algebran peruslauseen¹ mukaan karakteristisella polynomilla on kertaluku huomioiden n juurta.

Esimerkki B.1. (1) Matriisin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ karakteristinen polynomi on

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

joten sillä on kompleksiset ominaisarvot i ja $-i$.

(2) Matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on yksi algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo 1. Ominaisarvon 1 geometrinen kertaluku on 1: Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä $Av = v$ kutistuu yhtälöksi $v_2 = 0$, joka määrää 1-ulotteisen aliavaruuden.

Lemma B.2. *Matriisin determinantti on sen ominaisarvojen tulo.*

Todistus. Jos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat matriisin $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ karakteristisen polynomin juuret siten, että k -kertainen juuri esiintyy luettelossa k kertaa, $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$. Erityisesti polynomin $\chi_A(\lambda)$ vakiotermin on $\prod_{i=1}^n \lambda_i$. Toisaalta matriisin $B_\lambda = A - \lambda I_n = (B_{ij})_{i,j=1}^n$ determinantin

$$\chi_A(\lambda) = \det B_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1)1} B_{\sigma(2)2} \cdots B_{\sigma(n)n}$$

termin $\varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1)1} B_{\sigma(2)2} \cdots B_{\sigma(n)n}$, jossa esiintyy kertoimia B_{ii} , muuttujan λ suhteen vakiotermin on $\varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n}$. Siis polynomin $\chi_A(\lambda)$ vakiotermin on

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det A. \quad \square$$

Esimerkki B.3. Jos A on 2×2 -matriisi, niin

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A.$$

B.2 Konjugointi ja diagonalisoituvuus

Matriisi A on **diagonalisoituva**, jos se on jonkin diagonaalimatriisin konjugaatti.

Jos $n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva, niin vektoriavaruudella \mathbb{R}^n on kanta, joka koostuu matriisin A ominaisvektoreista. Tässä tapauksessa ominaisavaruuksien dimensoiden summa on n . Lineaarialgebran kursseilla osoitetuista tuloksista saadaan suoraan:

Lemma B.4. *$n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva, jos ja vain jos sen ominaisarvojen geometrinen kertalukujen summa on n .* □

¹todistetaan esimerkiksi kompleksianalyysin kursseilla

Esimerkki B.5. Lineaarialgebran tulosten nojalla osoitetaan, että 2×2 -matriisi B on diagonalisoituvaa, jos sillä on kaksi eri (reaalista) ominaisarvoa. Toisaalta 2×2 -matriisi voi olla diagonalisoituvaa vaikka sillä olisi vain yksi ominaisarvo ($\lambda = \mu$ Esimerkissä 2.1) ja esimerkiksi matriisilla $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ei selvästi ole yhtään ominaisvektoria eikä siis yhtään reaalista ominaisarvoa, koska sitä standardikannassa vastaava lineaarikuvaus on kierto myötäpäivään kulman $\pi/2$ verran.

Lause B.6. Olkoot A ja B reaalisia $n \times n$ -matriiseja, joille pätee $A = CBC^{-1}$ jollain kääntyvällä reaalilla $n \times n$ -matriisilla C . Tällöin

- (1) matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot.
- (2) matriisia C vastaava lineaarikuvaus kuvaa matriisin B ominaisarvot bijektiivisesti matriisin A ominaisarvoiksi.
- (3) $\text{tr } A = \text{tr } B$.
- (4) $\det A = \det B$. □

B.3 Kompleksista lineaarialgebraa

Lineaarisen algebran ja geometrian kursseilla käsitellään yleensä ainoastaan reaalisia vektoriavaruuksia ja niiden lineaarikuvauksia. Lineaarialgebran teoria voidaan kuitenkin muotoilla yleisemmin korvaamalla aksioomissa esiintyvä reaalilukujen kunta \mathbb{R} millä tahansa kunnalla, esimerkiksi rationaaliluvuilla tai kompleksiluvuilla. Kompleksinen lineaarialgebra auttaa meitä ymmärtämään paremmin esimerkiksi neliömatriisien jakautumista konjugaattiluokkiin.

Kompleksisen vektoriavaruuden aksioomat ovat samat kuin reaaliosassa tapauksessa, mutta kaikki ominaisuudet, joissa reaaliosassa esiintyy \mathbb{R} vaaditaan kompleksiluvuille.

Olkoon $V \neq \emptyset$ joukko, jolla on laskutoimitus $+$ ja vakiolla kertominen $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, jotka toteuttavat ehdot

- (1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in V$
- (2) $(x + y) + v = x + (y + v)$ kaikilla $x, y, v \in V$
- (3) on $0 \in V$, jolle $0 + x = x$ kaikilla $x \in V$ ja
- (4) jokaisella $x \in V$ on $-x \in V$, jolle $x + (-x) = 0$.
- (5) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ kaikille $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $v, w \in V$,
- (6) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $v \in V$,
- (7) $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $v \in V$ ja
- (8) $1v = v$ kaikille $v \in V$,

niin V varustettuna tällä rakenteella on \mathbb{C} -vektoriavaruus.^a

^aMuistamme algebrasta, että $(V, +)$ on kommutatiivinen ryhmä ehtojen (1)–(4) nojalla.

Yleisten vektoriavaruuksien teoriaan voi tutustua esimerkiksi lähteen [Gre] ja monien algebran kirjojen kuten [Dur] avulla.

Esimerkki B.7. \mathbb{C}^n on kompleksinen vektoriavaruus, jonka (kompleksinen) dimensio on n : Standardikanta, joka koostuu vektoreista e_1, \dots, e_n , missä e_i on vektori, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on $1 \in \mathbb{C}$ paikalla i , on selvästi lineaarisesti riippumaton.

Kompleksisessa vektoriavaruudessa \mathbb{C}^n määritellään vektorien reaali- ja imaginaariosa ja kompleksikonjugaatti komponenteittain kuvauksina $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Jos $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, niin

$$\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n),$$

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$$

ja

$$\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Harjoitustehtäviä

B.1. Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja olkoon V sitä vastaava ominaisvektori. Osoita, että e^λ on matriisin $\exp A$ ominaisarvo ja että V on sitä vastaava ominaisvektori.

Luku 3

Tason lineaariset autonomiset alkuarvotekävät

Tässä luvussa osoitamme, että kaikki reaaliset 2×2 -matriisit voidaan konjugoida reaalilla kääntyvällä matriisilla yhteen kolmesta perusmuodosta. Tarkastelemme tason lineaaristen autonomisten alkuarvotekävien ratkaisuja näiden perusmuotojen ja muuttujanvaihtolemmän avulla.

3.1 2×2 -matriisien luokittelu

Toisen asteen polynomin juurten kaava antaa nopean tavan selvittää 2×2 -matriisin ominaisarvot ja niiden laadut:

Propositio 3.1. *Olkoon A reaalinen 2×2 -matriisi.*

- (1) *Jos $\det A < 0$, niin matriisilla A on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo.*
- (2) *Jos $\det A > 0$ ja $\operatorname{tr}^2 A \geq 4 \det A$, niin matriisilla A on joko kaksi positiivista tai kaksi negatiivista ominaisarvoa.*
- (3) *Jos $\det A > 0$ ja $\operatorname{tr}^2 A < 4 \det A$, niin matriisilla A on kaksi kompleksista ominaisarvoa, jotka ovat toistensa liittolukuja.*
- (4) *Jos $\det A = 0$, niin ainakin toinen ominaisarvo on 0. Tällöin mahdollinen nollasta poikkeava ominaisarvo on reaalinen.*

Todistus. Lemman B.2 nojalla ominaisarvojen tulo on $\det A$. Jos ominaisarvot eivät ole reaalisia, niin ne ovat toistensa kompleksikonjugaatteja ja niiden tulo on siis positiivinen. Muut väitteet seuraavat helposti Esimerkin B.3 ja toisen asteen polynomin ratkaisukaavan avulla. \square

Seuraava tulos antaa jokaiselle reaalille 2×2 -matriisille perusmuodon, joka on kyseisen matriisin konjugaatti.

Lause 3.2 (2-ulotteinen konjugointilause). *Olkoon A reaalinen 2×2 -matriisi. Tällöin on kääntyvä reaalinen 2×2 -matriisi C , jolle matriisi CAC^{-1} on*

- (1) *diagonaalimatriisi, jos matriisilla A on kaksi eri reaalista ominaisarvoa tai yksi geometrisesti kaksinkertainen reaalinen ominaisarvo,*
- (2) *muotoa $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, jos matriisilla A on yksi geometrisesti yksinkertainen reaalinen ominaisarvo λ ja*
- (3) *vinosymmetrinen muotoa $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, jos matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja.*
Tällöin matriisin A kompleksiset ominaisarvot ovat $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Todistus. (1) Jos matriisilla A on kaksi eri reaalista ominaisarvoa, diagonalisoituvuus on todistettu kurssilla LAG2. Tapaus, jossa matriisilla A on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo on selvä: Kaikille vektoreille $v \in \mathbb{R}^2$ pätee $Av = \lambda v$ samalla $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis matriisi A on diagonaalinen.

(2) Oletetaan, että matriisilla A on algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jonka geometrinen kertaluku on 1. Olkoon u jokin ominaisvektori, jolle siis pätee $Au = \lambda u$. Olkoon $v \in \mathbb{R}^2$ mikä tahansa vektori siten, että u ja v virittävät koko tason \mathbb{R}^2 . Tällöin $Av = \mu u + \nu v$ jollekin $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Jos olisi $\nu \neq \lambda$, niin

$$A(\mu u + (\nu - \lambda)v) = \lambda\mu u + (\nu - \lambda)(\mu u + \nu v) = \nu(\mu u + (\nu - \lambda)v),$$

joten $\nu \neq \lambda$ olisi ominaisarvo vastoin oletusta. Siispä $Av = \mu u + \lambda v$. Valitaan kannaksi u ja $w = v/\mu$. Tällöin $Au = \lambda u$ ja

$$Aw = \mu u/\mu + \lambda v/\mu = u + \lambda w,$$

joten matriisi on tässä kannassa haluttua muotoa.

(3) Oletetaan, että matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin sillä on kaksi kompleksista ominaisarvoa $\alpha \pm i\beta$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\beta \neq 0$. Ajatellaan A kompleksisena matriisina. Tällöin ominaisarvoa $\alpha + i\beta$ vastaa jokin ominaisvektori $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Havaitaan ensin, että $\operatorname{Re} u$ ja $\operatorname{Im} u$ ovat lineaarisesti riippumattomia reaalisesa vektoriavaruudessa \mathbb{R}^2 : Oletetaan, että $\operatorname{Im} u \neq 0$. Jos vektorit $\operatorname{Re} u$ ja $\operatorname{Im} u$ olisivat lineaarisesti riippuvia, niin $\operatorname{Re} u = c \operatorname{Im} u$ jollain $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$(c + i)A \operatorname{Im} u = A((c + i) \operatorname{Im} u) = A(u) = (\alpha + i\beta)u = (\alpha + i\beta)(c + i) \operatorname{Im} u,$$

joten

$$A \operatorname{Im} u = (\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u.$$

Tämä on mahdotonta, sillä $A \operatorname{Im} u$ on reaalinen vektori, kun taas $(\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u$ ei ole. Tapaus $\operatorname{Re} u \neq 0$ käsitellään vastaavalla tavalla.

Kirjoitetaan vektori Au kahdella tavalla reaali- ja imaginaariosien summaksi: Lineaarisuuden nojalla saamme

$$Au = A(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = A(\operatorname{Re} u) + iA(\operatorname{Im} u),$$

missä $A(\operatorname{Re} u)$ ja $A(\operatorname{Im} u)$ ovat reaalisia vektoreita. Toisaalta, koska u on ominaisvektori, pätee

$$Au = (\alpha + i\beta)(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u + i(\beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u).$$

Vertaamalla reaali- ja imaginaariosia saadaan

$$A \operatorname{Re} u = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u$$

ja

$$A \operatorname{Im} u = \beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u.$$

Tämä osoittaa, että avaruuden \mathbb{R}^2 kannassa, jonka muodostavat vektorit $v_1 = \operatorname{Re} u$ ja $v_2 = \operatorname{Im} u$, matriisia A vastaava lineaarikuvaus käyttäytyy halutulla tavalla.

Valitaan kannanvaihtomatriisiksi C matriisi, jonka sarakkeet ovat vektorien v_1 ja v_2 komponentit. Tällöin C on reaalinen ja se on kääntyvä koska edellä totesimme, että sen sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomat. Lisäksi pätee

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_1 = C^{-1}(\alpha v_1 - \beta v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

ja

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_2 = C^{-1}(\beta v_1 + \alpha v_2) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Lause 3.2 on nyt todistettu. □

3.2 Esimerkki muuttujanvaihtolemmän käytöstä

Muuttujanvaihtolemmän avulla voimme ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälön, jos tunnemme ratkaisun sen kerroinmatriisin jostain konjugaattia vastaavalle differentiaaliyhtälölle.

