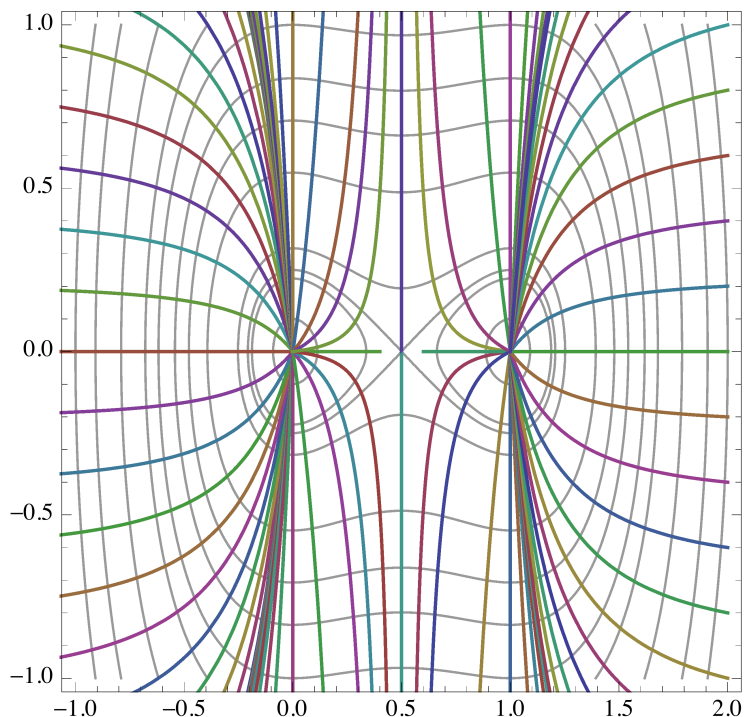


# DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN JATKOKURSSI SYKSY 2014

JOUNI PARKKONEN



Tämä teksti sisältää syksyn 2014 kurssien Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 ja 2 materiaalin. Ensimmäisellä jatkokurssilla tutustutaan differentiaaliyhtälöryhmien teoriaan erityisesti lineaaristen systeemien kautta. Tällä kurssilla myös todistetaan epälineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause ja aloitellaan epälineaaristen yhtälöiden ratkaisujen tarkastelua. Pääasiassa tarkastellaan autonomisia yhtälöitä kuten myös jälkimmäisessä osassa.

Jälkimmäinen kurssi on syventävämpää materiaalia. Tällä kurssilla tutustutaan epälineaaristen yhtälöiden kvalitatiiviseen teoriaan ja tarkastellaan ratkaisujen asymptotista käyttäytymistä. Kurssin lopussa todistetaan Poincarén ja Bendixsonin lause, joka antaa melko tarkan kuvan tason systeemien käyttäytymisestä. Tällä kurssilla autonomisia differentiaaliyhtälöitä tarkastellaan tavalla, joka liittyy ne osaksi dynaamisten systeemien teoriaa.

Molemmilla kursseilla edellytetään differentiaali- ja integraalilaskennan ja lineaarialgebran osaamista tasolla, joka saavutetaan näiden alojen peruskursseilla. On myös hyvä osata tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä yksiulotteisessa tapauksessa. Jälkimmäisellä kurssilla käytetään joitain edistyneempiä metristen avaruuksien tuloksia mutta topologian kurssin tiedot eivät ole tälläkään kurssilla välttämätön esitieto.

Olen pyrkinyt havainnollistamaan käsiteltävää teoriaa runsailla esimerkeillä ja kuvituksella. Tekstin lopussa olevassa lähdeluettelossa on monia kurssin materiaalia tukevia ja laajentavia lähteitä. Erityisesti näistä nousevat esille [Har2],[HSD] ja [Per]. Näiden lisäksi suosittelen elokuvaa Chaos [LGA].

## SISÄLTÖ

1. Johdanto	3
Harjoitustehtäviä	10
2. Tason lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt	11
2.1. Lineaarialgebraa	11
2.2. Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit	13
2.3. Kompleksista lineaarialgebraa	17
2.4. Parametrisoituja perheitä	20
Harjoitustehtäviä	22
3. Lineaariset differentiaaliyhtälöt korkeammissa ulottuvuuksissa	23
3.1. Konjugointi kanoniseen muotoon	23
3.2. Matriisien eksponenttifunktio	26
3.3. Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaiseminen	30
Harjoitustehtäviä	32
4. Epälineaariset differentiaaliyhtälöt	34
4.1. Kutistavat kuvaukset metrisessä avaruudessa	34
4.2. Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause	35
Harjoitustehtäviä	40
5. Vakion variointi	41
Harjoitustehtäviä	44
6. Epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen lokaalia tarkastelua	45
Harjoitustehtäviä	50
7. Differentiaaliyhtälön virtaus	52
Harjoitustehtäviä	56
8. Virtauksen sileys ja Peanon olemassaololause	57
Harjoitustehtäviä	62
9. Maksimaalinen määrittelyväli ja rataekvivalenssi	63
9.1. Maksimaalinen määrittelyväli	63
9.2. Rataekvivalenssi	64
Harjoitustehtäviä	67
10. Lineaaristen yhtälöiden vakaus	68
Harjoitustehtäviä	72
11. Epälineaarisen yhtälön tasapainopisteen vakaus	73
Harjoitustehtäviä	81
12. Vakaa ja epävakaa monisto	82
Harjoitustehtäviä	85
13. Ratkaisujen globaali käyttäytyminen	87
Harjoitustehtäviä	92
14. Lopuksi	93
Viitteet	95

## 1. JOHDANTO

Olkoot  $U \subset \mathbb{R}^n$  ja  $I \subset \mathbb{R}$  avoimia joukkoja ja olkoon  $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (jatkuva) kuvaus. Tällä kurssilla tarkastelemme (ensimmäisen kertaluvun) *differentiaaliyhtälöryhmiä*

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x, t),$$

ja niihin liittyviä alkuarvotehtäviä, joissa vaaditaan lisäksi  $x(t_0) = x_0$  joillain  $x_0 \in U$  ja  $t_0 \in I$ . Merkintä  $\dot{x}(t) = x'(t)$  tarkoittaa vektoriarvoisen kuvauksen  $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , derivaattaa. Komponenteittain kirjoitettuna differentiaaliyhtälöryhmä (1) on

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases}$$

Yleensä kutsumme differentiaaliyhtälöryhmää yksinkertaisemmin *differentiaaliyhtälöksi* tai *systemiksi*. Differentiaaliyhtälön muotoilussa kuvauksen  $f$  määrittelyjoukko jätetään usein hieman epämääräiseksi.

Differentiaaliyhtälön (1) ratkaisu alkuarvolla  $x(t_0) = x_0$  eli *alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva kuvaus  $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  joltain avoimelta väliltä  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , jolle pätee  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  kaikilla  $t \in \Delta$  ja  $x(t_0) = x_0$ .

Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan  $t$  arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois ja tarkastellaan kuvauksen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  määräämää *autonomista* differentiaaliyhtälöä

$$(3) \quad \dot{x} = f(x).$$

Kun tarkastellaan autonomisen alkuarvotehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  ratkaisua maksimaalisella määrittelyvälillä  $I \subset \mathbb{R}$ , joukkoa  $x(I)$  kutsutaan usein pisteen  $x_0$  *radaksi*.

Parametriä  $t$  kutsutaan usein ajaksi ja differentiaaliyhtälön ajatellaan kuvaavan jonkin systeemin tilan  $x$  kehittymistä ajan kuluessa. Monissa esimerkiksi fysiikasta tai biologiasta tulevissa differentiaaliyhtälöissä tilanne on juuri tämä.

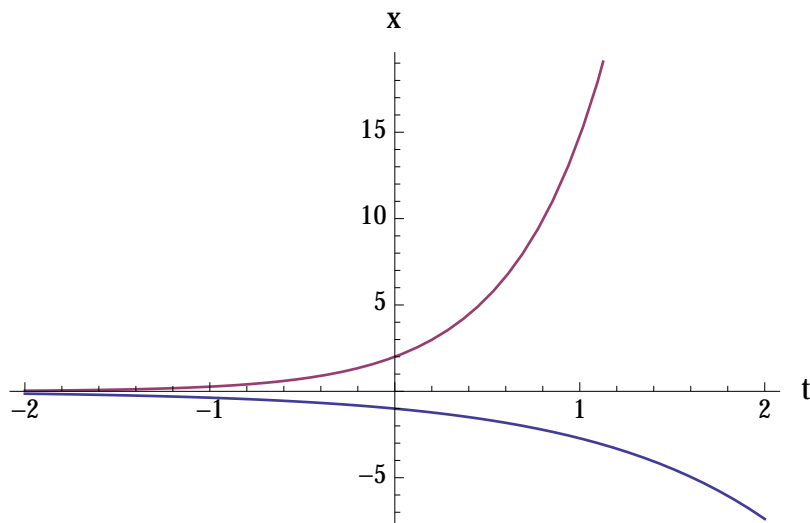
Joissakin tapauksissa differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista täydellisesti niin, että ratkaisulle voidaan antaa täsmällinen lauseke. Tärkeimpänä esimerkkinä tällaisista systeemeistä tarkastelemme ensimmäisen kurssin alkupuolella lineaarisia autonomisia yhtälöitä. Yleisessä epälineaarissa tapauksessa käsittelemme jonkin verran ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyskysymyksiä ja erityisesti ensimmäisen kurssin lopulla ja toisella kurssilla tutkimme ratkaisujen lokaalia ja globaalia käyttäytymistä.

