

# Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1

## Harjoitustyöt

Kirjoita selkeästi jäsennelty esitys yhdestä tehtävästä. Työssä on suotavaa käyttää lähdemateriaalia. Joitain lähteitä on mainittu tehtävänannossa, muitakin voi etsiä kirjastosta. Autan tarvittaessa esimerkiksi lähteiden tulkitsemisessä.

---

Harjoitustöitä käsitellään marraskuun puolivälin paikkeilla järjestettävässä tilaisuudessa, josta ilmoitetaan tarkemmin. Kurssin suoritus arvostellaan, kun harjoitustyö on palautettu.

---

### 1. Selosta yksityiskohtaisesti **Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälö:**

- Mitä malli kuvaa?
- Esitä ratkaisujen käyttäytyminen: koordinaattiakseleita lukuunottamatta kaikki alkuarvot määräävät jaksollisia ratoja, perustele tämä.
- Piirrä kuvia radoista.
- Osoita, että jaksollisella radalla haiden ja hainruoan populaatioiden keskiarvot ovat samat kuin tasapainopisteessä.
- Mitä vaikuttaa, jos mallia muutetaan niin, että malli ottaa huomioon populaation sisäisen kilpailun, ja tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} \dot{r} = ar - bhr - er^2, \\ \dot{h} = -ch + dhr - fh^2, \end{cases}$$

missä vakiot  $a, b, c, d, e$ , ja  $f$  ovat positiivisia?

Lähteet: Luennot, harjoitukset, [Bra] luku 4.10 [HSD] luku 11.2.

2. Luentojen luvussa 6 käsitellään **Grobmanin ja Hartmanin lausetta** epälineaarisen differentiaaliyhtälön ja sen linearisoinnin yhteydestä. Tämän lauseen mukaan  $C^1$ -vektorikentän antaman differentiaaliyhtälön ratkaisut ovat tasapainopisteen lähellä konjugaatteja yhtälön linearisoinnin kanssa.

- Osoita, että luentojen esimerkin 6.5 linearisointi toimii kuten siinä väitetään.
- Osoita, että tässä esimerkissä konjugoiva kuvaus ei voi olla  $C^1$ .

Lähteet: Luennot, harjoitukset, [Har], luku 9.

3. **Putzer** kehitti menetelmän matriisin eksponenttifunktion määrittämiseen ilman Jordanin kanonisen muodon käyttöä. Menetelmän todistuksessa käytetään lineaarisia autonomisia differentiaaliyhtälöitä ja Cayleyn ja Hamiltonin lausetta, jonka mukaan jokainen matriisi toteuttaa oman karakteristisen yhtälönsä.

- Todista Cayleyn ja Hamiltonin lause.
- Muotoile ja todista Putzerin tulos.
- Tee esimerkkejä.

Lähteet: Luennot, harjoitukset, [Apo], luvut 7.11, 7.13.

## LÄHTEITÄ

- [Apo] Tom M. Apostol. *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*. Second edition. Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1969.
- [Bra] Martin Braun. *Differential equations and their applications*, volume 11 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1993. An introduction to applied mathematics.
- [Har] Philip Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:610–620, 1960.
- [HSD] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.