Esimerkki 3.3. Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2 ja -2 . Sen ominaisavaruuksia saadaan ratkaisemalla yhtälöparit $Av = 2v$ ja $Av = -2v$, jotka antavat vastaaville ominaisavaruuksille yhtälöt $v_1 = 3v_2$ ja $v_1 = -v_2$. Matriisi A voidaan diagonalisoida esimerkiksi matriisilla

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jonka sarakkeet $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ovat ominaisvektoreita. Matriisille $B = C^{-1}AC$ pätee

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Aw_1 = C^{-1}2w_1 = 2C^{-1}w_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ja vastaavasti

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx, \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.2)$$

ratkaisu tunnetaan, se on $x_{(a,b)}(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{-2t} \end{pmatrix}$. Ratkaisun luonne on melko helppo selvittää:

Matriisin B ominaisvarauudet $\mathbb{R} \times \{0\}$ ja $\{0\} \times \mathbb{R}$ ovat erityisasemassa:

(1) Kaikille $(a, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ pätee $x_{(a,0)}(t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

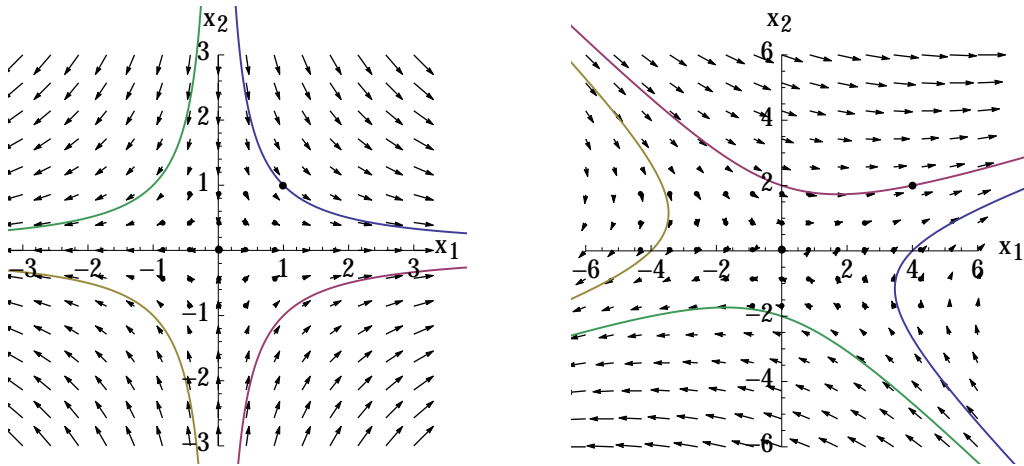
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{(a,0)}(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_{(a,0)}(t) = 0.$$

(2) Kaikille $(0, b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ pätee $x_{(0,b)}(t) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x_{(0,b)}(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_{(0,b)}(t) = 0.$$

(3) Kaikille $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - ((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}))$ pätee

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x_{(a,b)}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{(a,b)}(t)\| = \infty.$$



Kuva 3.1: Kaksi satulaa

Proposition 2.19 mukaan, jos $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, niin

$$y_{(a',b')}(t) = Cx_{(a,b)}(t) = \begin{pmatrix} 3ae^{2t} + be^{-2t} \\ ae^{2t} - be^{-2t} \end{pmatrix}$$

on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay, \\ y(0) = C \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.3)$$

ratkaisu.

Muuttujanvaihtomatriisi C kuvaa suoran $\mathbb{R} \times \{0\}$ matriisiin A ominaisavaruudeksi, joka on vektorin w_1 virittämä aliavaruus $\langle w_1 \rangle$ ja suoran $\{0\} \times \mathbb{R}$ matriisiin A ominaisavaruudeksi $\langle w_2 \rangle$. Alkuarvotehtävän (3.2) ratkaisujen ominaisuuksista seuraa, että kaikille $v \in \langle w_1 \rangle$ pätee $y_v(t) \in \langle w_1 \rangle$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_v(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_v(t) = 0,$$

koska $y_v(t) = Cx_{C^{-1}v}(t)$ ja $C^{-1}v \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Samalla päättelyllä nähdään, että kaikille $v \in \langle w_2 \rangle$ pätee $y_v(t) \in \langle w_2 \rangle$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|y_v(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = 0$$

ja että kaikille $v \in \mathbb{R}^2 - (\langle w_1 \rangle \cup \langle w_2 \rangle)$ pätee $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_v(t)\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \|y_v(t)\| = \infty$.

3.3 Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit

Ratkaisemme nyt tason lineaariset differentiaaliyhtälöt $\dot{x} = Ax$ kaikissa konjugointilauseen 3.2 antamissa perustilanteissa. Näiden ratkaisujen ja Proposition 2.19 avulla voidaan ratkaista kaikki 2-ulotteiset lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt. Seuraavassa A on siis reaalinen 2×2 -matriisi:

Matriisi A on diagonalisoituva.

(1) Jos matriisilla A on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo, ratkaisut käyttäytyvät kuten esimerkissä 3.3.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **satulaksi**.

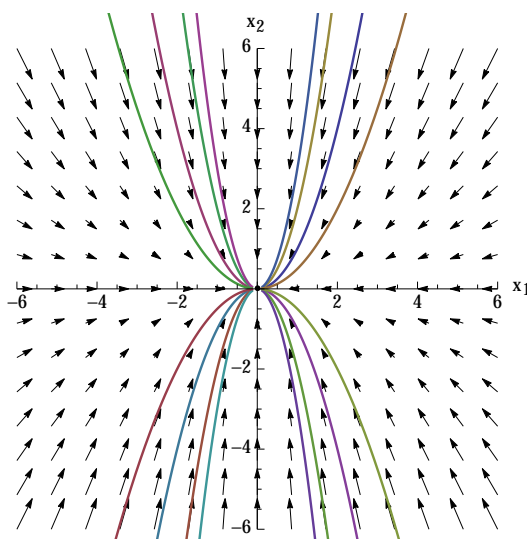
(2) Jos matriisilla A on kaksi negatiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisut saadaan samalla tavalla kuin esimerkissä 3.3. Ratkaisujen käyttäytyminen on kuitenkin erilaista: A on konjugaatti diagonaalimatriisiin $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ kanssa. Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisut alkuarvoilla, jotka ovat koordinaattiakseleilla, lähestyvät origoa eksponentiaalisesti akselia pitkin, kun $t \rightarrow \infty$. Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät myös origoa, mutta kuvan mukaisia käyriä pitkin.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **nieluksi**.

(3) Jos matriisilla A on kaksi positiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisukäyrät ovat kuten nielulla, mutta ratkaisut liikkuvat vastakkaiseen suuntaan.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **lähteeksi**.

Kuva on samanlainen kuin nielun tapauksessa mutta vektorikenttä osoittaa jokaisessa pisteessä vastakkaiseen suuntaan ja ratkaisut liikkuvat käyrillä päinvastaiseen suuntaan kuin nielun tapauksessa.



Kuva 3.2: Nielu

(4) Jos 0 on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo, niin kaikki ratkaisut ovat vakio-
kuvauksia. Jos 0 geometrisesti ja algebrallisesti yksinkertainen, on helppo tarkastaa, että
kaikki ratkaisut ovat pysty- tai vaakasuorien parametrisointeja.

Jos matriisi A on diagonaalinen, on helppo tarkastaa, että jokaisella koordinaattiak-
selien ulkopuolisella alkuarvolla $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ saatavat differentiaaliyhtälön radat ovat
yhtälön

$$\left(\frac{x_1(t)}{x_{01}(t)} \right)^{\lambda_2} = \left(\frac{x_2(t)}{x_{02}(t)} \right)^{\lambda_1} \quad (3.4)$$

ratkaisukäyrän komponentteja joukossa $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Huomaa, että ratkaisukäyrät ovat sä-
teitä, kun matriisilla A on yksi geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda_1 = \lambda_2$. Ylei-
sessä tapauksessa radat saadaan kuvaamalla yhtälön (3.4) antama käyrä Proposition 2.19
antamalla lineaarisella muuttujanvaihdoilla.

Matriisi A on konjugaatti matriisiin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ kanssa. Harjoitustehtävässä 1.7 tarkas-
timme, että kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

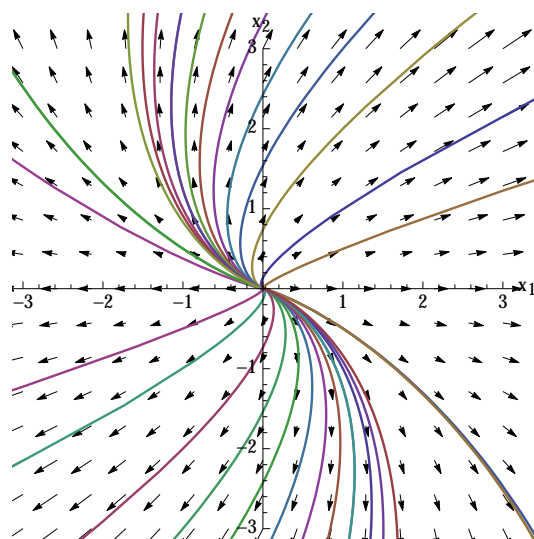
$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

Jos matriisilla A on yksi ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jonka algebrallinen kertaluku on yksi
ja geometrinen kertaluku on kaksi, niin Lauseen 3.2 nojalla A on matriisiin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ kon-
jugaatti ja differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut saadaan Proposition 2.19 ja ratkaisun
(3.5) avulla.



Kuva 3.3: Surkastunut lähde

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan **surkastuneeksi nieluksi**, jos $\lambda < 0$ ja **surkastuneeksi lähteeksi**, jos $\lambda > 0$.

Matriisi A on konjugaatti vinosymmetrisen matriisin $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ kanssa. Lauseen 3.2 mukaan kaikki reaaliset 2×2 -matriisit, jotka eivät ole diagonalisoituvia tai matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ konjugaatteja jollain $\lambda \in \mathbb{R}$, ovat vinosymmetrisen matriisin $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ konjugaatteja joillain $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Matriisin A ja kaikkien sen kanssa konjugaattien matriisien ominaisarvot ovat $\alpha \pm i\beta$. Esimerkin 2.17 nojalla kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\alpha t} \left(a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \right)$$

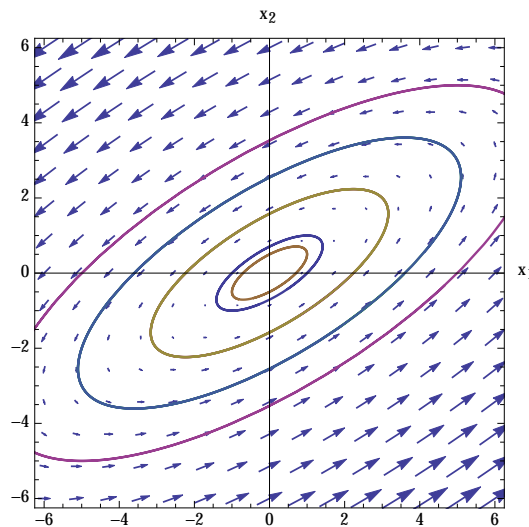
on alkuarvottehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$, ratkaisu. Ratkaisun käyttäytyminen riippuu ominaisarvon reaali- ja imaginaariosan merkeistä:

(1) Jos $\alpha = 0$, niin ratkaisu on muotoa

$$x(t) = a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Tämä kuvaus parametrizoi origokeskisen ympyrän, jonka säde on $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ratkaisun kiertosuunta ympyrällä määräytyy parametrin β merkistä. Yleisessä tilanteessa ratkaisut parametrizovat ellipsin, joka saadaan kuvaamalla tämä ympyrä kannanvaihtokuvauksella. Kiertosuunta riippuu parametrin β merkistä ja kannanvaihtokuvauksen determinantista.

Tässä tapauksessa origo on **keskus**.



Kuva 3.4: Keskus

(2) Jos $\alpha < 0$, niin kerroin $0 < e^{\alpha t} < 1$ aiheuttaa sen, että ratkaisu lähestyy origoa, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja lähestyy sitä eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$. Vastaavasti $\|x(t)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow -\infty$.

Tässä tapauksessa origo on **spiraalinielu**.

(3) Jos $\alpha > 0$, niin kerroin $e^{\alpha t} > 1$ aiheuttaa sen, että ratkaisun normi kasvaa rajatta, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja etäännyy siitä eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$ ja suppenee origoon, kun $t \rightarrow -\infty$.

Tässä tapauksessa origo on **spiraalilähde**.

3.4 Parametrisoituja perheitä

Usein differentiaaliyhtälö on osa **parametrisoitua perhettä** $\dot{x} = f_\alpha(x)$, missä $\alpha \in A$ ja $A \neq \emptyset$ on perheen **parametriavaruus**. Tällöin joukkoa U_α , jossa vektorikenttä f_α on määritetty, kutsutaan usein esimerkiksi **faasiavaruudeksi**. Differentiaaliyhtälön ratkaisut voivat käyttäytyä eri tavalla eri parametrien arvoilla kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 3.4 (Vaimeneva värähtelijä). Esimerkissä 1.2 tarkastelimme harmonista värähtelijää, joka kuvaa ideaalisen jousen liikettä 1-ulotteisessa avaruudessa. Oletetaan nyt, että tarkasteltava paino liikkuu pinnalla, jossa siihen vaikuttaa nopeuteen verrannollinen kitka $-b\dot{x}$, missä $b > 0$.

Saadetaan systeemi, jota kutsutaan **vaimenevaksi värähtelijäksi**.

Jos $b = 0$, kyseessä on harmoninen värähtelijä. Systemin aikakehitystä kuvaa toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Valitsemalla $y_1 = x$ ja $y_2 = \dot{x}$ saadaan ekvivalentti lineaarinen yhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2, \end{cases} \quad (3.6)$$

jonka kerroinmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix},$$

matriisimerkinnällä siis

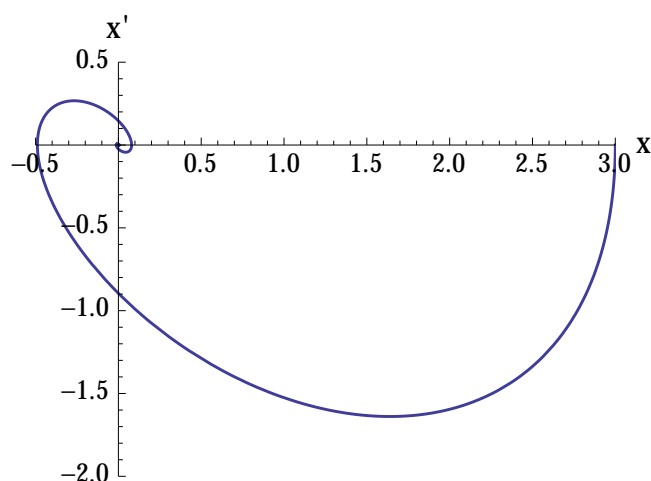
$$\dot{y} = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} y.$$

Tämän yhtälön ratkaisun tyyppi riippuu parametreista m , k ja b . Matriisin A determinantti k/m on aina positiivinen ja sen ominaisarvot ovat

$$\lambda_{\pm} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

- Jos $b^2 < 4km$, niin matriisilla A on kaksi kompleksista ominaisarvoa, joiden reaaliosa on negatiivinen, joten ratkaisu on spiraalinielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$, $\dot{x}(0) = 0$, niin se värähtelee tasapainopisteen ympärillä äärettömän monta kertaa.