Tässä johdantoluvussa tutustumme muutamiin esimerkkeihin erilaisista differentiaaliyhtälöistä ja niiden sovelluksista. Tutustumme terminologiaan ja autonomisten yhtälöiden geometriseen tulkintaan ja aloitamme myös hieman teoreettista tarkastelua.

**Esimerkki 1.1.** (1) Olkoot  $\lambda, a \in \mathbb{R}$ . Lineaarisen alkuarvotehtävän

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ x(0) = a \end{cases}$$

ratkaisu on  $x(t) = ae^{\lambda t}$ . Kuvassa ratkaisut parametrien arvoilla  $\lambda = a = 2$  ja  $\lambda = 1$ ,  $a = -1$ .



Alkuarvotehtävän (4) ratkaisu voidaan määrittellä koko reaaliakselilla. Tämä alkuarvotehtävä liittyy populaatioiden kehityksen varhaiseen mallintamiseen. Jos  $x$  kuvaa populaation kokoa, *Malthusin lain* mukaan populaation kasvuvauhti on suoraan verrannollinen populaation kokoon.

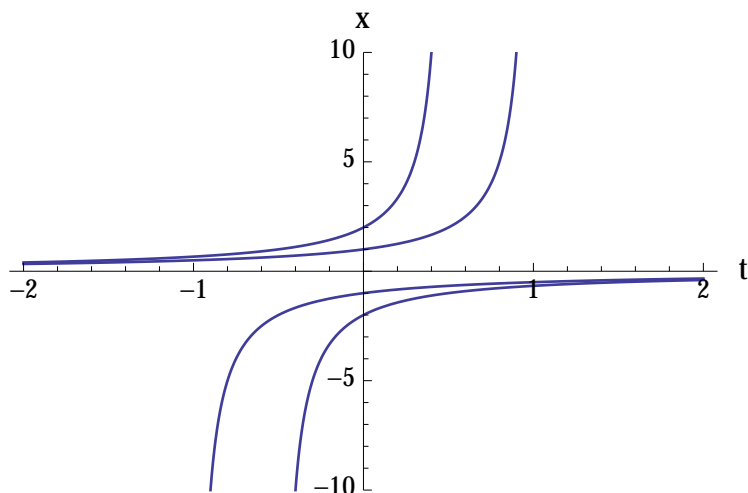
Verhulst korjasi Malthusin mallia ottamalla huomioon sen, että tarkasteltava ympäristö ei voi elättää rajattoman suurta populaatiota. Verhulstin mallia kuvaa *logistinen differentiaaliyhtälö*

$$(5) \quad \dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

(2) Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = a \end{cases},$$

missä  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ , ratkaisu  $x(t) = \frac{a}{1-at}$  “räjähtää äärellisessä ajassa tulevaisuudessa tai menneisyydessä” vaikka yhtälön oikean puolen funktion  $x \mapsto x^2$  on määritelty koko reaalityöjoukossa.

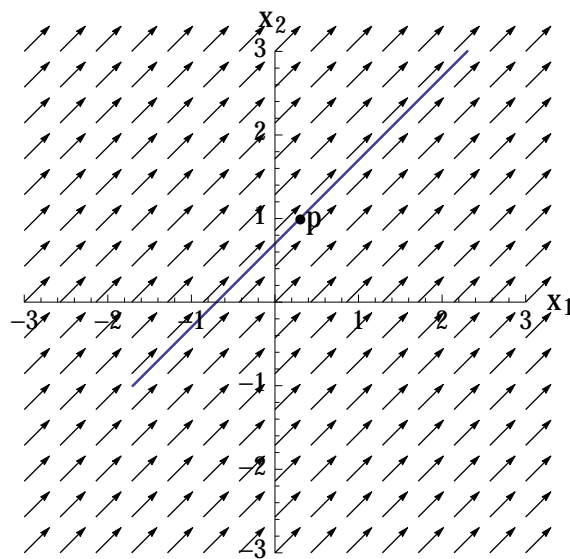


**Autonomisen differentiaaliyhtälön geometrinen tulkinta:** Autonomisen differentiaaliyhtälön (3) oikean puolen kuvaus  $f$  määrää *vektorikentän* joukossa  $U$ .

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva polku joukossa  $U$ , jonka tangenttivektori  $\dot{x}(t)$  pisteessä  $x(t)$  on vektorikentän  $f$  arvo tuossa polun pisteessä. Lisäksi polku kulkee pisteen  $x_0$  kautta ja toteuttaa  $x(t_0) = x_0$ .

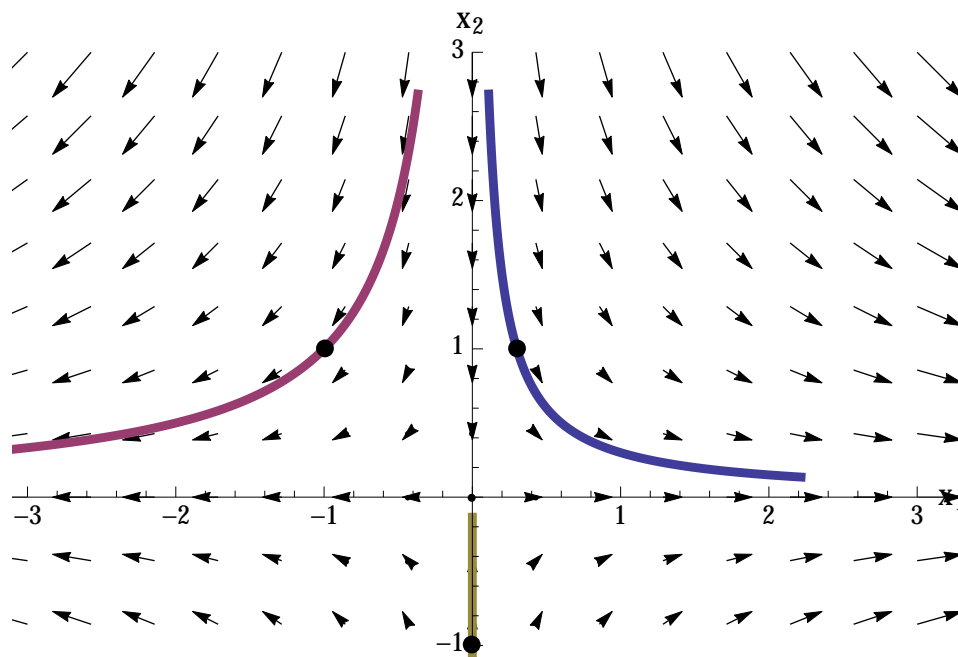


KUVA 1. Vakiovektorikenttä  $f(x) = (1, 1)$  tasossa ja alkuarvotehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = p = (0.3, 1)$  ratkaisu aikavälillä  $t \in ] - 2, 2]$ .

**Esimerkki 1.2.** Olkoot  $\lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{R}$ . Tason alkuarvotehtävän

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = a, \\ x_2(0) = b, \end{cases}$$

ratkaisu on Esimerkin 1.1 kohdan (1) mukaan  $\begin{cases} x_1(t) = ae^{\lambda_1 t}, \\ x_2(t) = be^{\lambda_2 t} \end{cases}$ . Kun  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , ratkaisut käyttäytyvät kuten kuvassa, jossa on esitetty osia kolmesta radasta:



Jos alkuarvo on  $x_i$ -akselilla,  $i \in \{1, 2\}$ , niin koko rata sisältyy  $x_i$ -akseliin. Erityisesti vakiokuvaus 0 on ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = 0$ . Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät  $x_1$ -akselia, kun  $t \rightarrow \infty$  ja  $x_2$ -akselia, kun  $t \rightarrow -\infty$ .

Differentiaaliyhtälö (6) voidaan esittää matriisimuodossa: Asetetaan

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ja  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Tällöin yhtälö (6) saadaan matriisimuotoon  $\dot{x} = Ax$ .

**Esimerkki 1.3.** Kiinnitetään ideaalinen jousi seinään toisesta päästään. Kiinnitetään jousen toiseen päähän pistemäinen paino, jonka massa on  $m$ . Ajatellaan, että jousen liike on rajoitettu parametrilla  $x$  parametrisoidulle viivalle, jota pitkin sitä voi vetää tai painaa kokoon. Olkoon jousen toinen pää pisteessä  $x = 0$ . Kun joustava venytetään tai painetaan kasaan, se vastustaa siirtymää voimalla  $-kx$ , missä  $k > 0$  on *jousivakio*. Jousi aiheuttaa siis tarkasteltavalle painolle kiihtyvyyden yhtälöllä  $m\ddot{x} = -kx$ . Tämä on *harmonista värähtelijää* kuvaava toisen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö.