Tilannetta, jossa $b^2 < 4km$ kutsutaan **alivaimennetuksi** värähtelijäksi.



Kuva 3.5: Alivaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = b = 1$.

- jos $b^2 = 4km$, niin matriisilla A on yksi kaksinkertainen negatiivinen ominaisarvo, joten ratkaisu on surkastunut nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$,

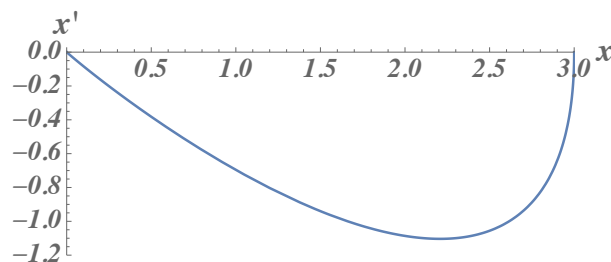
$\dot{x}(0) = 0$, niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä $x = 0$ kertaakaan. Ratkaisujen tangentit lähestyvät 1-ulotteisen ominaisavaruuden

$$E_{-\frac{b}{2m}} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -\frac{b}{2m}y_1 \right\}$$

suuntaa kun $t \rightarrow +\infty$.

Tilannetta, jossa $b^2 = 4km$ kutsutaan **kriittisesti vaimennetuksi** värähtelijäksi.

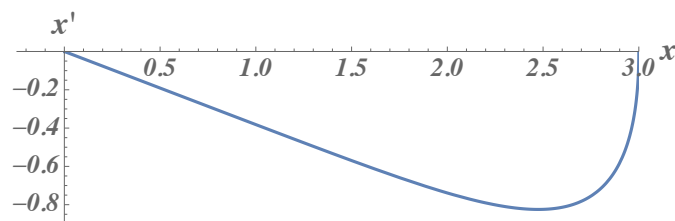
Tällainen tilanne on epävakaata parametrien suhteen: pienikin muutos parametreissa voi muuttaa värähtelijän luonnetta, kun yhtälö muuttuu epäyhtälöksi.



Kuva 3.6: Kriittisesti vaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = 1$, $b = 2$. Näillä parametreilla origo on surkastunut nielu.

- jos $b^2 > 4km$, niin matriisilla A on kaksi eri negatiivista ominaisarvoa, joten ratkaisu on nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$, $\dot{x}(0) = 0$, niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä $x = 0$ kertaakaan.

Tilannetta, jossa $b^2 > 4km$ kutsutaan **ylivaimennetuksi** värähtelijäksi.



Kuva 3.7: Ylivaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = 1$, $b = 3$. Näillä parametreilla origo on nielu.

Harjoitustehtäviä

Tehtävät 3.1– 3.5: Miten differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut käyttäytyvät? Havainnollista kuvalla.

3.1. $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

3.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$

3.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$

3.6. Olkoon

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ tyyppi kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Kuvaile, mitä tapahtuu niissä parametriavaruuden \mathbb{R} pisteissä, joissa tyyppi vaihtuu. Havainnollista kuvilla.

3.7. Miten alkuarvottehtävän (3.6) ratkaisut käyttäytyvät, jos $b < 0$ ja $m, k > 0$?

Luku 4

Lineaariset autonomiset alkuarvotekävät korkeammissa ulottuvuuksissa

Tässä luvussa yleistämme luvun 3 tarkastelun korkeampiin ulottuvuuksiin. Tutustumme Jordanin kanoniseen muotoon, jollaiseen jokainen neliömatriisi voidaan konjugoida. Jordanin kanonisen muoto ja muuttujanvaihtolemma auttavat lineaarisen autonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisujen luonteen selvittämisessä.

4.1 Yleistetty ominaisavaruus

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Jos lineaarisesti riippumattomat vektorit $v_1, \dots, v_K \in \mathbb{K}^n$ toteuttavat

- (1) $(A - \lambda I)v_1 = 0$,
- (2) $(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}$ kaikilla $j = 2, \dots, n$ ja
- (3) yhtälöllä $(A - \lambda I)x = v_n$ ei ole ratkaisua,

niin ne muodostavat **Jordanin^a ketjun**.

^aCamille Jordan, eri kuin Gaussin ja Jordanin menetelmää kehittänyt Wilhelm Jordan.

Jordanin ketjun määritelmän ehto (1) on, että v_1 on matriisin A ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori ja ehto (3) on, että v_n ei ole matriisia $A - \lambda$ vastaavan lineaarikuvauksen kuvassa.

Propositio 4.1. *Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ matriisin A ominaisarvo. Oletetaan, että vektorit v_1, \dots, v_n muodostavat Jordanin ketjun matriisille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja ominaisarvolle λ .*

- (1) *Joukko $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarisesti riippumaton.*

(2) Olkoon $K = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)$. Tällöin

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 4.2. Kolmiomatriisin determinantti on sen diagonaalialkioiden tulo, joten karakteristisen polynomin avulla näemme heti, että yläkolmiomatriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainoa ominaisarvo on 1. Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä koostuu kahdesta yhtälöstä

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

joten esimerkiksi vektorit $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ ja $w_1 = (0, 1, 1, 0)$ virittävät 2-ulotteisen ominaisavaruuden E_1 . Ominaisarvon 1 algebrallinen kertaluku on 4 ja sen geometrinen kertaluku on 2.

Selvitetään ainoaa ominaisarvoa 1 vastaavan yleistetyn ominaisavaruuden rakenne tarkemmin: Yhtälöllä $(A - I_4)x = v_1$ on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, joka on lineaarisesti riippumaton vektorin v_1 kanssa. Sen sijaan yhtälöllä $(A - I_4)x = v_2$ ei ole ratkaisua. Vastaavasti yhtälöllä $(A - I_4)x = w_1$ on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin $w_2 = (0, 0, 0, 1)$, joka on lineaarisesti riippumaton vektorin w_1 kanssa. Yhtälöllä $(A - I_4)x = w_2$ ei ole ratkaisua. Vektorit v_1, v_2 ja w_1, w_2 muodostavat kaksi Jordanin ketjua ominaisarvolle 1: $(A - I_4)v_2 = v_1$, $Av_1 = v_1$ ja $(A - I_4)w_2 = w_1$, $Aw_1 = w_1$.

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Jos $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, λ on sen ominaisarvo ja k on luonnollinen luku, $k \geq 1$, niin vektorialiavaruus

$$E_\lambda^k(A) = \ker(A - \lambda)^k$$

on ominaisarvoa λ vastaava **kertaluvun k yleistetty ominaisavaruus**. Aliavaruus

$$\widehat{E}_\lambda(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_\lambda^k(A)$$

on ominaisarvoa λ vastaava **yleistetty ominaisavaruus**.

Jos $F: X \rightarrow X$ on kuvaus, niin osajoukko $Y \subset X$ on **F -invariantti**, jos $F(Y) \subset Y$.

Propositio 4.3. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ on sen ominaisarvo. Yleistetty ominaisvaruus $\widehat{E}_\lambda(A)$ on A -invariantti¹ aliavaruus.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 4.4. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon $\lambda \in \mathbb{K}$ on sen ominaisarvo. Jos vektorit v_1, \dots, v_k muodostavat Jordanin ketjun matriisille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja sen ominaisarvolle λ , niin $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ on yleistetyn ominaisvaruuden $\widehat{E}_\lambda(A)$ aliavaruus.

Todistus. Määritelmän nojalla

$$(A - \lambda I)^\ell v_\ell = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{\ell-1} v_\ell = (A - \lambda I)v_1 = 0,$$

joten $v_\ell \in \widehat{E}_\lambda(A)$ kaikilla $1 \leq \ell \leq k$. Koska $\widehat{E}_\lambda(A)$ on Proposition 4.3 nojalla aliavaruus, saadaan $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \widehat{E}_\lambda(A)$. □

4.2 Blokkidiagonaalimatriisit

Jos matriisi A on kirjoitettu alimatriisien B_{ij} avulla muodossa

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nm} \end{pmatrix},$$

niin A on **blokkimatriisi**.

Jos B_1, \dots, B_N ovat $n_1 \times n_1, \dots, n_N \times n_N$ -neliomatriiseja ja $\sum_{i=1}^N n_i = n$, niin matriiseista B_1, \dots, B_N muodostettu $n \times n$ -matriisi

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_N) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & B_N \end{pmatrix},$$

jossa loput $n^2 - \sum_{i=1}^N n_i^2$ kerrointa ovat nollia, on **blokkidiagonaalimatriisi**, jonka blokkeja ovat matriisit B_i . Blokin B_i **koko** on n_i .

Esimerkki 4.5. Esimerkin 4.2 matriisia A vastaavalla lineaarikuvauksella on kaksi invarianttia 2-ulotteista aliavaruutta $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ ja $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Lineaarikuvauksen $L|_V$ matriisi kannan v_1, v_2 ja lineaarikuvauksen $L|_W$ matriisi kannan w_1, w_2 suhteen on sama matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Asetetaan

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Siis invariantti lineaarikuvauksella $x \mapsto Ax$.

Tällöin

$$B = CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Lemma 4.6. $\exp \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N) = \text{diag}(\exp B_1, \exp B_2, \dots, \exp B_N)$.

Todistus. On helppo tarkastaa, että $\text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)^k = \text{diag}(B_1^k, B_2^k, \dots, B_N^k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, mistä väite seuraa. \square

Esimerkki 4.7. Olkoot A ja B ja C kuten Esimerkeissä 4.2 ja 4.5. Alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$$

ratkaisu on Lauseen 2.15 ja Lemman 4.5 nojalla $x(t) = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}$. Differentiaaliyhtälön

$\dot{y} = Ay$ ratkaisut ovat Proposition 2.19 nojalla funktiot $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$y(t) = Cx(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b + c + dt \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu toteuttaa ehdon $y(0) = (a, b + c, c, d)$, mikä pitää ottaa huomioon alkuarvot tehtävää ratkaistaessa.

4.3 Jordanin kanoninen muoto

Blokkidiagonaalimatriisi on (reaalinen) **Jordanin kanoninen muoto**, jos jokainen blokki on joko muotoa

$$(\lambda_i) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

jollain $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tai muotoa

$$C_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_{\lambda_i} & I_2 & & & \\ & C_{\lambda_i} & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & C_{\lambda_i} \end{pmatrix}$$

jollain $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Lause 4.8 (Jordanin hajotelma). *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ matriisin A reaaliset ja $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_M, \bar{\lambda}_M$ sen kompleksiset ominaisarvot. Tällöin*

(1) *Vektoriavaruudella \mathbb{C}^n on yleistetyistä ominaisvektoreista koostuva kanta*

$$v_1, \dots, v_k, w_1, \bar{w}_1, \dots, w_m, \bar{w}_m \in \mathbb{C}^n$$

jossa vektorit v_1, \dots, v_k ovat reaalisia ja vektorit w_1, \dots, w_m eivät ole reaalisia.

(2) *Olkoon*

$$K = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \text{Re } w_1 & \text{Im } w_1 & \cdots & \text{Re } w_m & \text{Im } w_m \end{pmatrix}.$$

Tällöin $K^{-1}AK$ on reaalin Jordanin kanonisen muoto.

(2) *Olkoot a_i ja g_i ominaisarvon λ_i algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Reaalista ominaisarvoa λ_i vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on a_i . Kompleksista ominaisarvoparia $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on $2a_i$.*

Todistus. Katso [HJ, Thm. 3.4.5]. □

Jordanin kanonisen muodon ja Proposition 2.19 avulla moniulotteiset tapaukset voidaan palauttaa helpommin käsiteltävään muotoon.

Esimerkki 4.9. *Olkoon A reaalin 3×3 -matriisi, jolla on yksi kompleksinen ominaisarvopari $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i$ ja yksi reaalin ominaisarvo -1 . Tällöin A on Lauseen 4.8 mukaan matriisin*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

konjugaatti. Matriisia B vastaava differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Bx$ on helppo ratkaista, koska ensimmäiset kaksi koordinaattia muodostavat oman 2-ulotteisen systeeminsä: Kuvaus

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

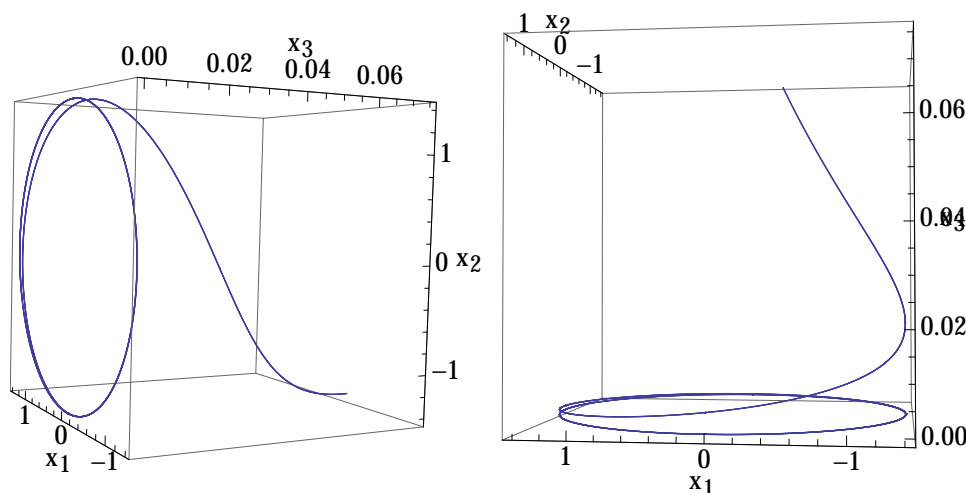
Jos $c = 0$, niin ratkaisu pysyy x_1x_2 -tasossa ja on $\sqrt{a^2 + b^2}$ -säteisen ympyrän parametrisointi kuten esimerkissä 1.2. Jos taas $a = b = 0$, niin ratkaisu pysyy x_3 -akselilla ja lähestyy origoa eksponentiaalisella vauhdilla. Yleisen tilanteen ratkaisukäyrä kulkee sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}$$

ja kasautuu kohti x_1x_2 -tason ympyrää

$$\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}.$$

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan Proposition 2.19 avulla. Jos $A = CBC^{-1}$ ja x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu, niin $y = Cx$ on differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisu. Jos alkuarvo on tasossa $T = C(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, jonka virittävät kompleksia ominaisarvoja vastaavien ominaisvektorien reaali- ja imaginaariosista muodostetut vektorit, niin rata on tasoon T sisältyvä ellipsi, muussa tapauksessa radat kasautuvat kohti tällaisia ellipsejä tason T komplementista.



Kuva 4.1: Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisusta alkuarvolla $x(0) = (1, 1, 1)$, kun B on kaavan (4.1) matriisi.

Kun lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö $\dot{y} = Ay$ konjugoidaan muotoon $\dot{x} = Bx$, missä $B = C^{-1}AC$ on Jordanin kanonisessa muodossa, niin alkuperäinen differentiaaliyhtälö korvataan ekvivalentilla yhtälöllä, jonka ratkaiseminen on helppoa: Jos $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_M)$, niin differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu saadaan yhdistämällä kutakin blokkia vastaavien differentiaaliyhtälöiden $\dot{x}^{(j)} = B_j x^{(j)}$ ratkaisut $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$. Jos B_j on reaalista ominaisarvoa vastaava 1×1 -blokki tai kompleksista ominaisarvoa vastaava 2×2 -blokki, niin ratkaisu $x^{(j)}$ tiedetään aiemman perusteella.

Propositio 4.10. (1) Reaalista ominaisarvoa λ vastaavalle $n \times n$ -blokille pätee

$$\exp t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Kompleksista ominaisarvoa $\lambda = \alpha + i\beta$ vastaavalle $2n \times 2n$ -blokille pätee

$$\exp t \begin{pmatrix} \Lambda_\lambda & I_2 & & & \\ & \Lambda_\lambda & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda_\lambda \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R_\lambda & R_\lambda t & R_\lambda t^2/2 & \dots & R_\lambda t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & R_\lambda & R_\lambda t & \dots & R_\lambda t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & R_\lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & R_\lambda t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_\lambda \end{pmatrix},$$

kun

$$\Lambda_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Todistus. (1)²Olkoon $E^{ab} = (\delta_{ai}\delta_{bj})_{i,j=1}^n$ on matriisi, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on kohdassa ab . Näemme, että

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + N,$$

missä $N = \sum_{k=1}^{n-1} E^{k,k+1}$. Väite seuraa induktiolla tämän esityksen ja Lemman 2.16 nojalla. Yksityiskohdat jäävät harjoitustehtäväksi.

(2) Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 4.11 (Kytkeyt harmoniset värähtelijät). Olkoot $k, K > 0$. Olkoot kaksi yksikkömassaista kappaletta kitkattomalla tasolla kytketty kuten kuvassa vastakkaisiin seiniin ja toisiinsa jousilla siten, että kappaleen seinään kytkävän jousen jousivakio on $k > 0$ ja kappaleet toisiinsa kytkävän jousen jousivakio on $K > 0$. Olkoon x_1 vasemman kappaleen poikkeama systeemin tasapainotilasta oikealle ja olkoon x_2 oikean kappaleen poikkeama systeemin tasapainotilasta oikealle. Olkoon $x_3 = \dot{x}_1$ ja $x_4 = \dot{x}_2$. Tämän systeemin liikettä kuvaa lineaarinen differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k+K) & K & 0 & 0 \\ K & -(k+K) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriisin A karakteristinen polynomi on $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 + 2(k+K)\lambda^2 + k(k+2K)$ ja sen ominaisarvot ovat $\pm i\sqrt{k}$ ja $\pm i\sqrt{k+2K}$. Vastaavat kompleksiset ominaisvektorit ovat $(\mp \frac{i}{\sqrt{k}}, \mp \frac{i}{\sqrt{k}}, 1, 1)$ ja $(\mp \frac{i}{\sqrt{k+2K}}, \pm \frac{i}{\sqrt{k+2K}}, 1, -1)$. Lauseen 4.8 nojalla kannanvaihto matriisilla

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

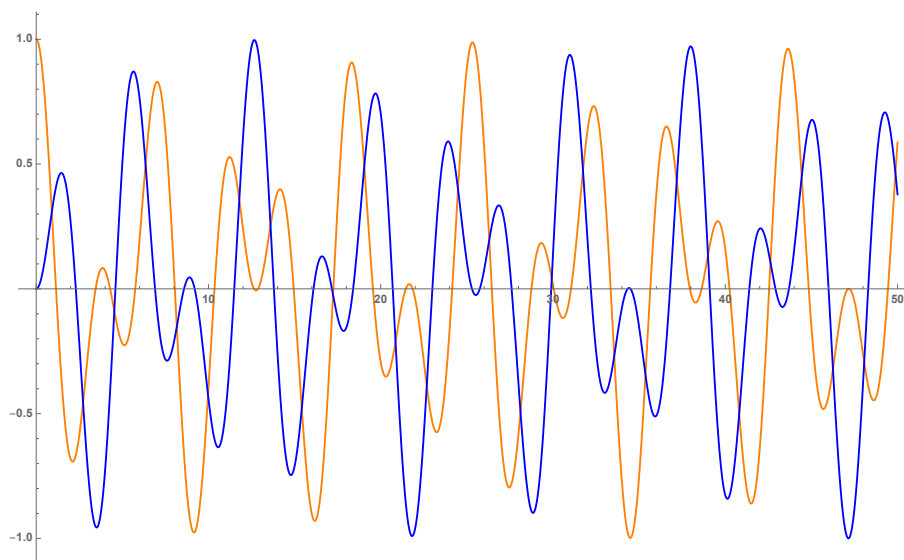
antaa blokkidiagonaalimatriisin

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k} & 0 & 0 \\ -\sqrt{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{k+2K} \\ 0 & 0 & -\sqrt{k+2K} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.10 nojalla Alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = By \\ y(0) = b \end{cases} \quad (4.2)$$

²Tapaukset $n \in \{2, 3\}$ käsiteltiin harjoitustehtävässä 2.6.



Kuva 4.2: Kytkeyn värähtelijöiden kappaleiden paikat ajan funktiona alkuarvolla $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1, 0, 0, 0)$, kun $k = K = 1$.

ratkaisu on

$$y_b(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k}t & \sin \sqrt{k}t & 0 & 0 \\ -\sin \sqrt{k}t & \cos \sqrt{k}t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \sqrt{k+2K}t & \sin \sqrt{k+2K}t \\ 0 & 0 & -\sin \sqrt{k+2K}t & \cos \sqrt{k+2K}t \end{pmatrix} b.$$

Proposition 2.19 nojalla alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ ratkaisu on $x_a(t) = Cy_{C^{-1}a}(t)$.

4.4 Mukautettu normi

Vektoriavaruuden V sisätulo $(\cdot | \cdot)$ määrää normin $\|\cdot\|$ asettamalla

$$\|v\| = \sqrt{(v | v)}$$

kaikille $v \in V$.

Seuraavaa tulosta käytetään epälineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopisteen tarkasteluun luvussa 6.

Propositio 4.12. *Olko $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jos $\text{Re Sp } A \subset]m, M[$, niin avaruudessa \mathbb{R}^n on sisätulo $(\cdot | \cdot)$ ja sen määräämä normi $\|\cdot\|$, joille pätee*

$$m\|x\|^2 \leq (Ax | x) \leq M\|x\|^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Konjugoimalla voidaan olettaa, että A on Jordanin kanonisessa muodossa. Osoitetaan, että väite pätee jokaista blokkia vastaavassa aliavaruudessa. Väite seuraa tästä asettamalla nämä aliavaruudet keskenään ortogonaalisiksi.

Jos $A = (\lambda)$, niin kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee standardisätulolla $(Ax | x) = \lambda \|x\|^2$.

Jos $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, niin matriisin A ominaisarvot ovat $\alpha \pm i\beta$. Nyt standardisätulolle pätee

$$(Ax | x) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \alpha \|x\|^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$.

Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}),$$

niin tehdään tehdään kannanvaihto matriisilla $K = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$:

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \lambda & \delta & & & \\ & \lambda & \delta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \delta \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Standardisätulolle uudessa kannassa pätee

$$(Ax | x) = (\lambda x + \delta(x_2, x_3, \dots, x_n, 0) | x) = \lambda \|x\|^2 + \delta((x_2, x_3, \dots, x_n, 0) | x).$$

Cauchyn epäyhtälön nojalla $|((x_2, x_3, \dots, x_n, 0) | x)| \leq \|x\|^2$, joten

$$(\lambda - \delta)\|x\|^2 \leq (Ax | x) \leq (\lambda + \delta)\|x\|^2.$$

Valitsemalla $\delta > 0$ riittävän pieneksi saadaan haluttu arvio. Kompleksisen ominaisarvon tapaus todistetaan samaan tapaan. \square

Harjoitustehtäviä

4.1. Todista Propositio 4.1(1).

4.2. Todista Propositio 4.1(2).

4.3. Todista Propositio 4.3.

4.4. Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordanin kanoninen muoto.

4.5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (2, 0, 1) \end{cases}$.

4.6. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ kaikki ratkaisut.

4.7. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytymistä.

4.8. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytyminen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Piirrä kuvia.

4.9. Laske

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

4.10. Todista Propositio 4.10 (1).

4.11. Todista Propositio 4.10 (2).

4.12. Ratkaise Esimerkissä 4.11 käsitelty kytkettyjen harmonisten värähtelijöiden alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ alkuarvoilla $a = (r, r, 0, 0)$ ja $a = (r, -r, 0, 0)$, kun $r \in \mathbb{R}$.

Miten kytketyt massat liikkuvat näissä tilanteissa?

Liite C

Metriset avaruudet

Tässä liitteessä käsittelemme metristen avaruuksien teoriaa olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistuksen tarpeisiin. Metrisiä avaruuksia käsitellään yksityiskohtaisemmin omalla kurssillaan,¹

Olkoon $X \neq \emptyset$. Kuvaus $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ **metriikka** joukossa X , jos

- $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys) ja
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on **metrinen avaruus**.

Metriikka on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden \mathbb{R}^n euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on. Metrinen avaruuden (X, d) Cauchyjonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa.

Metrinen avaruus X on **täydellinen**, jos sen kaikki Cauchyjonot suppenevat.

Esimerkki C.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Välillä I määriteltyjen jatkuvien kuvausten $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektoriavaruus $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksiminormilla

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|$.

¹Katso esimerkiksi [Par]

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $K > 0$. Kuvaus $F: X \rightarrow Y$ on **K -Lipschitz-kuvaus** tai **K -Lipschitz(-jatkuva)**, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille $x, y \in X$. Jos F on K -Lipschitz jollain $K > 0$, niin sanotaan, että F on **Lipschitz-jatkuva**. Jos F on K -Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on kutistava (vakiolla K).

Piste $x \in X$ on kuvauksen $F: X \rightarrow X$ **kiintopiste**, jos $F(x) = x$.

Lause C.2 (Banachin kiintopistelause). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F: X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste.*

Todistus. Olkoon $x \in X$ ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Olkoon $F: X \rightarrow X$ kutistava kuvaus vakiolla $K < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono ja koska X on täydellinen, tämä jono suppenee kohti jotain pistettä $x_{\infty} \in X$.

Piste x_{∞} on kuvauksen F kiintopiste, sillä kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} d(x_{\infty}, F(x_{\infty})) &\leq d(x_{\infty}, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_{\infty})) \\ &\leq (1+K)d(x_{\infty}, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $j \rightarrow \infty$. Metriikan positiivisuudesta seuraa, että $x_{\infty} = F(x_{\infty})$.

Jos x_{∞} ja y_{∞} ovat kiintopisteitä, niin

$$K d(x_{\infty}, y_{\infty}) \geq d(F(x_{\infty}), F(y_{\infty})) = d(x_{\infty}, y_{\infty}),$$

joten $d(x_{\infty}, y_{\infty}) = 0$ ja siis $x_{\infty} = y_{\infty}$. □

Käytämme tuloavaruudessa $X \times Y$ metriikkaa

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Propositio C.3. *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Olkoon $0 < K < 1$ ja olkoon $F: X \times Y \rightarrow X$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $F_y = F(\cdot, y): X \rightarrow X$ on kutistava kuvaus vakiolla K jokaiselle $y \in Y$. Olkoon $g: Y \rightarrow X$ kuvaus, jonka arvo pisteessä y on kuvauksen F_y kiintopiste. Tällöin kuvaus g on jatkuva.*

Todistus. Havaitaan, että kaikille $x \in X$ pätee

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^k d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) + d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)) ,$$

joten

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) = \frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x)),$$

sillä äärellinen summa on pienempi kuin $\frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x))$ ja $d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, koska $g(y)$ on kutistavan kuvauksen F_y kiintopiste. Valitaan $x = g(y') = F(g(y'), y')$, jolloin yllä oleva epäyhtälö antaa

$$d_X(g(y'), g(y)) \leq \frac{1}{1-K} d_X(F(g(y'), y'), F(g(y'), y)) . \quad (\text{C.1})$$

Tulometriikan määritelmän mukaan $d_Y(y', y) = d_1((g(y'), y'), (g(y'), y))$, joten kuvauksen F jatkuvuuden ja yhtälön (C.1) nojalla nähdään, että $d_X(g(y'), g(y)) \rightarrow 0$, kun $d_Y(y', y) \rightarrow 0$, kuten väitettiin. \square

Harjoitustehtäviä

C.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Osoita, että lauseke

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

määrää normin vektoriavaruudessa $C^0(I, \mathbb{R}^n)$. Osoita, että $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|$.²

²JMA 4

Luku 5

Epälineaariset differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tarkastelemme epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriaa. Todistamme olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen ja tarkastelemme ratkaisujen riippuvuutta alkuarvosta. Todistuksissa käytetään metrinen avaruuksien kieltä ja eräitä tärkeitä metrinen avaruuksien teorian tuloksia kuten Banachin kiintopistelausetta. Täydellisyyden vuoksi näiden tulosten todistukset on esitetty liitteessä C.