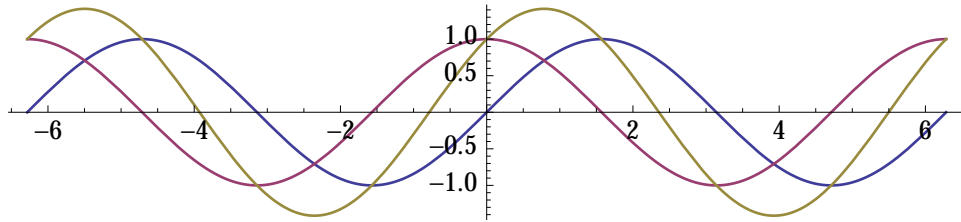
Erikoistapauksen  $m = k = 1$

$$(7) \quad y''(t) + y(t) = 0$$

kaikki ratkaisut saadaan funktioiden  $\sin$  ja  $\cos$  lineaarikombinaatioina. Jokaisella alkuarvottehtävällä

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b, \end{cases}$$

on koko avaruudessa  $\mathbb{R}$  määritelty ratkaisu  $y(t) = a \cos t + b \sin t$ :



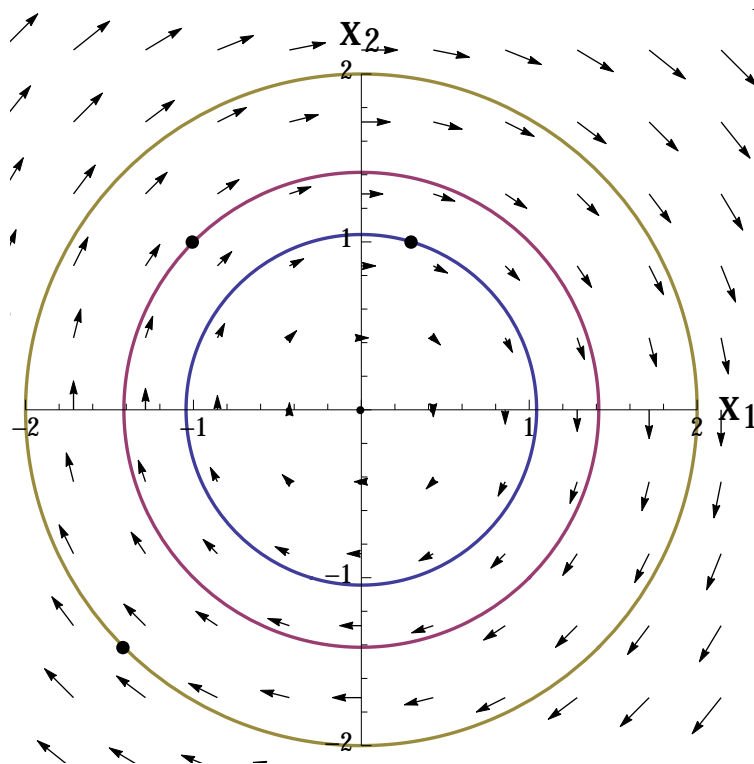
Differentiaaliyhtälö (7) voidaan muuntaa tason differentiaaliyhtälöksi: Asetetaan  $x_1 = y$  ja  $x_2 = y'$ . Tällöin siis yhtälö (7) on

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Matriisimuodossa yhtälö (8) on siis  $\dot{x} = Ax$ , missä  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Yhtälö(pari)n (8) ratkaisu on siis luettavissa edeltä: Yleinen ratkaisu on

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälön (8) vektorikenttä  $f(x) = Ax$  ja ratkaisut alkuarvoilla  $x_0 = (0.3, 1)$ ,  $x_0 = (-1, 1)$  ja  $x_0 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ :



Esimerkin 1.3 menettely yleistyy korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöille: Kertaluvun  $m$  differentiaaliyhtälö

$$(9) \quad y^{(m)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, t)$$

muunnetaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi asettamalla  $y_i = y^{(i)}$  jokaiselle  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ . Tällöin differentiaaliyhtälön (9) sijaan voidaan tutkia  $m$  yhtälön ryhmää

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \text{ kaikilla } 0 \leq i \leq m-2 \\ \dot{x}_{m-1} = f(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, t). \end{cases}$$

Asettamalla  $z = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$  ja  $F(z, t) = (y_1, y_2, \dots, y_m, f(z, t))$ , saadaan yhtälö (10) muotoon

$$\dot{z} = F(z, t).$$

Voimme itse asiassa aina olettaa, että differentiaaliyhtälö on autonominen: Oletetaan, että  $n$  muuttujan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$(11) \quad \dot{x} = f(x, t)$$

ei ole autonominen. Määritellään  $x_n = t$  ja tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x) \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Kuvaus  $t \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  on differentiaaliyhtälön (11) ratkaisu, jos ja vain jos  $t \mapsto (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  on differentiaaliyhtälön (12) ratkaisu.

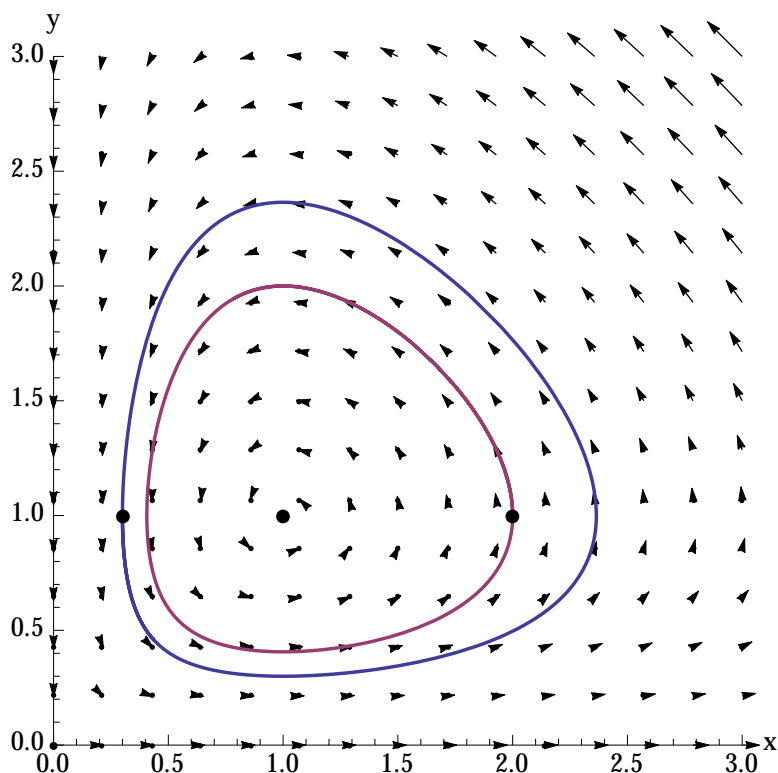
Tällä kurssilla tarkastelemme lähinnä autonomisia ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

**Esimerkki 1.4** (Lotka-Volterra). Tarkastellaan esimerkkiä differentiaaliyhtälöiden käytöstä biologisen tilanteen mallittamisessa. Meressä on kahdenlaisia kaloja: haita ja hainruokaa. Olkoon haitten lukumäärä  $h$  ja hainruoan lukumäärä  $r$ . Oletetaan, että ilman haita hainruoan populaatio kehittyisi Esimerkissä 1.1(1) käsitellyn Malthusin lain mukaan eksponentiaalisesti yhtälön  $\dot{r} = ar$  mukaan, missä  $a$  on positiivinen vakio. Hain ja hainruoan kohtaamisia tapahtuu  $b_0hr$  kappaletta ja jollain todennäköisyydellä hai syö hainruoan. Siis hainruoan määrä vähenee nopeudella  $bhr$ . Vastaavasti haitten lukumäärän luonnollinen poistumanopeus on suhteessa lukumäärään  $ch$  ja ruoan saanti kasvattaa populaatiota nopeudella  $dhr$ . Näiden kahden lajin lukumääriä säätelee tämän päättelyn mukaisesti differentiaaliyhtälöpari

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{r} = ar - bhr, \\ \dot{h} = -ch + dhr \end{cases}$$

joillain positiivisilla vakioilla  $a, b, c, d$ .





Osoittautuu, että positiivisilla alkuarvoilla ratkaisut ovat jaksollisia:  $x(t + T) = x(t)$  kaikilla  $t \in \mathbb{R}$  jollain  $T \in \mathbb{R}$ . Lisäksi alkuarvoa  $(c/d, a/b)$  vastaa vakioratkaisu: Nythän

$$f(r, h) = (ar - bhr, -ch + dhr) = ((a - bh)r, (dr - c)h),$$

joten

$$f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \left(\left(a - b\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d}, \left(d\frac{c}{d} - c\right)\frac{a}{b}\right) = 0.$$

Vakiokuvauksen  $t \mapsto (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  derivaatta on nolla, joten se toteuttaa differentiaaliyhtälön (13).

Vektorikentän  $f$  nollakohdat ovat differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopisteitä (equilibrium point). Esimerkissä 1.4 teimme pienen mutta tärkeän havainnon:

**Lemma 1.5.** *Jos  $x_0$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopiste, niin vakiokuvaus  $t \mapsto x_0$  on alkuarvottehtävän  $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t) = x_0 \end{cases}$  ratkaisu.*  $\square$

Todistamme kurssilla myöhemmin tuloksen, joka kertoo, milloin alkuarvottehtävällä on täsmälleen yksi ratkaisu. Tulos yleistää kurssilla Differentiaaliyhtälöt todistetun 1-ulotteisen tuloksen:

**Lause 1.6** (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). *Olkkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkkoon  $f \in C^1(U)$ . Olkkoon  $x_0 \in U$ . Tällöin alkuarvottehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on määritelty jollain avoimella välillä  $] - \delta, \delta[$ .*

Jos Lauseen 1.6 oletukset eivät ole voimassa, niin alkuarvottehtävällä voi olla useita eri ratkaisuja kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 1.7.** Alkuarvototehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

on äärettömän monta ratkaisua  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : esimerkiksi vakiofunktio  $0(t) = 0$  ja funktiot

$$x_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq c \\ (t - c)^3, & \text{kun } x \geq c \end{cases}$$

ovat kaikki ratkaisuja. Tässä esimerkissä vektorikenttä  $f_{2/3}(x) = x^{2/3}$  on jatkuva, mutta se ei ole differentioituva pisteessä  $x = 0$ . Sama havainto voidaan tehdä kaikille vektorikentille  $f_\alpha(x) = x^\alpha$ , kun  $0 < \alpha < 1$ . Esimerkissä 1.1 käsitelty vektorikenttä  $f_1$  on  $C^1$  ja ratkaisu on yksikäsitteinen Lauseen 1.6 nojalla.