Monissa sovelluksissa päädytään tarkastelemaan epälineaarisia differentiaaliyhtälöitä:

Esimerkki 5.1 (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

missä $b \geq 0$ on kitkakerroin. Muutetaan tämä toisen asteen differentiaaliyhtälö yhtälöpariksi valitsemalla toiseksi muuttujaksi $v = \dot{\theta}$, jolloin saadaan epälineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Todistamme nyt Picardin ja Lindelöfin klassisen lauseen alkuarvot tehtävien ratkaisujen olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä. Klassinen todistus saa miellyttävän rakenteen, kun käytämme Liitteessä C käsiteltyjä metrinen avaruuksien käsitteitä ja tuloksia.

Lause 5.2 (OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva vektorikenttä. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvot tehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (5.2)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Olkoon $R > 0$ siten, että $\bar{B}(b, R) \subset U$. Olkoon $M = \max_{x \in \bar{B}(b, R)} \|f(x)\|$. Olkoon $0 < \delta < \min(\frac{1}{L}, \frac{R}{M})$. Täydellisen normiavaruuden $C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$ suljettu pallo

$$\mathcal{C} = \{\phi \in C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) : \|\phi - b\| \leq M\delta\}$$

on täydellinen metrinen avaruus.

Picardin operaattori on kuvaus $\mathcal{P}_{a,b}: C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds .$$

Tekemillämme valinnoilla pätee kaikille $\phi \in \mathcal{C}$

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - b\| = \left\| \int_a^t f(\phi(s))ds \right\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t f(\phi(s))ds \right\| \leq M\delta < R ,$$

joten $\mathcal{P}_{a,b}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Voimme siis iteroida kuvausta $\mathcal{P}_{a,b}|_{\mathcal{C}}$.

Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

Lemma 5.3. *Kuvaus $\phi: [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on alkuarvotehtävän (5.2) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin $\mathcal{P}_{a,b}$ kiintopiste.*

Todistus. Kuvaus ϕ on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$\phi(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds . \quad (5.3)$$

Jos ϕ on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon $\phi(a) = b$. Lisäksi kuvaus ϕ on differentioituva ja toteuttaa ehdon $\dot{\phi}(t) = f(\phi(t))$ analyysin peruslauseen nojalla.

Toisaalta, jos ϕ on alkuarvotehtävän (5.2) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, niin kaikilla $t \in]a - \delta, a + \delta[$ pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s)ds = \phi(t),$$

joten ϕ on kiintopiste. □

Lemma 5.4. *Picardin kuvaus on kutistava.*

Todistus.

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(\phi(s)) - f(\psi(s)))ds \right\| \leq \delta L \|\phi - \psi\| . \quad \square$$

Lemman 5.4 ja Lauseen C.2 mukaan Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 5.3 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (5.2) ainoa ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$. □

Seuraus 5.5 (Autonominen OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -kuvaus. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (5.4)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Kun f on jatkuvasti differentioituva ja $\bar{B}(b, R) \subset U$, niin $f|_{\bar{B}(b, R)}$ on L -Lipschitz-jatkuva jollain $L > 0$. Väite seuraa siis Lauseesta 5.2. \square

Esimerkki 5.6. Vaikka tarkastelemmekin lähinnä korkeampiulotteisia tilanteita, on hyvä muistaa, miten Picardin iteraatio antaa alkuarvot tehtävän $\dot{y} = y$, $y(0) = 1$ ratkaisun: Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio $y_0(t) = 1$. Tällöin

$$y_1(t) = \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}.$$

Kuvausten y_k muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

5.2 Jatkuva riippuvuus alkuarvosta

Osoitamme seuraavaksi, että toisiaan riittävän lähellä olevia alkuarvoja vastaavat ratkaisut pysyvät jonkin aikaa lähellä toisiaan: Merkitään jatkossa alkuarvot tehtävän $\dot{x} = f(x)$, $f(a) = b$ ratkaisua $x_{a,b}$.

Propositio 5.7. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ K -Lipschitz-jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on $\delta > 0$ ja $\eta > 0$, joille*

$$\|x_{a,b} - x_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \|x_{a,b}(t) - x_{a,b'}(t)\| < \varepsilon,$$

jos $\|b - b'\| < \eta$.

Todistus. Valitaan $\delta > 0$ kuten Lauseen 5.2 todistuksessa. Olkoon $b \in U$. Valitaan $\eta > 0$ siten, että $\bar{B}(b, R) \subset U$ kaikilla $b' \in \bar{B}(b, \eta)$. Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuarvolla b' on määritelty koko välillä $[a - \delta, a + \delta]$. Väite seuraa Propositioista C.3 valitsemalla $X = C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$, $Y = \mathbb{R}^n$ ja $F: X \times Y \rightarrow X$, $F(\phi, c) = \mathcal{P}_{a,c}(\phi)$. \square

Esimerkki 5.8. Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.9, 0)$ ja $x_1 = (0.8, 0)$ käyttäytyvät samaan tapaan (itse asiassa kaikilla $t \in \mathbb{R}$), kun taas alkuarvolla $x_2 = (1.1, 0)$ käyttäytyminen on erilaista kuin alkuarvoilla x_0 ja x_1 , kun t kasvaa.

Epälineaarinen differentiaaliyhtälö (5.5) voidaan ratkaista vaihtamalla napakoordinaatteihin: Yhtälöiden (A.1) avulla saadaan

$$\begin{aligned} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} &= -\frac{1}{2}(r - r^3) \cos \theta + r \sin \theta \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} &= -\frac{1}{2}(r - r^3) \sin \theta - r \cos \theta, \end{aligned}$$

Vertaamalla sinin ja kosinin kertoimia saadaan alkuperäisen kanssa ekvivalentti differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1)/2 \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Sama tulos saadaan tietenkin myös käyttämällä yhtälöitä (A.2).

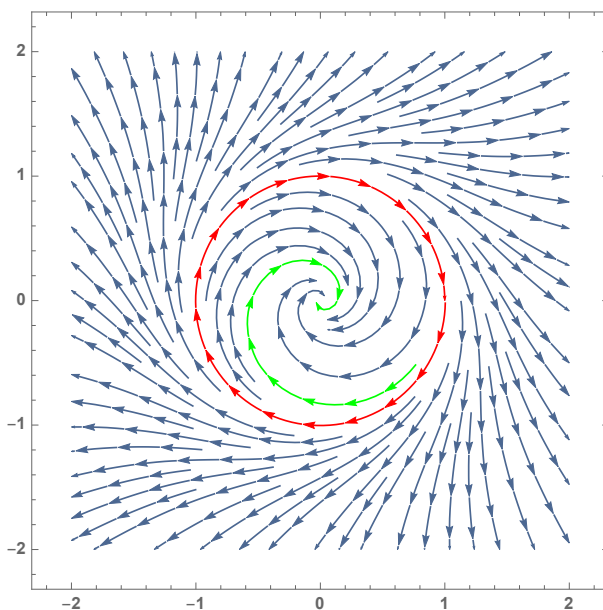
Kulmakomponentin ja radiaalisen komponentin yhtälöt siis eriytyvät. Ratkaisusta $\theta(t) = -t + \theta_0$ nähdään, että ratkaisut kiertävät origoa tasaisella kulmanopeudella.

Säteen differentiaaliyhtälöstä nähdään suoraan, että alkuarvoilla $r = 1$ ratkaisukäyrä on yksikköympyrän parametrisointi vakionopeudella. OY-lauseen nojalla ratkaisukäyrät eivät leikkaa toisiaan, joten yksikköympyrästä lähtevät ratkaisut pysyvät rajoitettuina yksikköympyrään.

Napakoordinaattimuodossa oleva yhtälö (5.6) voidaan ratkaista eksplisiittisesti:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^t(1 - r_0^2)}} \\ \theta(t) = \theta_0 - t \end{cases}$$

on ratkaisu alkuarvolla $(r(0), \theta(0)) = (r_0, \theta_0)$.



Propositio 5.9. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä ja olkoon $x_0 \in U$. Olkoon x alkuarvotekstävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

ratkaisu. Oletetaan, että $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in U$. Tällöin x_∞ on differentiaaliyhtälön (5.7) tasapainopiste.

5.3 Maksimaalinen määrittelyväli

Propositio 5.10. *Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on Lipschitz-jatkuva. Tällöin alkuarvotettävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} .

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Silloinkin, kun differentiaaliyhtälö on määritelty koko avaruudessa \mathbb{R}^n , niin maksimaalinen määrittelyväli voi olla pienempi kuin koko \mathbb{R} , jos f ei ole Lipschitz-jatkuva, kuten Esimerkeissä 1.1 ja 5.8 käsitetyjen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen käyttäytyminen osoittaa.

Esimerkki 5.11. Alkuarvotettävää

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2/x_3^2 \\ x_1/x_3^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1/\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/\pi \end{pmatrix}$$

on luonnollista tarkastella joukossa $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, koska vektorikenttä on määritelty hypertason $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ komplementissa. Tämän alkuarvotettävän ratkaisu voidaan itse asiassa antaa helposti:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on $]0, \infty[$. Ratkaisukäyrä on sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ja kun $t \rightarrow 0$, niin ratkaisukäyrä kasautuu kohti ympyrää

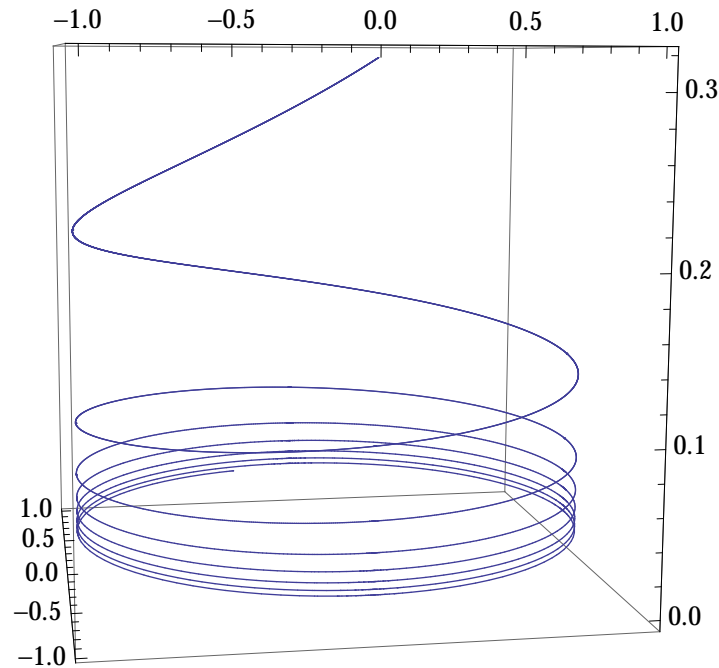
$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Olkoon seuraavissa tuloksissa $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä ja olkoon $]\sigma, \tau[$ alkuarvotettävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.8)$$

maksimaalinen määrittelyväli. Tässä $\sigma < 0 < \tau$, $\sigma \in [-\infty, \infty[$ ja $\tau \in]-\infty, \infty]$

Propositio 5.12. *Olkoon $K \subset U$ kompakti. Jos $\tau < \infty$, niin on $t \in]0, \tau[$, jolle $x(t) \notin K$. Jos $\sigma > -\infty$, niin on $t \in]\sigma, 0[$, jolle $x(t) \notin K$.*



Todistus. Tarkastellaan vain ylhäältä rajoitetun maksimaalisen määrittelyvälin tapaus, alhaalta rajoitettu tilanne todistetaan samalla tavalla. Koska K on kompakti ja f on jatkuva, niin on $M > 0$, jolle

$$\max_{x \in K} \|f(x)\| \leq M.$$

Oletetaan, että $x(t) \in K$ kaikilla $t \in [0, \tau[$. Tällöin kaikille $0 < t_1 < t_2 < \tau$ pätee

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|,$$

joten ratkaisu on M -Lipschitz-jatkuva välillä $[0, \tau[$ ja sillä on raja-arvo

$$x_\tau = \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) \in K.$$

Nyt

$$\begin{aligned} x_\tau &= \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) = x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t \dot{x}(s) ds \\ &= x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t f(x(s)) ds = x(0) + \int_0^\tau f(x(s)) ds. \end{aligned}$$

Ratkaisu x voidaan jatkaa differentioituvaksi kuvaukseksi päätepisteeseen τ saakka lausekkeella

$$x(t) = x_0 + \int_0^\tau f(x(s)) ds,$$

erityisesti $\dot{x}(\tau) = f(x(\tau)) = f(x_\tau)$. Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\tau) = x_\tau \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä $]\tau - a, \tau + a[$, joten ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla alkuarvotehtävällä (5.8) olisi siis ratkaisu välillä $]\sigma, \tau + a[$, mikä taas on välin $]\sigma, \tau[$ maksimaalisuuden kanssa ristiriidassa. \square

Seuraus 5.13. Olkoon $K \subset U$ kompakti ja olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli on $]\sigma, \tau[$. Jos $x(t) \in K$ kaikilla $t \geq 0$, niin $\tau = \infty$.