**Harjoitustehtäviä.**

**1.1.** Ratkaise logistinen differentiaaliyhtälö (5) parametrilla  $K = 1$  ja tarkastele sen ratkaisujen käyttäytymistä eri alkuarvoilla, kun  $t \rightarrow \infty$ .

**1.2.** Tarkastellaan vektorikenttää  $f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = -\frac{x}{\|x\|}$ .

- (1) Hahmottele kuva vektorikentästä  $f$ .
- (2) Voiko vektorikentän  $f$  jatkaa koko tasossa  $\mathbb{R}^2$  määritellyksi jatkuvaksi vektorikentäksi?
- (3) Olkoon  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $x_0 \neq 0$ . Osoita, että lauseke

$$x(t) = x_0 - t \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

on alkuarvototehtävän

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu.

- (4) Piirrä kuva muutamasta ratkaisusta alkuarvon  $x_0$  eri arvoilla.
- (5) Mikä on alkuarvototehtävän (14) ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli?

**1.3.** Olkoon  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Tarkastele alkuarvototehtävää

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ja osoita, että ratkaisut eivät yleensä ole koko reaaliakselilla määriteltyjä.

**1.4.** Olkoon  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Tarkastele alkuarvototehtävää

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x} = x\|x\|, \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

- (1) Hahmottele kuva vektorikentästä.
- (2) Ratkaise alkuarvototehtävä.
- (3) Kuvaile ratkaisujen käyttäytymistä.

## 2. TASON LINEAARISET AUTONOMISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Olkoon  $A$  reaalinen  $n \times n$ -matriisi. Differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = Ax$  on *lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö* ja  $A$  on sen *kerroinmatriisi*. Johdannossa tarkastelimme kahta tason lineaarista autonomista differentiaaliyhtälöä, joiden ratkaisut käyttäytyvät selvästi eri tavoin:

- Esimerkissä 1.2 kerroinmatriisi on  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ,  $\mu < 0 < \lambda$  ja differentiaaliyhtälön radat ovat rajoittamattomia muilla alkuarvoilla kuin  $x_0 = 0$ . Jos alkuarvo  $x_0$  ei ole kummallakaan koordinaattiakselilla, niin  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ , kun  $t \rightarrow \infty$  tai  $t \rightarrow -\infty$ .
- Esimerkissä 1.3 kerroinmatriisi on  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ja kaikki radat ovat rajoitettuja.

Lineaarisia autonomisia differentiaaliyhtälöitä voi käsitellä lineaarialgebran keinoilla ja eksakti ratkaiseminen on periaatteessa mahdollista kaikissa tapauksissa. Tässä luvussa luokittelemme kaikki tason autonomiset lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt. Tätä varten kertaamme ja laajennamme lineaarialgebran kurssien antamia tietoja. Kurssimateriaalien lisäksi tässä ja seuraavassa luvussa käsiteltäviin asioihin voi perehtyä esimerkiksi lähteiden [Gre], [Gro] tai [HJ] avulla.

**2.1. Lineaarialgebraa.** Jos  $A$  on reaalinen  $n \times n$ -matriisi, niin vektori  $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  on matriisin  $A$  *ominaisvektori* ominaisarvolla  $\lambda \in \mathbb{R}$ , jos  $Av = \lambda v$ . Ominaisvektori on siis nollasta poikkeava vektori matriisia  $A - \lambda I$  standardikannassa vastaavan lineaarikuvauksen ytimessä. Tästä nähdään, että matriisin  $A$  reaaliset ominaisarvot ovat matriisin  $A$  *karakteristisen polynomin*

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

reaaliset juuret. Kurseilla LAG1 ja LAG2 on tapana käsitellä ainoastaan reaalisia ominaisarvoja, mutta tällä kurssilla on luontevaa käsitellä myös karakteristisen polynomin kompleksisia juuria. Kutsumme näitäkin matriisin  $A$  ominaisarvoiksi, erityisesti *kompleksisiksi ominaisarvoiksi*. Jos  $\lambda$  on reaalisen matriisin  $A$  ominaisarvo, niin myös sen kompleksikonjugaatti  $\bar{\lambda}$  on ominaisarvo. Tämä on helppo nähdä, koska karakteristisen polynomin kertoimet ovat reaalisia. Mikään vektori  $v \in \mathbb{R}^n$  ei ole kompleksista ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

Karakteristisen polynomin aste on  $n$ , joten Algebran peruslauseen (todistetaan kurseilla Lukualueet ja Kompleksianalyysi 1) mukaan karakteristisella polynomilla on kertaluku huomioiden  $n$  juurta. Ominaisarvon kertaluku karakteristisen polynomin juurena on sen *algebrallinen kertaluku*.

Matriisin  $A$  reaalista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaavat ominaisvektorit muodostavat nollavektorin kanssa *ominaisavaruuden*

$$E_\lambda = E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}.$$

Ominaisavaruuden  $E_\lambda$  dimensio on ominaisarvon  $\lambda$  *geometrinen kertaluku*.

**Esimerkki 2.1.** (1) Matriisilla  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ei ole reaalisia ominaisarvoja. Sen karakteristinen polynomi on

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

joten sillä on kompleksiset ominaisarvot  $i$  ja  $-i$ .

(2) Matriisilla  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  on yksi algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo 1. Ominaisarvon 1 geometrinen kertaluku on 1: Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä  $Av = v$  kutistuu yhtälöksi  $v_2 = 0$ , joka määrää 1-ulotteisen aliavaruuden.

Lineaarialgebrassa (LAG2) osoitetaan, että  $2 \times 2$ -matriisi  $B$  on diagonalisoituva, jos sillä on kaksi eri (reaalista) ominaisarvoa. Toisaalta  $2 \times 2$ -matriisi voi olla diagonalisoituva vaikka sillä olisi vain yksi ominaisarvo ( $\lambda = \mu$  Esimerkissä 1.2) ja esimerkiksi matriisilla  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ei selvästi ole yhtään ominaisvektoria eikä siis yhtään reaalista ominaisarvoa, koska sitä standardikannassa vastaava lineaarikuvaus on kierto myötapäivään kulman  $\pi/2$  verran.

Jos  $n \times n$ -matriisi  $A$  on diagonalisoituva, niin vektoriavaruudella  $\mathbb{R}^n$  on kanta, joka koostuu matriisin  $A$  (tai sitä vastaavan lineaarikuvauksen  $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, L_A v = Av$ ) ominaisvektoreista. Tässä tapauksessa ominaisavaruuksien dimensioiden summa on  $n$ . Lineaarialgebran kursseilla osoitetuista tuloksista saadaan suoraan:

**Lemma 2.2.**  $n \times n$ -matriisi  $A$  on diagonalisoituva, jos ja vain jos sen ominaisarvojen geometrinen kertalukujen summa on  $n$ .  $\square$

Jos  $A$  ja  $B$  ovat reaalisia  $n \times n$ -matriiseja ja  $C$  on kääntyvä reaalinen  $n \times n$ -matriisi, jolle  $B = CAC^{-1}$ , niin  $A$  ja  $B$  ovat toistensa konjugaatteja ja  $C$  on konjugoiva matriisi. Diagonalisoituva matriisi on siis jonkin diagonaalimatriisin konjugaatti. Lineaarialgebrassa osoitetaan seuraava tulos:

**Lause 2.3.** Olkoot  $A$  ja  $B$  reaalisia  $n \times n$ -matriiseja, joille pätee  $A = CBC^{-1}$  jollain kääntyvällä reaalilla  $n \times n$ -matriisilla  $C$ . Tällöin

- (1) matriiseilla  $A$  ja  $B$  on samat ominaisarvot.
- (2) matriisia  $C$  vastaava lineaarikuvaus kuvaa matriisin  $B$  ominaisavaruudet bijektiivisesti matriisin  $A$  ominaisavaruuksiksi.
- (3)  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .
- (4)  $\det A = \det B$ .  $\square$

**Lemma 2.4.** Jos  $A$  on  $2 \times 2$ -matriisi, niin

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{tr } A + \det A. \quad \square$$

Toisen asteen polynomin juurten kaava antaa nopean tavan selvittää ominaisarvot ja niiden laadut:

**Propositio 2.5.** Olkoon  $A$  reaalinen  $2 \times 2$ -matriisi.

- (1) Jos  $\det A < 0$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi erimerkkistä ominaisarvoa.
- (2) Jos  $\det A > 0$  ja  $\text{tr}^2 A \geq 4 \det A$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi samanmerkkistä ominaisarvoa.
- (3) Jos  $\det A > 0$  ja  $\text{tr}^2 A < 4 \det A$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi kompleksista ominaisarvoa, jotka ovat toistensa liittolukuja.
- (4) Jos  $\det A = 0$ , niin ainakin toinen ominaisarvo on 0. Tällöin mahdollinen nollasta poikkeava ominaisarvo on reaalinen.  $\square$

Seuraava tulos antaa jokaiselle reaalille  $2 \times 2$ -matriisille perusmuodon, joka on kyseisen matriisin konjugaatti.

**Lause 2.6** (2-ulotteinen konjugointilause). Olkoon  $A$  reaalinen  $2 \times 2$ -matriisi. Tällöin on kääntyvä reaalinen  $2 \times 2$ -matriisi  $C$ , jolle matriisi  $CAC^{-1}$  on

- (1) diagonaalimatriisi, jos matriisilla  $A$  on kaksi eri reaalista ominaisarvoa tai yksi geometrisesti kaksinkertainen reaalinen ominaisarvo,

(2) muotoa  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , jos matriisilla  $A$  on yksi geometrisesti yksinkertainen reaalinen ominaisarvo ja

(3) vinosymmetrinen muotoa  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , jos matriisilla  $A$  ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin matriisin  $A$  kompleksiset ominaisarvot ovat  $\alpha \pm i\beta$ .

*Todistus.* (1) Jos matriisilla  $A$  on kaksi eri reaalista ominaisarvoa, diagonalisoituvuus on todistettu kurssilla LAG2. Tapaus, jossa matriisilla  $A$  on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo on selvä: Kaikille vektoreille  $v \in \mathbb{R}^2$  pätee  $Av = \lambda v$  samalla  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Siis matriisi  $A$  on diagonaalinen.

(2) Oletetaan, että matriisilla  $A$  on algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , jonka geometrinen kertaluku on 1. Olkoon  $u$  jokin ominaisvektori, jolle siis pätee  $Au = \lambda u$ . Olkoon  $v \in \mathbb{R}^2$  mikä tahansa vektori siten, että  $u$  ja  $v$  virittävät koko tason  $\mathbb{R}^2$ . Tällöin  $Av = \mu u + \nu v$  joillekin  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \neq 0$ . Jos olisi  $\nu \neq \lambda$ , niin

$$A(\mu u + (\nu - \lambda)v) = \lambda\mu u + (\nu - \lambda)(\mu u + \nu v) = \nu(\mu u + (\nu - \lambda)v),$$

joten  $\nu \neq \lambda$  olisi ominaisarvo vastoin oletusta. Siispä  $Av = \mu u + \lambda v$ . Valitaan kannaksi  $u$  ja  $w = v/\mu$ . Tällöin  $Au = \lambda u$  ja

$$Aw = \mu u/\mu + \lambda v/\mu = u + \lambda w,$$

joten matriisi on tässä kannassa haluttua muotoa.

Palaamme väitteen (3) todistukseen Luvussa 2.3. □

**2.2. Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit.** Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä konjugointi on usein kätevä väline seuraavan ominaisuuden vuoksi

**Lemma 2.7** (Muuttujanvaihtolemma). *Olkoot  $A$  ja  $B$   $n \times n$ -matriiseja, joille pätee  $A = CBC^{-1}$  jollain kääntyvällä  $n \times n$ -matriisilla  $C$ . Jos  $x$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = x_0$ , niin  $y = Cx$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  ratkaisu alkuarvolla  $y(0) = Cx_0$ .*

*Todistus.* Ketjusäännön (Differentiaalilaskenta 1) nojalla

$$\dot{y} = C\dot{x} = CBx = CBC^{-1}y. \quad \square$$

Muuttujanvaihtoleman avulla voimme ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälön, jos tunnemme ratkaisun sen kerroinmatriisin jotain konjugaattia vastaavalle differentiaaliyhtälölle.

**Esimerkki 2.8.** Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2 ja  $-2$ . Sen ominaisavaruuksien saadaan ratkaisemalla yhtälöparit  $Av = 2v$  ja  $Av = -2v$ , jotka antavat vastaaville ominaisvaruuksille yhtälöt  $v_1 = 3v_2$  ja  $v_1 = -v_2$ . Matriisi  $A$  voidaan diagonalisoida esimerkiksi matriisilla

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jonka sarakkeet  $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ja  $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ovat ominaisvektoreita. Nythän, jos  $B = \tilde{C}^{-1}A\tilde{C}$ , niin

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}^{-1}A\tilde{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}^{-1}Aw_1 = \tilde{C}^{-1}2w_1 = 2\tilde{C}^{-1}w_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

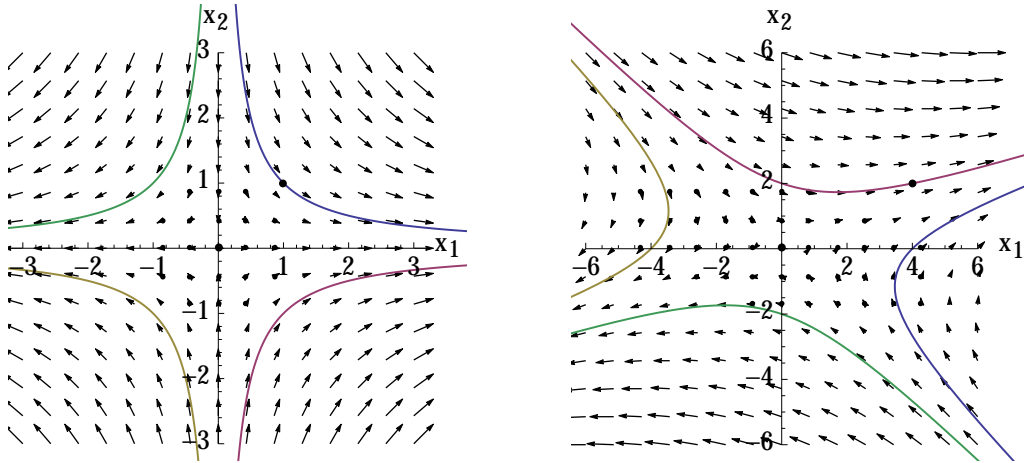
ja vastaavasti

$$(16) \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx, \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$$

ratkaisu tunnetaan, se on  $x(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{-2t} \end{pmatrix}$ .



KUVA 2. Kaksi satulaa

Lemman 2.7 mukaan

$$y(t) = \tilde{C}x(t) = \begin{pmatrix} 3ae^{2t} + be^{-2t} \\ ae^{2t} - be^{-2t} \end{pmatrix}$$

on alkuarvotehtävän

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{y} = Ay, \\ y(0) = \tilde{C} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$$

ratkaisu.

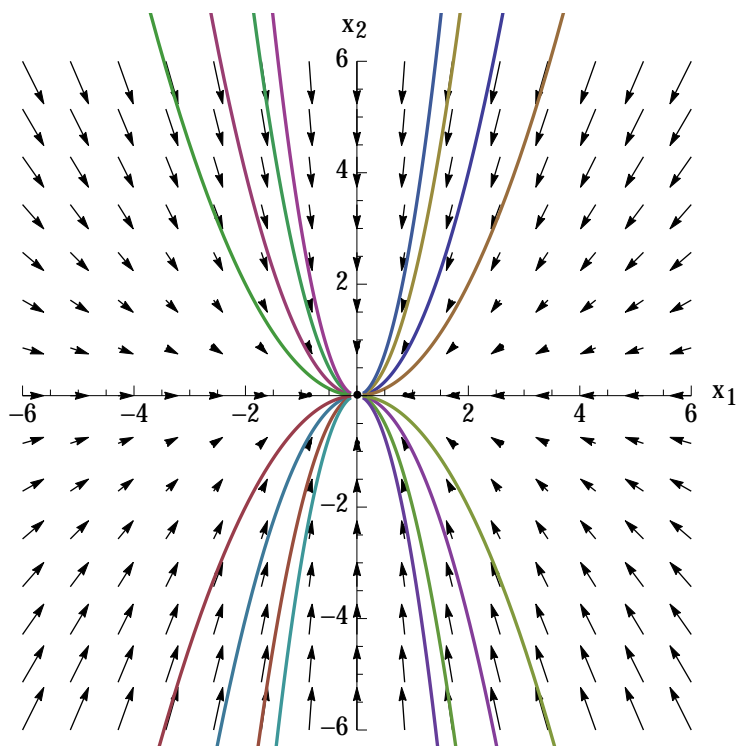
Matriisia  $\tilde{C}$  vastaava lineaarikuvaus on siis muuttujanvaihto, joka liittää alkuarvotehtävät (16) ja (17) ja niiden ratkaisut toisiinsa.

Ratkaisemme nyt lineaariset differentiaaliyhtälöt  $\dot{x} = Ax$  kaikissa konjugointilauseen 2.6 antamissa perustilanteissa. Näiden ratkaisujen ja Lemman 2.7 avulla voidaan ratkaista kaikki 2-ulotteiset lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt. Seuraavassa  $A$  on siis reaalinen  $2 \times 2$ -matriisi:

**Matriisi  $A$  on diagonalisoituva.** Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  ratkaisut saadaan eksponenttifunktion avulla kuten Esimerkeissä 1.1 ja 2.8. Ratkaisuja on ominaisarvojen merkeistä riippuen kolmea erilaista tyyppiä:

(1) Jos matriisilla  $A$  on kaksi ominaisarvoa, jotka ovat erimerkkisiä, ratkaisut käyttäytyvät kuten esimerkissä 2.8. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *satulaksi*, katso kuvia Esimerkissä 2.8.