Todistus. Väite on yhtäpitävä Proposition 5.12 kanssa siirtymällä negaatioihin. \square

Seuraus 5.14. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli $]\sigma, \tau[$ on ylhäältä rajoitettu. Jos $x(t)$ suppenee, kun $t \rightarrow \tau-$, niin $\lim x(t)_{t \rightarrow \tau-} \in \partial U$.

Todistus. Harjoitustehtävä. \square

5.4 Vakion variointi

Jos epäautonominen differentiaaliyhtälö $\dot{x} = f(x, t)$ muunnetaan autonomiseksi, tuloksena ei ole koskaan ole lineaarinen autonominen yhtälö; jo aikaparametrin $x_{n+1} = t$ differentiaaliyhtälö $\dot{x}_{n+1} = 1$ tekee yhtälöstä

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases} .$$

epälineaarisen. Tämän vuoksi seuraava tulos laajentaa aidosti niiden differentiaaliyhtälöiden joukkoa, joille tunnemme ratkaisun ainakin periaatteessa eksplisiittisesti.

Propositio 5.15 (Vakion variointi). Olkoon A $n \times n$ -matriisi ja olkoon $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Kuvaus

$$x(t) = \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right)$$

on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu, kun $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Olkoon x kuten väitteessä. Lemman 2.13 ja analyysin peruslauseen nojalla saamme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right) + x(t) \\ &= \exp(tA) \exp(-tA) G(t) = Ax(t) + G(t). \end{aligned} \quad \square$$

Esimerkki 5.16 (Pakotettu vaimeneva värähtelijä). Esimerkissä 3.4 kuvatun vaimenevan värähtelijän jousen päässä liikkuvaan painoon vaikuttaa nyt jokin ulkoinen voima $g(t)$, joka aiheuttaa ajasta mutta ei paikasta riippuvan kiihtyvyyden. Epäautonomisen alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m} y_1 - \frac{b}{m} y_2 + g(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

ratkaisu saadaan Lauseen 5.15 avulla. Nyt siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

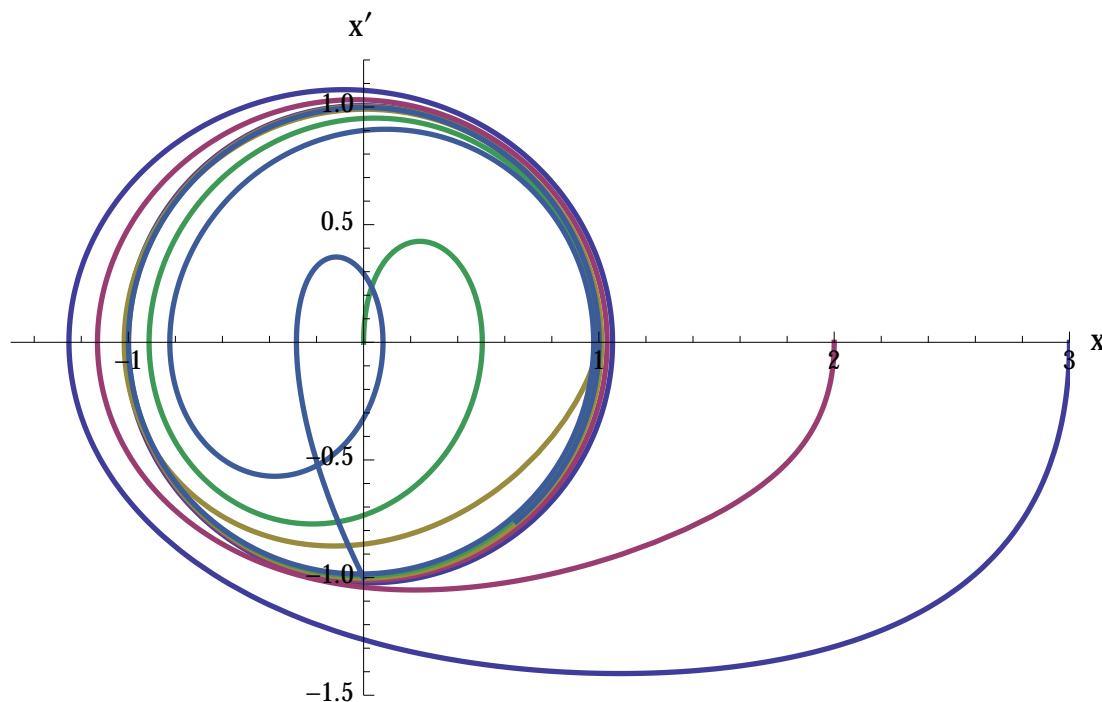
ja

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

ja alkuarvotehtävän (5.9) ratkaisu on

$$y(t) = \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds. \quad (5.10)$$

Tarkastellaan erityisesti tilannetta, jossa pakottava voima on jaksollinen $g(t) = \cos(t)$. Tällaisella differentiaaliyhtälöllä kuvataan esimerkiksi vaihtovirralla ajettuja RLC-piirejä.



Kuva 5.1: Pakotettu vaimeneva värähtelijä parametreilla $m = k = b = 1$ alkuarvoilla $y(0) = (3, 0)$, $y(0) = (2, 0)$, $y(0) = (0, 0)$, $y(0) = (1, 0)$, $y(0) = (0, -1)$. Kuvassa $t \in [0, 15]$.

Numeerisesti laskettuja esimerkkejä tarkastelemalla näyttäisi siltä, että alkuarvosta riippumatta ratkaisut lähestyvät samaa ympyrää, jonka koko riippuu vaimenevan värähtelijän parametreista.

Kuvasta 5.1 huomaamme myös, että epäautonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyrät voivat leikata itseään “epät triviaalilla tavalla”. Jos korvaamme differentiaaliyhtälön (5.9) autonomisella yhtälöllä ottamalla ajan kolmanneksi muuttujaksi ja lisäämällä yhtälöön ehdon $\dot{t} = 1$, niin kuva 5.1 esittää tämän uuden yhtälön ratkaisun projektiota mihin

tahansa aika-akselia vastaan kohtisuoraan tasoon. OY-lauseen mukaan uuden yhtälön ratkaisukäyrät eivät leikkaa itseään vaikka niiden projektiot näin tekevätkin.

Tarkasteltavassa alkuarvot tehtävässä (5.9) pakottava termi on 2π -jaksollinen. Siis, jos tämän alkuarvot tehtävän ratkaisulle pätee $y(2\pi) = y_0 = y(0)$, niin ratkaisu y on 2π -jaksollinen. Osoitetaan, että tehtävällä on täsmälleen yksi 2π -jaksollinen ratkaisu: Jos $y(2\pi) = y_0$, niin

$$y_0 = \exp(2\pi A)y_0 + \exp(2\pi A) \int_0^{2\pi} \exp(-sA)G(s)ds = \exp(2\pi A)y_0 + w,$$

joten alkuarvo y_0 vastaa 2π -jaksollista rataa, jos ja vain jos se on yhtälön

$$(I_2 - \exp(2\pi A))y_0 = w \quad (5.11)$$

ratkaisu. Matriisin A ominaisarvojen $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$ reaali-osat ovat negatiivisia, joten matriisin $\exp A$ ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1, erityisesti siis kumpikaan niistä ei ole 1. Siis matriisi $\exp(2\pi A) - I$ on kääntyvä ja yhtälöllä (5.11) on täsmälleen yksi ratkaisu $y_0 = (I_2 - \exp(2\pi A))^{-1}w \in \mathbb{R}^2$.

Esimerkiksi, jos $m = k = b = 1$, niin $y(t) = (\sin t, \cos t)$ on alkuarvot tehtävän (5.9) 2π -jaksollinen ratkaisu alkuarvolla $(0, 1)$.

Osoitetaan lopuksi, että muut ratkaisut käyttäytyvät havaitulla tavalla: Jos $z_0 \in \mathbb{R}^2$, niin alkuarvot tehtävän (5.9) ratkaisu alkuarvolla z_0 on

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(tA)z_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + y(t), \end{aligned}$$

missä $y(t)$ on edellä löydetty 2π -jaksollinen ratkaisu. Termi $\exp(tA)(z_0 - y_0)$ lähestyy nollaa, kun $t \rightarrow \infty$ koska se on vaimenevan värähtelijän differentiaaliyhtälön alkuarvot tehtävän (3.6) ratkaisu alkuarvolla $z_0 - x_0$, kun $b > 0$.

Harjoitustehtäviä

5.1. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x(0) = p$$

kaikille $p \in \mathbb{R}^2$.¹

5.2. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x(0) = p$$

kaikille $p \in \mathbb{R}^2$.²

¹Katso Esimerkkiä 5.8.

²Katso Esimerkkiä 5.8.

5.3. Iteroi Picardin operaattoria kolme kertaa alkuarvotehtävälle

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.4. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva. Osoita OY-lauseen ja sen todistuksen avulla, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on ratkaisu, joka on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

5.5. Todista Propositio 5.9.

5.6. Olkoon $0 < \tau < \infty$ ja olkoon $g: [0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva kuvaus. Osoita, että sillä on vasen raja-arvo $\lim_{t \rightarrow \tau^-} g(t)$.

5.7. Todista Seuraus 5.14.

5.8. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 1 \\ x(0) = (1, 0). \end{cases}$$

5.9. Olkoon³

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ja olkoon

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

³Muista Harjoitustehtävä 4.6

Luku 6

Epälineaarisen yhtälön ratkaisuista

Tässä luvussa tutustumme joihinkin menetelmiin, joiden avulla differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä voi ymmärtää ratkaisematta yhtälöä. Erityisesti tarkastelemme differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteen ympäristöä epälineaarisen vektorikentän f tapauksessa.

6.1 Tason yhtälön ratkaisukäyrien etsiminen separoimalla

Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ja olkoot $1 \leq k \leq n$. Joukot

$$N_k(f) = \{x \in U : f_k(x) = 0\},$$

ovat vektorikentän f **nollakliinit**.

Lemma 6.1. *Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Joukko $\bigcap_{k=1}^n N_k(f)$ on vektorikentän f tasapainopisteiden joukko.* \square

Nollakliinit jakavat joukon U osiin, joissa kullakin ratkaisun osittaisderivaatalla on kiinteä merkki. Joissain tilanteissa tämä jako auttaa vektorikentän määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisujen tarkastelussa. Esimerkiksi tason tapauksessa vektorikenttä on vaakasuora nollakliinilla $N_2(f)$ ja pystysuora nollakliinilla $N_1(f)$.

Tason differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \end{cases}$$

ratkaisuja voi yrittää löytää seuraavalla menetelmällä: Jos $x(t_0) \notin N_1(f)$, niin $\dot{x}_1(t_0) \neq 0$. Tällöin funktio x_1 on bijektio jossain pisteen $x_1(t_0)$ ympäristössä, jossa $\frac{d}{dt}x_1^{-1}(x_1(t)) = \frac{1}{\dot{x}_1(t)}$. Siis differentiaaliyhtälön $\frac{d}{dt}x_2 \circ x_1^{-1} = \frac{f_2}{f_1}$ ratkaisut antavat komponenttifunktioiden x_1 ja x_2 riippuvuuden alkuarvon lähellä. Vastavasti, jos $x(t_0) \notin N_2(f)$, niin saadaan

differentiaaliyhtälö $\frac{d}{dt}x_1 \circ x_2^{-1} = \frac{f_1}{f_2}$. Yleensä ensimmäinen näistä yhtälöistä kirjoitetaan muodossa

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

Joissain tilanteissa, kun näin saatu differentiaaliyhtälö separoituu, se saadaan ratkaistua niin, että ratkaisukäyrälle saadaan yhtälö. Tällä tavalla ei kuitenkaan saada ratkaisun lauseketta eli sitä, millä nopeudella ratkaisu parametrizoi ratkaisukäyrän.

Esimerkki 6.2 (Lotkan ja Volterran yhtälö). Tarkastellaan esimerkkiä differentiaaliyhtälöiden käytöstä biologisen tilanteen mallittamisessa. Meressä on kahdenlaisia kaloja: haikaloja ja hainruokaa.

Olkoon haikalojen lukumäärä h ja hainruoan lukumäärä r . Oletetaan, että ilman haikaloja hainruoan populaatio kehittyisi Esimerkissä 1.1(1) käsitellyn Malthusin lain mukaan eksponentiaalisesti yhtälön $\dot{r} = \alpha r$ mukaan, missä α on positiivinen vakio. Haikalojen ja hainruoan kohtaamisia tapahtuu $\beta_0 hr$ kappaletta ja jollain todennäköisyydellä β_1 hai syö hainruoan. Siis hainruoan määrä vähenee nopeudella βhr . Vastaavasti haikalojen lukumäärän luonnollinen poistumanopeus on suhteessa lukumäärään γh ja ruoan saanti kasvattaa populaatiota nopeudella δhr . Näiden kahden lajin lukumääriä säätelee tämän päättelyn mukaisesti differentiaaliyhtälöpari

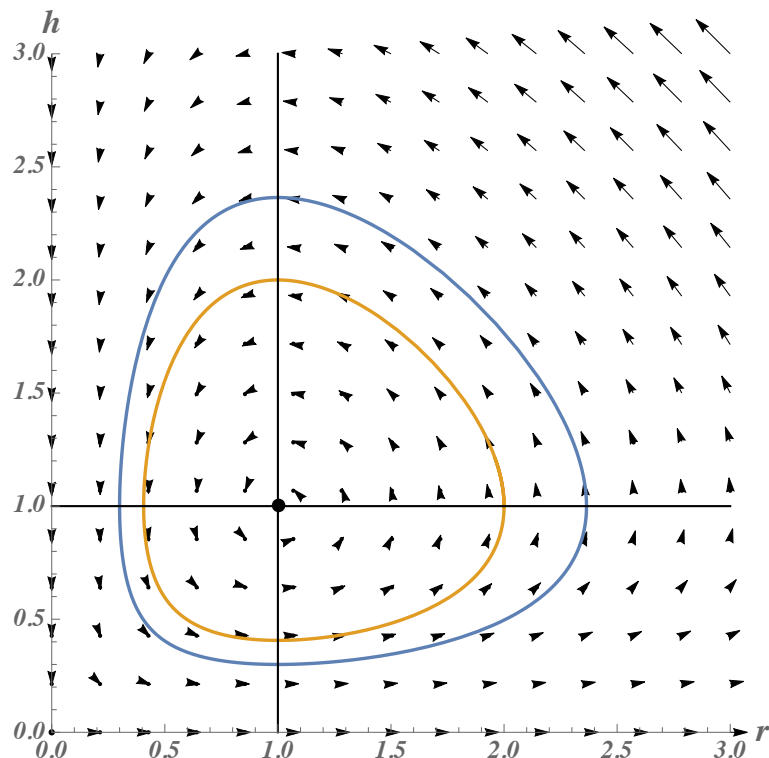
$$\begin{cases} \dot{r} = (\alpha - \beta h)r, \\ \dot{h} = (-\gamma + \delta r)h \end{cases} \quad (6.1)$$

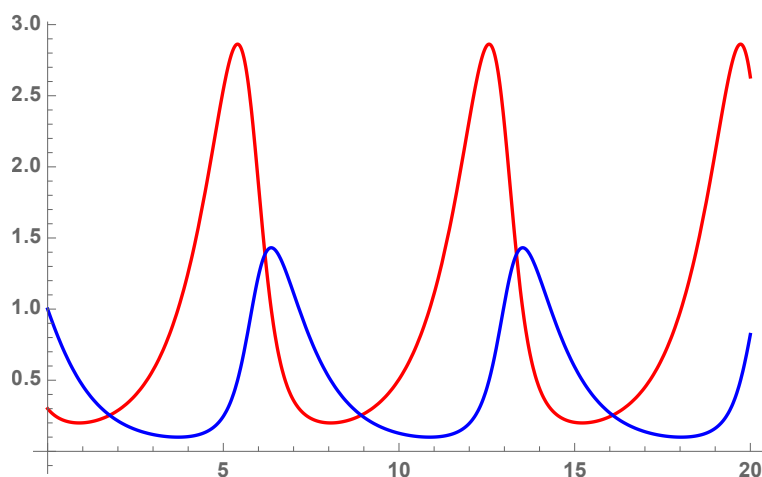
joillain vakioilla $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

On helppo nähdä, että alkuarvoa $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ vastaa vakioratkaisu: $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on vektorikentän

$$f(r, h) = ((\alpha - \beta h)r, (\delta r - \gamma)h),$$

tasapainopiste.





Kuva 6.1: Hain ja hainruoan populaatioiden kehitys alkuarvoilla $r_0 = 0.3$, $h_0 = 1$ ja parametreilla $a = c = d = 1$, $b = 2$.

Etsitään differentiaaliyhtälön (6.1) ratkaisukäyrät edellä kuvatulla menetelmällä. Yhtälön $r = \frac{\gamma}{\delta}$ määräämän h -nollakliinin komplementissa saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dr}{dh} = \frac{(\alpha - \beta h)r}{(-\gamma + \delta r)h}.$$

Tämä on separoituva yhtälö, joka on helppo ratkaista (implisiittisesti): Ratkaisut toteuttavat yhtälön $\delta r + \beta h - \gamma \log r - \alpha \log h = C_0$ jollain vakiolla $C_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $L_0: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,

$$L_0(r, h) = \delta r + \beta h - \gamma \log r - \alpha \log h.$$

Toisen derivaatan testillä näkee helposti, että tasapainopiste $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on funktion L_0 globaali minimi. Olkoon

$$L(r, h) = L_0(r, h) - L_0(\gamma/\delta, \alpha/\beta).$$

Funktion L tasa-arvojoukot $L^{-1}(T)$, $T > 0$, ovat topologisia ympyröitä, jotka eivät sisällä yhtään vektorikentän f tasapainopistettä. Seurauksen 5.13 nojalla alkuarvot tehtävän maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} jokaisella alkuarvolla $(r_0, h_0) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$. Proposition 5.9 nojalla ratkaisut ovat syklisiä. Jokaisen pisteen rata sisältyy topologiseen ympyrään, jota ratkaisu kiertää pysähtymättä.

6.2 Tasapainopisteen vakaus

Lotkan ja Volterran yhtälön jaksolliset ratkaisut kiertävät tasapainopistettä suljetuilla radoilla. Erityisesti, jos alkuarvo valitaan läheltä tasapainopistettä, niin rata pysyy lähellä tasapainopistettä.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä. Vektorikentän f tasapainopiste b on **vakaa**,^a jos jokaiselle pisteen b avoimelle ympäristölle $V \subset U$ on pisteen b avoin ympäristö $W \subset V$ siten, että jokaisen alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \in W \end{cases}$$

ratkaisun x_p maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton ja $x_p(t) \in W$ kaikilla $t \geq 0$.

Jos tasapainopiste b ei ole vakaa, se on **epävakaa**.

^a **stabiili**

Esimerkki 6.3. (1) Lotkan ja Volterran yhtälön tasapainopiste $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on vakaa.

(2) Tason lineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopiste 0 on vakaa, jos se on nielu, spiraalinielu, surkastunut nielu tai keskus. Se on epävakaa, jos se on lähde, surkastunut lähde, spiraalilähde tai satula.

(3) Origo on Esimerkin 5.8 differentiaaliyhtälön ainoa tasapainopiste. Napakoordinaateissa kirjoitetusta ratkaisusta

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^t(1 - r_0^2)}} \\ \theta(t) = \theta_0 - t \end{cases}$$

näkee helposti, että $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$, kun alkuarvo on avoimessa yksikkökierokossa. Siis 0 on vakaa tasapainopiste.

Tasapainopiste b on **asymptoottisesti vakaa**, jos b on vakaa ja on pisteen b avoin ympäristö W , jolle $x_p(t) \rightarrow b$ kaikille $p \in W$, kun $t \rightarrow \infty$.

Esimerkki 6.4. (1) Tason lineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopiste 0 on vakaa, jos se on nielu, spiraalinielu tai surkastunut nielu. Vakauden voi selvittää ominaisarvojen avulla: Tasapainopiste 0 on asymptoottisesti vakaa, jos molempien ominaisarvojen reaali-osat ovat negatiivisia ja epävakaa, jos ainakin toisen ominaisarvon reaaliosa on positiivinen. Jos ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia, niin 0 on vakaa mutta ei asymptoottisesti vakaa.

(2) Origo on Esimerkin 5.8 differentiaaliyhtälön asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.

6.3 Linearisointi

Tässä luvussa tarkastelemme menetelmää, jolla useissa tilanteissa voidaan päätellä, että tasapainopiste on asymptoottisesti vakaa tai epävakaa.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $b \in U$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste (siis $f(b) = 0$). Lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = Df(b)(x - x_0)$$

on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ **linearisointi** pisteessä b .

Lause 6.5. *Olkoon $b \in \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat pienempiä¹ kuin $-c$ jollain $c > 0$, niin b on asympotoottisesti vakaa ja on $\delta > 0$ siten, että kaikilla $p \in \overline{B}(b, \delta)$ alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton ja sen ratkaisu x_p toteuttaa

$$\|x_p(t) - b\| \leq e^{-ct} \|p - b\|$$

kaikilla $t \geq 0$.

Todistus. Oletetaan yksinkertaistamiseksi, että $b = 0$. Valitaan koordinaatit siten, että $A = Df(0)$ on Jordanin kanonisessa muodossa ja että standardisätulolle ja sen määräämälle normille pätee $(Ax | x) \leq -M\|x\|^2$ jollain $M > c > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.²

Koska f on differentioituva, sille pätee $\|f(x) - Df(0)x\| = o(x)$, kun $x \rightarrow 0$. Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$|(f(x) - Ax | x)| \leq o(x)\|x\| = o(\|x\|^2),$$

kun $x \rightarrow 0$, joten on $\delta > 0$ siten, että $(f(x) | x) \leq -c\|x\|^2$, kun $\|x\| \leq \delta$.

Olkoon $\phi: [0, t_0] \rightarrow U$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, jonka kuvajoukko sisältyy joukkoon $\overline{B}(0, \delta) - \{0\}$. Aiemmilta kursseilta muistamme, että

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\| = \frac{(\dot{\phi}(t) | \phi(t))}{\|\phi(t)\|}.$$

Koska ϕ on ratkaisu, saamme edellä tehtyjen laskujen nojalla

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\| = \frac{(f(\phi(t)) | \phi(t))}{\|\phi(t)\|} \leq \frac{-c\|\phi(t)\|^2}{\|\phi(t)\|^2} = -c\|\phi(t)\|. \quad (6.2)$$

Siis kuvaus $t \mapsto \|\phi(t)\|$ on vähenevä, joten koko ratkaisu sisältyy kompaktiin joukkoon $\overline{B}(0, \delta)$. Proposition 5.13 nojalla määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton.

Epäyhtälön (6.2) nojalla

$$\frac{d}{dt} \log \|\phi(t)\| = \frac{\frac{d}{dt} \|\phi(t)\|}{\|\phi(t)\|} \leq -c,$$

mistä viimeinen väite seuraa integroimalla. □

¹aidosti!

²Katso Propositio 4.12.

Seuraus 6.6. Olkoon $b \in \mathbb{R}^n$ -vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat suurempia kuin jollain $c > 0$, niin b on epävakaata ja on $\delta > 0$ siten, että kaikilla $p \in \overline{B}(b, \delta)$ alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on alhaalta rajoittamaton ja sen ratkaisu x_p toteuttaa

$$\|x_p(t) - b\| \leq e^{ct} \|p - b\|$$

kaikilla $t \geq 0$.

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 6.5 tarkastelemalla vektorikenttää $-f$. □

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $b \in U$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksella $Df(b)$ ei ole ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolla, niin tasapainopiste b on **hyperbolinen**.

Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia, niin b on **nielu**.

Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat positiivisia, niin b on **lähde**.

Esimerkki 6.7. Esimerkissä 5.8 tarkastellun differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

ainoa tasapainopiste on 0. Linearisoitu yhtälö on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x = Ax$$

Matriisin A ominaisarvot ovat $-\frac{1}{2} \pm i$, joten origo on hyperbolinen tasapainopiste, linearisaatio on spiraalinielu. Lausetta 6.5 voi soveltaa ratkaisujen tutkimiseen ja sen mukaan 0 on asympotoottisesti vakaa tasapainopiste.

Esimerkki 6.8 (Tasapainopiste, joka ei ole hyperbolinen). Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1 \|x\|^2 \\ x_1 + \varepsilon x_2 \|x\|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

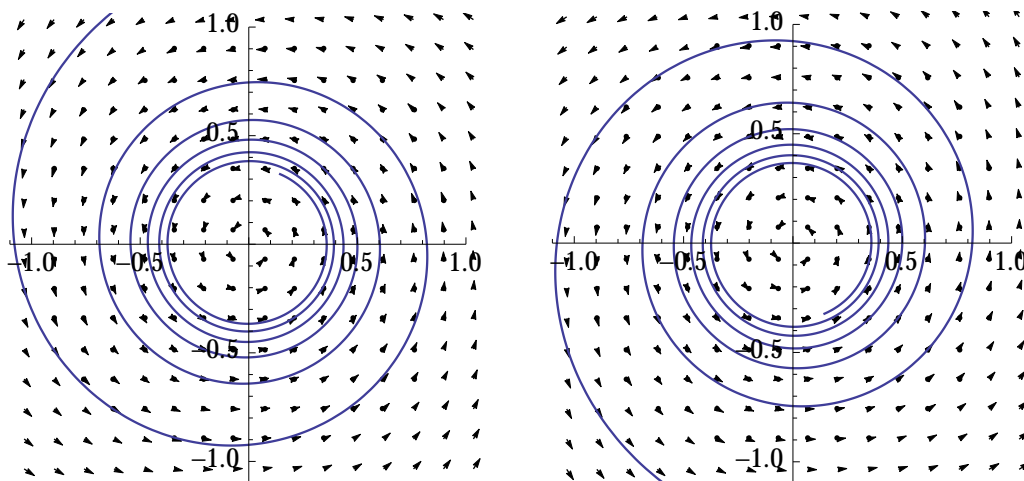
ainoa tasapainopiste on 0. Sen linearisaatio on kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sama yhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Linearisaation kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\pm i$, joten Lausetta 6.5 ei voi soveltaa. Differentiaaliyhtälö (6.4) on napakoordinaattimuodossa

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^3 \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

joten 0 on asympotoottisesti vakaa, kun $\varepsilon < 0$, vakaa, kun $\varepsilon \leq 0$ ja epävakaa, kun $\varepsilon > 0$.



Kuva 6.2: Pisteen $(\frac{1}{2}, 0)$ radan osia, kun $\varepsilon = -0.1, 0.1$.

Tässä esimerkissä tarkasteltavat differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista eksplisiittisesti ja ratojen käyttäytyminen voitiin selvittää. Tämä on kuitenkin poikkeuksellista, yleensä joudutaan tyytymään ratkaisun tarkastelemiseen muilla keinoilla.

6.4 FitzHughin ja Nagumon yhtälö.

Kurssin viimeisessä luvussa tarkastelemme esimerkkiä neurotieteen alalta. Tutkimme ratkaisujen käyttäytymistä nollaklinien ja linearisoinnin avulla.