(2) Jos matriisilla  $A$  on kaksi negatiivista ominaisarvoa  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$ , ratkaisut saadaan samalla tavalla kuin esimerkissä 2.8. Ratkaisujen käyttäytyminen on kuitenkin



KUVA 3. Nielu

erilaista:  $A$  on konjugaatti diagonaalimatriisiin  $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  kanssa. Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisut alkuarvoilla, jotka ovat koordinaattiakseleilla, lähestyvät origoa eksponentiaalisesti akselia pitkin, kun  $t \rightarrow \infty$ . Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät myös origoa, mutta kuvan mukaisia käyriä pitkin. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *nieluksi*.

(3) Jos matriisilla  $A$  on kaksi positiivista ominaisarvoa  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$ , ratkaisukäyrät ovat kuten nielulla, mutta ratkaisut liikkuvat vastakkaiseen suuntaan. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *lähteeksi*. Kuva on samanlainen kuin nielun tapauksessa mutta vektorikenttä osoittaa jokaisessa pisteessä vastakkaiseen suuntaan ja ratkaisut liikkuvat käyrillä päinvastaiseen suuntaan kuin nielun tapauksessa.

Jos matriisi  $A$  on diagonaalinen, on helppo tarkastaa, että jokaisella koordinaattiakselien ulkopuolisella alkuarvolla  $x_0 = (x_{01}, x_{02})$  saatavat differentiaaliyhtälön radat ovat yhtälön

$$(18) \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_{01}(t) \end{pmatrix}^{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_{02}(t) \end{pmatrix}^{\lambda_1}$$

ratkaisukäyrän komponentteja joukossa  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Huomaa, että ratkaisukäyrät ovat säteitä, kun matriisilla  $A$  on yksi geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Yleisessä tapauksessa radat saadaan kuvaamalla yhtälön (18) antama käyrä Lemman 2.7 antamalla lineaarisella muuttujanvaihdoilla.

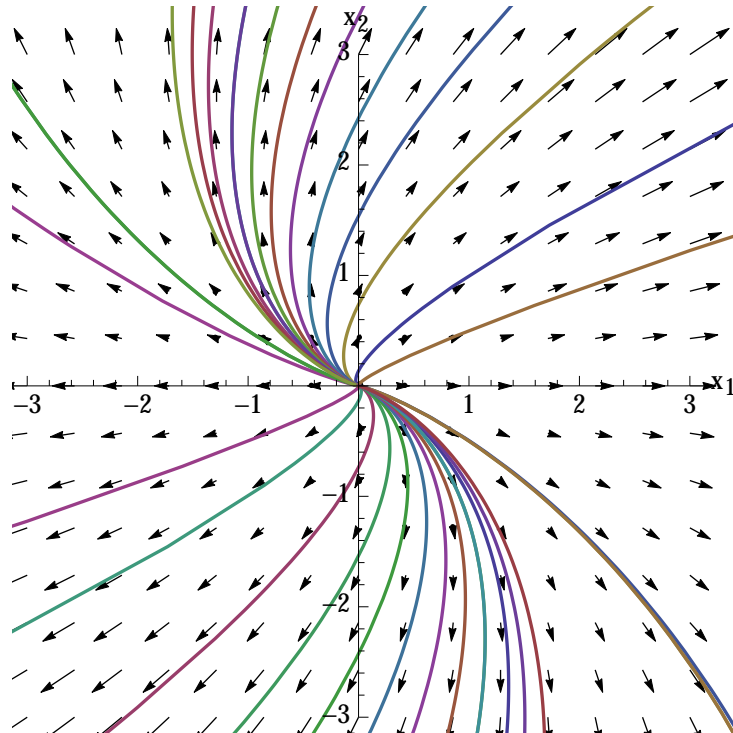
**Matriisi  $A$  on konjugaatti matriisiin  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  kanssa.** Laskemalla on helppo todeta, että kuvaus  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$(19) \quad x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = (a, b)$ .



KUVA 4. Surkastunut lähde

Jos matriisilla  $A$  on yksi ominaisarvo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , jonka algebrallinen kertaluku on yksi ja geometrinen kertaluku on kaksi, niin Lauseen 2.6 nojalla  $A$  on matriisin  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  konjugaatti ja differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  ratkaisut saadaan Lemman 2.7 ja ratkaisun (19) avulla. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *surkastuneeksi nieluksi*, jos  $\lambda < 0$  ja *surkastuneeksi lähteeksi*, jos  $\lambda > 0$ .

**Matriisi  $A$  on konjugaatti vinosymmetrisen matriisin  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  kanssa.**

Lauseen 2.6 mukaan kaikki reaaliset  $2 \times 2$ -matriisit, jotka eivät ole diagonalisoituvia tai matriisin  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  konjugaatteja jollain  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ovat vinosymmetrisen matriisin

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  konjugaatteja joillain  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ . Matriisin  $A$  ja kaikkien sen kanssa konjugaattien matriisien ominaisarvot ovat  $\alpha \pm i\beta$ . Sijoittamalla differentiaaliyhtälöön on helppo todeta, että kuvaus  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$x(t) = e^{\alpha t} \left[ a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \right]$$

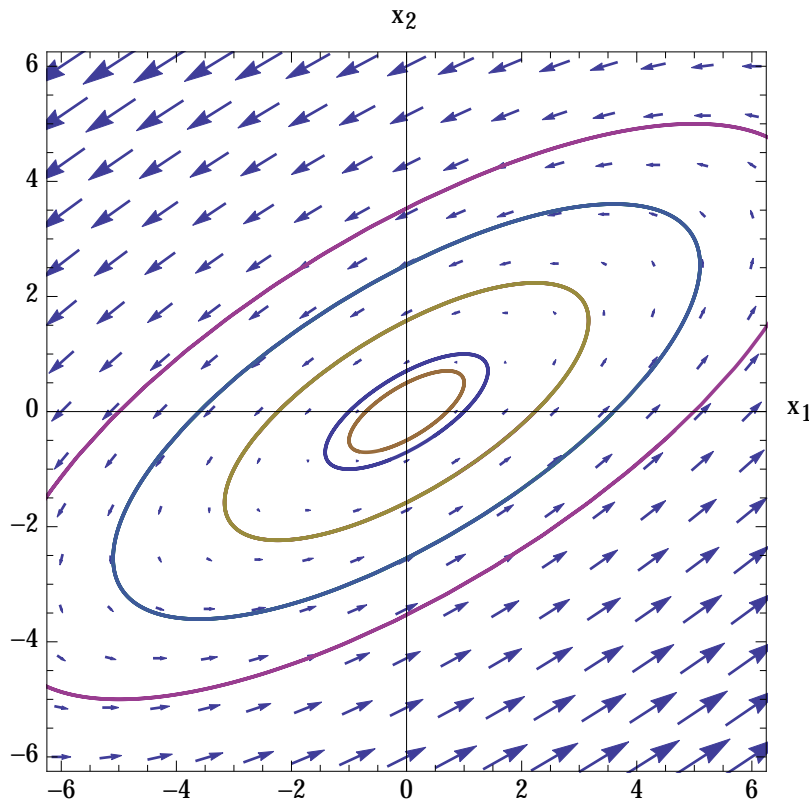
on alkuarvottehtävän  $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$  ratkaisu. Ratkaisun käyttäytyminen riippuu ominaisarvon reaali- ja imaginaariosan merkeistä:



(1) Jos  $\alpha = 0$ , niin ratkaisu on muotoa

$$x(t) = a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Tämä kuvaus parametrisoi origokeskisen ympyrän, jonka säde on  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Ratkaisun kiertosuunta ympyrällä määräytyy parametrin  $\beta$  merkistä. Yleisessä tilanteessa ratkaisut parametrisoivat ellipsin, joka saadaan kuvaamalla tämä ympyrä kannanvaihtokuvauksella. Kiertosuunta riippuu parametrin  $\beta$  merkistä ja kannanvaihtokuvauksen determinantista. Tässä tapauksessa origo on *keskus*.

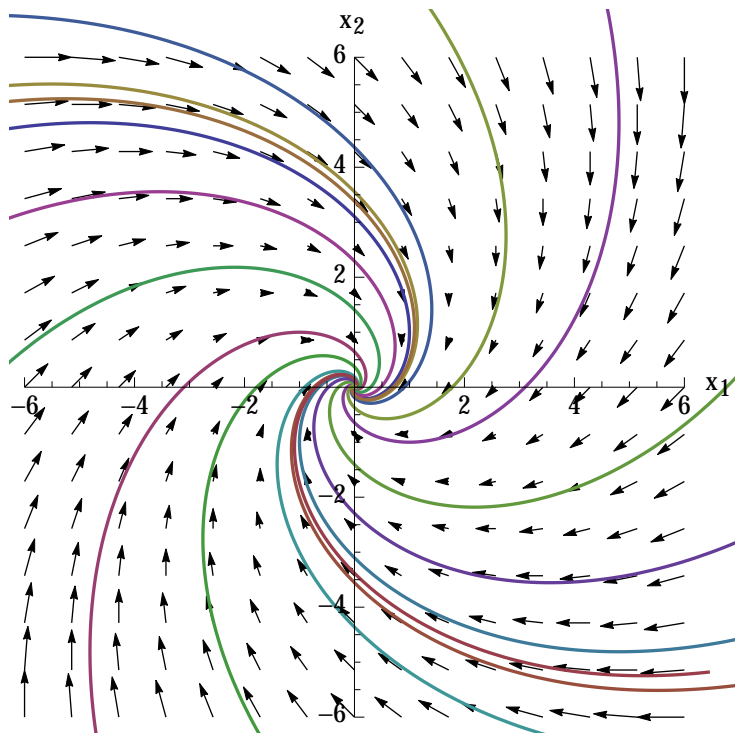


KUVA 5. Keskus

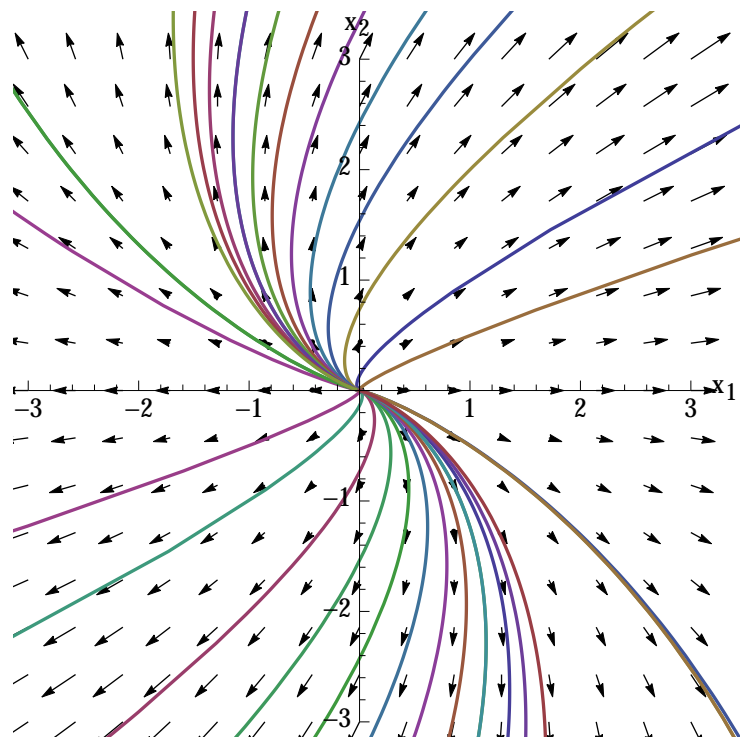
(2) Jos  $\alpha < 0$ , niin kerroin  $0 < e^{\alpha t} < 1$  aiheuttaa sen, että ratkaisu lähestyy origoa, kun  $t \rightarrow \infty$ . Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja lähestyy sitä eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow \infty$ . Vastaavasti  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ , kun  $t \rightarrow -\infty$ . Tässä tapauksessa origo on *spiraalinielu*.

(3) Jos  $\alpha > 0$ , niin kerroin  $e^{\alpha t} > 1$  aiheuttaa sen, että ratkaisun normi kasvaa rajatta, kun  $t \rightarrow \infty$ . Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja etääntyy siitä eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow \infty$  ja suppenee origoon, kun  $t \rightarrow -\infty$ . Tässä tapauksessa origo on *spiraalilähde*.

**2.3. Kompleksista lineaarialgebraa.** Lineaarisen algebran ja geometrian kursseilla käsitellään yleensä ainoastaan reaalisia vektoriavaruuksia ja niiden lineaarikuvauksia. Lineaarialgebran teoria voidaan kuitenkin muotoilla yleisemmin korvaamalla aksioomissa esiintyvä reaalilukujen kunta  $\mathbb{R}$  millä tahansa kunnalla, esimerkiksi rationaaliluvuilla tai kompleksiluvuilla. Kompleksinen lineaarialgebra auttaa meitä ymmärtämään paremmin Lauseen 2.6 kolmatta tapausta.



KUVA 6. Spiraalinielu



KUVA 7. Spiraalilähde

Kompleksisen vektoriavaruuden aksioomat ovat samat kuin reaalissa tapauksessa, mutta kaikki ominaisuudet, joissa reaalissa tapauksessa esiintyy  $\mathbb{R}$  vaaditaan kompleksiluvuille. Esimerkiksi

- Kompleksisessa vektoriavaruudessa  $V$   $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$  kaikille  $\alpha \in \mathbb{C}$  ja kaikille  $u, v \in V$ .

- Kuvaus  $L: V \rightarrow V$  on (kompleksinen) lineaarikuvaus, tai kompleksilineaarinen kuvaus, jos  $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$  kaikille  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ja kaikille  $u, v \in V$ .
- Lineaarikuvaukset ja matriisit vastaavat toisiaan, kun kannat on valittu kuten reaaliosissa tapauksessa
- Vektori  $v \in \mathbb{C}^n$  on lineaarikuvauksen  $L: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ominaisvektori ominaisarvolla  $\lambda \in \mathbb{C}$ , jos  $Lv = \lambda v$ .
- Lineaarinen riippuvuus ja siis myös aliavaruuden dimensio määritellään kompleksilukujen avulla: Vektorit  $u_i \in V$ ,  $i \in I$  ovat lineaarisesti riippuvia, jos kaikille äärellisille summille pätee

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k u_{i_k} = 0$$

vain, jos  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

Yleisten vektoriavaruuksien teoriaan voi tutustua esimerkiksi lähteen [Gre] ja monien algebran kirjojen kuten [Dur] avulla.

**Esimerkki 2.9.**  $\mathbb{C}^n$  on kompleksinen vektoriavaruus, jonka (kompleksinen) dimensio on  $n$ : Standardikanta, joka koostuu vektoreista  $e_1, \dots, e_n$ , missä  $e_i$  on vektori, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on  $1 \in \mathbb{C}$  paikalla  $i$ , on selvästi lineaarisesti riippumaton. Kompleksisessa vektoriavaruudessa  $\mathbb{C}$  määritellään vektorien reaali- ja imaginaariosia ja kompleksikonjugaatti komponenteittain kuvauksina  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ : Jos  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , niin

$$\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n),$$

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$$

ja

$$\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Nyt voimme palata Lauseen 2.6 todistukseen.

(3) Oletetaan, että matriisilla  $A$  ei ole reaaliosia ominaisarvoja. Tällöin sillä on kaksi kompleksista ominaisarvoa  $\alpha \pm i\beta$ , missä  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ja  $\beta \neq 0$ . Ajatellaan  $A$  kompleksisena matriisina. Tällöin ominaisarvoa  $\alpha + i\beta$  vastaa jokin ominaisvektori  $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ . Havaitaan ensin, että  $\operatorname{Re} u$  ja  $\operatorname{Im} u$  ovat lineaarisesti riippumattomia reaaliosissa vektoriavaruudessa  $\mathbb{R}^2$ : Oletetaan, että  $\operatorname{Im} u \neq 0$ . Jos vektorit  $\operatorname{Re} u$  ja  $\operatorname{Im} u$  olisivat lineaarisesti riippuvia, niin  $\operatorname{Re} u = c \operatorname{Im} u$  jollain  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$(c + i)A \operatorname{Im} u = A((c + i) \operatorname{Im} u) = A(u) = (\alpha + i\beta)u = (\alpha + i\beta)(c + i) \operatorname{Im} u,$$

joten

$$A \operatorname{Im} u = (\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u.$$

Tämä on mahdotonta, sillä  $A \operatorname{Im} u$  on reaalinen vektori, kun taas  $(\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u$  ei ole. Tapaus  $\operatorname{Re} u \neq 0$  käsitellään vastaavalla tavalla.

Kirjoitetaan vektori  $Au$  kahdella tavalla reaali- ja imaginaariosien summaksi: Koska  $A$  on reaalinen, pätee

$$Au = A(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = A(\operatorname{Re} u) + iA(\operatorname{Im} u).$$

Toisaalta, koska  $u$  on ominaisvektori, pätee

$$Au = (\alpha + i\beta)(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u + i(\beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u).$$

Vertaamalla reaali- ja imaginaariosia saadaan

$$A \operatorname{Re} u = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u$$

ja

$$A \operatorname{Im} u = \beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u.$$

Edellä oleva tarkastelu osoittaa, että avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kannassa, jonka muodostavat vektorit  $v_1 = \operatorname{Re} u$  ja  $v_2 = \operatorname{Im} u$ , matriisia  $A$  vastaava lineaarikuvaus käyttäytyy halutulla tavalla. Valitaan kannanvaihtomatriisiksi  $C$  matriisi, jonka sarakkeet ovat vektorien  $v_1$  ja  $v_2$  komponentit. Tällöin  $C$  on reaalin ja se on kääntävä koska edellä totesimme, että sen sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomat. Lisäksi pätee

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_1 = C^{-1}(\alpha v_1 - \beta v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

ja

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_2 = C^{-1}(\beta v_1 + \alpha v_2) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Lause 2.6 on nyt todistettu. □

**2.4. Parametrisoituja perheitä.** Usein differentiaaliyhtälö on osa *parametrisoitua perhettä*  $\dot{x} = f_\alpha(x)$ , missä  $\alpha \in A$  ja  $A \neq \emptyset$  on perheen *parametriavaruus*. Tällöin joukkoa  $U_\alpha$ , jossa vektorikenttä  $f_\alpha$  on määritelty, kutsutaan usein esimerkiksi *faasiavaruudeksi*. Differentiaaliyhtälön ratkaisut voivat käyttäytyä eri tavalla eri parametrien arvoilla kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 2.10.** Esimerkissä 1.3 tarkastelimme harmonista värähtelijää, joka kuvaa ideaalisen jousen liikettä 1-ulotteisessa avaruudessa. Oletetaan nyt, että tarkasteltava paino liikkuu pinnalla, jossa siihen vaikuttaa nopeuteen verrannollinen kitka  $-b\dot{x}$ , missä  $b > 0$ . Saadaan systeemi, jota kutsutaan *vaimenevaksi (harmoniseksi) värähtelijäksi*. Jos  $b = 0$ , kyseessä on harmoninen värähtelijä. Systeemin aikakehitystä kuvaa toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Valitsemalla  $y_1 = x$  ja  $y_2 = \dot{x}$  saadaan ekvivalentti lineaarinen yhtälöpari

$$(20) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2, \end{cases}$$

jonka kerroinmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix},$$

matriisimerkinnällä siis

$$(21) \quad \dot{y} = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} y.$$

Tämän yhtälön ratkaisun tyyppi riippuu parametreista  $m$ ,  $k$  ja  $b$ . Matriisin  $A$  determinantti  $k/m$  on aina positiivinen ja sen ominaisarvot ovat

$$\lambda_{\pm} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

- Jos  $b^2 < 4km$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi kompleksista ominaisarvoa, joiden reaaliosa on negatiivinen, joten ratkaisu on spiraalinielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla  $x(0) \neq 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , niin se värähtelee tasapainopisteen ympärillä äärettömän monta kertaa.