Esimerkki 6.9 (FitzHughin ja Nagumon yhtälö). FitzHugh [Fit] päätyi 1960-luvulla tarkastelemaan tason differentiaaliyhtälöä joka yksinkertaistaa kalmarin suuren hermo-säikeen toimintaa kuvaavaa Hodgkinin ja Huxleyn mallia.³ Yleisin FitzHughin ja Nagumon yhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} c(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2 + z(t)) \\ -\frac{1}{c}(x_1 - a + bx_2) \end{pmatrix},$$

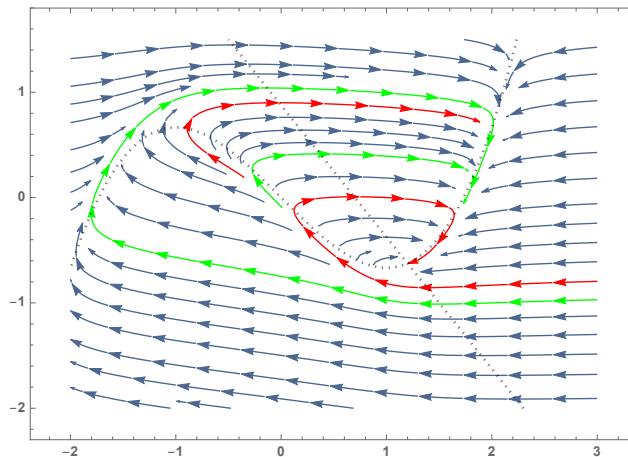
missä a , b ja c ovat vakioita, joille pätee $0 < b < 1$, $1 - \frac{2b}{3} < a < 1$ ja $b < c^2$, ja z on ajasta riippuva ärsykefunktio. Tässä esimerkissä keskitymme tapaukseen, jossa z on

³Nagumo yhteistyökumppaneineen tarkasteli FitzHughin esittelemää mallia, jota tuolloin kutsuttiin BVP-yhtälöksi seuraavana vuonna. Myöhemmin yhtälöä alettiin kutsua nykyisellä nimellä.

vakiofunktio, jolloin tarkastelemme vektorikentän $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

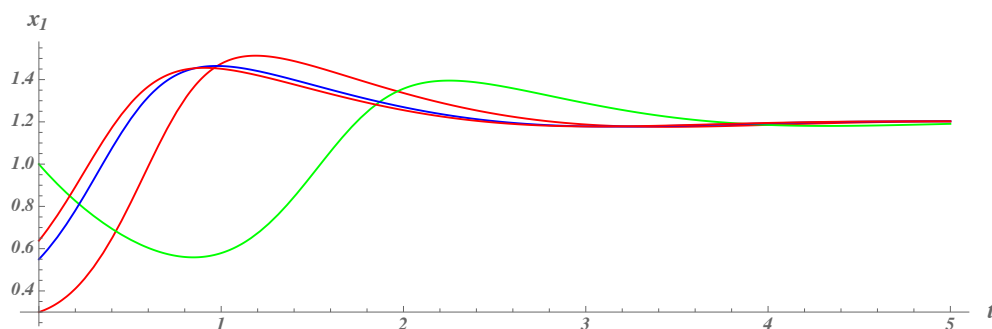
$$f(x) = \begin{cases} c\left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2 + z\right) \\ -\frac{1}{c}(x_1 - a + bx_2) \end{cases},$$

määräämää autonomista epälineaarista differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = f(x)$.



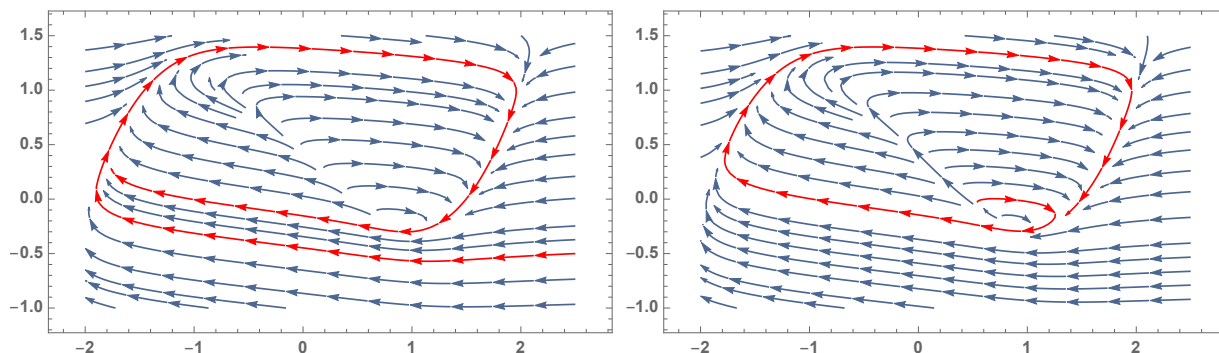
Kuva 6.3: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisuja parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$. Nollakliinit on kuvattu pisteviivoilla. Kaikki ratkaisut näyttävät päätyvän tasapainopisteeseen, kun $t \rightarrow \infty$.

Tarkastellaan tapausta $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$. Tällöin on helppo nähdä nollakliinien avulla, että vektorikentällä f on vain yksi nollakohta $x \approx (1.19, -0.64)$. Tässä pisteessä vektorikentän linearisoinnin ominaisarvot ovat $\approx -0.79 \pm 0.85i$, joten tasapainopiste on nielu ja sen linearisointi on erityisesti spiraalinielu. Tässä tilanteessa tasapainossa oleva systeemi palaa melko nopeasti takaisin tasapainoon, jos sitä häiritään. Kuvat 6.3 ja 6.4 havainnollistavat ratkaisujen käyttäytymistä.



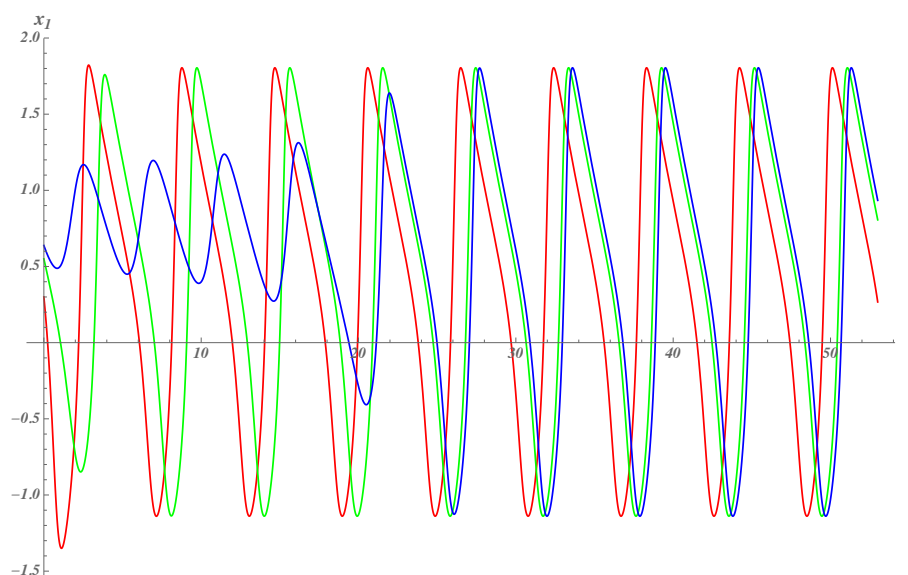
Kuva 6.4: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisujen ensimmäisen koordinaatin käyttäytyminen eri alkuarvoilla parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$.

Kun $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$, vektorikentän f ainoa tasapainopiste on $\approx (0.86, -0.20)$. Tässä pisteessä vektorikentän linearisoinnin ominaisarvot ovat $\approx 0.26 + 0.85i$, joten tasapainopiste on epävaka. Kuitenkaan kaikki radat eivät poistu äärettömyyksiin vaan näyttää siltä, että differentiaaliyhtälöllä $\dot{x} = f(x)$ on näillä parametreilla jaksollinen rata, joka kiertää tasapainopistettä. Koska ratkaisukäyrät eivät leikkaa epätriviaalisti, tasapainopisteen läheltä lähtevät ratkaisut pysyvät kompaktissa joukossa, joten radat kasautuvat jonnekin. Osoittautuu, että radat kasautuvat kohti puoleensavetävää jaksollista rataa.



Kuva 6.5: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisuja parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$. Kaikki kuvatut ratkaisut näyttävät lähestyvän jaksollista rataa, kun $t \rightarrow \infty$.

Tällaisessa systeemissä havaitaan jaksollista käyttäytymistä. Toisella jatkokurssilla perehdymme tarkemmin differentiaaliyhtälöiden asymptotiseen käyttäytymiseen ja siihen, miten ratkaisukäyrät voivat kasautua.



Kuva 6.6: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisujen ensimmäisen koordinaatin arvoja kolmella alkuarvolla parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$.

Harjoitustehtäviä

6.1. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = (x_1, \|x\|^2 - 1).$$

- Etsi differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteet.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Hahmottele vektorikenttää f ja kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisujen käyttäytymistä käsin tai Mathematicalla.

6.2. Olkoon $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -funktio. Osoita, että differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -\nabla V$ linearisoinneilla tasapainopisteissä on vain reaalisia ominaisarvoja.⁴

6.3. Olkoon $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2.$$

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = -\nabla V(x)$.

- Määritä differentiaaliyhtälön tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö tasapainopisteissä.
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Miten vektorikenttä $-\nabla V$ ja funktion V tasa-arvokäyrät suhtautuvat toisiinsa?
- Hahmottele differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä.

6.4. Analysoi epälineaarisen heilurin differentiaaliyhtälön (5.1) tasapainopisteiden linearisoinnit kitkan b eri arvoilla. Mitä tapahtuisi, jos kitkaa kuvaava parametri olisikin negatiivinen?

6.5. Määritä kitkattoman epälineaarisen heilurin differentiaaliyhtälön (5.1) ratkaisukäyrät. Miten alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta \\ v(0) = 2 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

ratkaisut käyttäytyvät, kun $t \rightarrow -\infty$ ja $t \rightarrow \infty$?

6.6. Esimerkissä 6.2 osoitimme, että Lotkan ja Volterran yhtälön ratkaisut ovat jaksollisia jollain tuntemattomalla jakson pituudella T . Määritä hain ja hainruoan populaatioiden keskiarvot $\frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt$ ja $\frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt$.⁵

⁴Vektoricalculus/analyysi ja Lineaarinen algebra ja geometria 2 auttavat.

⁵Tarkastele funktioiden $\frac{t}{r}$ ja $\frac{h}{r}$ integraaleja.

6.7. Kun Lotkan ja Volterran malliin lisätään populaatioiden sisäistä kilpailua kuvaavat termit, saadaan differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{r} = ar - bhr - er^2, \\ \dot{h} = -ch + dhr - fh^2, \end{cases}$$

missä $a, b, c, d, e, f > 0$. Miten ratkaisut käyttäytyvät?

6.8. Tarkastele differentiaaliyhtälön

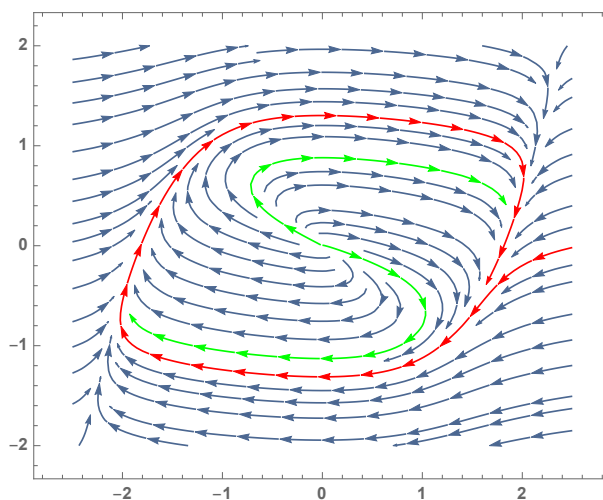
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} ax_1 - x_2 - ax_1\|x\|^2 \\ x_1 + ax_2 - ax_2\|x\|^2 \end{pmatrix}.$$

ratkaisuja, kun $a \in \mathbb{R}$.

6.9 (Van der Pol'n yhtälö). Van der Pol'n yhtälö kuvaa värähtelyilmiöitä, joita havaittiin 1920-luvulla eräissä tyhjiöputkia sisältävissä virtapiireissä. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä

$$f(x) = \begin{cases} c\left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2\right) \\ -\frac{x_1}{c} \end{cases},$$

missä $c > 0$ on parametri. Määritä vektorikentän f tasapainopisteet ja linearisoinnit tasapainopisteissä. Millä parametrin c arvoilla voit päätellä linearisoinnista differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ luonteen tasapainopisteen lähellä? Miten ratkaisut käyttäytyvät näissä tapauksissa?



Kuva 6.7: Van der Pol'n yhtälön ratkaisuja parametrilla $\mu = 2$.

Kirjallisuutta

- [Dur] J. R. Durbin. **Modern algebra**. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1986. An introduction.
- [Fit] R. FitzHugh. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. **Biophysical Journal**, 1(6):445 – 466, 1961.
- [Gre] W. Greub. **Linear algebra**. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 23.
- [Gro] S. Grossman. **Elementary linear algebra**. Saunders College Publishing, 1991.
- [Har] P. Hartman. **Ordinary differential equations**. Birkhäuser, Boston, Mass., second edition, 1982.
- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**, volume 60 of **Pure and Applied Mathematics**. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [HJ] R. A. Horn and C. R. Johnson. **Matrix analysis**. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [LGA] J. Leys, É. Ghys, and A. Alvarez. Chaos. A mathematical adventure. <http://www.chaos-math.org/en>.
- [Par] J. Parkkonen. Metriset avaruudet ja topologia. <http://users.jyu.fi/~parkkone/MetTop2018/Topo2018.pdf>, 2018.
- [Per] L. Perko. **Differential equations and dynamical systems**, volume 7 of **Texts in Applied Mathematics**. Springer-Verlag, New York, 1993. Corrected reprint of the 1991 original.
- [Tes] G. Teschl. **Ordinary differential equations and dynamical systems**, volume 140 of **Graduate Studies in Mathematics**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.