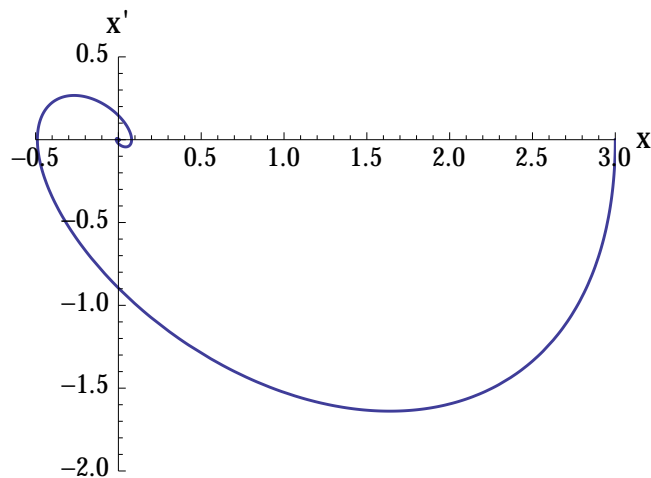
- jos  $b^2 = 4km$ , niin matriisilla  $A$  on yksi kaksinkertainen negatiivinen ominaisarvo, joten ratkaisu on surkastunut nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla  $x(0) \neq 0, \dot{x}(0) = 0$ , niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä  $x = 0$  kertaakaan. Ratkaisujen tangentit lähestyvät 1-ulotteisen ominaisvaruuden

$$E_{-\frac{b}{2m}} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -\frac{b}{2m}y_1\},$$

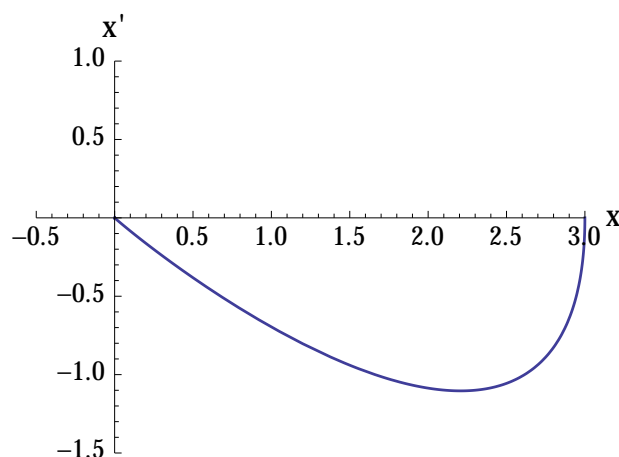
kun  $t \rightarrow +\infty$ .

- jos  $b^2 > 4km$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi eri negatiivista ominaisarvoa, joten ratkaisu on surkastunut nielu tai nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla  $x(0) \neq 0, \dot{x}(0) = 0$ , niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä  $x = 0$  kertaakaan.

Tilannetta, jossa  $b^2 = 4km$  kutsutaan *kriittisesti vaimennetuksi* värähtelijäksi. Tällainen tilanne on epävakaa parametrien suhteen: pienikin muutos parametreissa voi muuttaa värähtelijän luonnetta, kun yhtälö muuttuu epäyhtälöksi.



KUVA 8. Alivaimennettu värähtelijä parametreilla  $m = k = b = 1$ .



KUVA 9. Kriittisesti vaimennettu värähtelijä parametreilla  $m = k = 1, b = 2$ . Näillä parametreilla origo on surkastunut nielu.

## Harjoitustehtäviä.

2.1. Osoita, että kuvaus  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = (a, b)$ .

- (1) Miten ratkaisu käyttäytyy, kun  $\lambda$  on positiivinen tai negatiivinen?
- (2) Hahmottele ratkaisukäyriä muutamilla alkuarvon  $(a, b)$  eri arvoilla.
- (3) Siinä tapauksessa, että  $x(t) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ , osoita, että polun  $x$  tangenttivektori lähestyy vaakasuoraa suuntaa.

---

Tehtävissä 2.2–2.6

- (1) Määritä differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  tyyppi.
- (2) Konjugoi matriisi  $A$  yhteen lauseen 2.6 antamista muodoista ja ratkaise vastaava differentiaaliyhtälö.
- (3) Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

- (4) Hahmottele differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  ratkaisuja muutamilla alkuarvoilla.

2.2.  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x_0 = (1, 1)$

2.3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad x_0 = (1, 0)$ .

2.4.  $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \quad x_0 = (-1, 2)$ .

2.5.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad x_0 = (0, 1)$ .

2.6.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad x_0 = (0, 1)$ .

---

2.7. Olkoon

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Määritä differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  tyyppi kaikilla  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Kuvaile, mitä tapahtuu niissä parametriavaruuden  $\mathbb{R}$  pisteissä, joissa tyyppi vaihtuu. Havainnollista kuvilla.

### 3. LINEAARISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT KORKEAMMISSA ULOTTUVUUKSISSA

Tason tilanteessa yksinkertaistimme lineaaristen differentiaaliyhtälöiden tarkastelua osoittamalla, että kaikki reaaliset  $2 \times 2$ -matriisit voidaan konjugoida reaalilla matriisilla yhteen kolmesta perusmuodosta. Tämän luvun aluksi käsittelemme yleisempää kaikissa äärellisissä dimensioissa pätevää tulosta, jonka erikoistapaus edellä mainittu Lause 2.6 on. Tämän jälkeen osoitamme, että kaikki lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt voi ratkaista matriisien eksponenttifunktion avulla ja luvun lopussa käsittelemme yleistystä sellaisiin lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin, jotka eivät ole autonomisia.

**3.1. Konjugointi kanoniseen muotoon.** Jos  $B_1, \dots, B_N$  ovat  $n_1 \times n_1, \dots, n_N \times n_N$ -neliömatriiseja ja  $\sum_{i=1}^N n_i = n$ , niin matriiseista  $B_1, \dots, B_N$  muodostettu  $n \times n$ -matriisi

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_N) = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N \end{pmatrix},$$

jossa loput  $n^2 - \sum_{i=1}^N n_i^2$  kerrointa ovat nollia, on *blokkidiagonaalimatriisi*, jonka blokkeja ovat matriisit  $B_i$ . Blokin  $B_i$  koko on  $n_i$ .

**Lause 3.1** (Jordanin kanoninen muoto). *Olkoon  $A$  reaalinen  $n \times n$ -neliömatriisi ja olkoot  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_M, \bar{\lambda}_M$  sen eri ominaisarvot. Olkoot  $a_i$  ja  $g_i$  ominaisarvon  $\lambda_i$  algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Tällöin  $A$  voidaan konjugoida reaalilla matriisilla blokkidiagonaalimuotoon, jossa jokainen blokki on joko muotoa*

$$(\lambda_i) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

jos  $\lambda_i$  on reaalinen, tai

$$C_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_{\lambda_i} & I_2 & & \\ & C_{\lambda_i} & I_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & C_{\lambda_i} \end{pmatrix},$$

jos  $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$  ei ole reaaliluku. Realista ominaisarvoa  $\lambda_i$  vastaa  $g_i$  blokkia, joiden kokojen summa on  $a_i$ . Kompleksista ominaisarvoparia  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$  vastaa  $g_i$  blokkia, joiden kokojen summa on  $2a_i$ .

Jordanin kanonisen muodon ja Lemman 2.7 avulla moniulotteiset tapaukset voidaan palauttaa helpommin käsiteltävään muotoon. Tällä kurssilla emme todista Lausetta 3.1, todistus esitetään monissa hieman edistyneemmän lineaarialgebran kirjoissa, esimerkiksi [HJ], [Ort].

**Esimerkki 3.2.** Olkoon  $A$  reaalinen  $3 \times 3$ -matriisi, jolla on yksi kompleksinen ominaisarvopari  $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i$  ja yksi reaalinen ominaisarvo  $-1$ . Tällöin  $A$  on Lauseen 3.1 mukaan matriisin

$$(22) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

konjugaatti. Matriisia  $B$  vastaava differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = Bx$  on helppo ratkaista, koska ensimmäiset kaksi koordinaattia muodostavat oman 2-ulotteisen systeemin:

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$

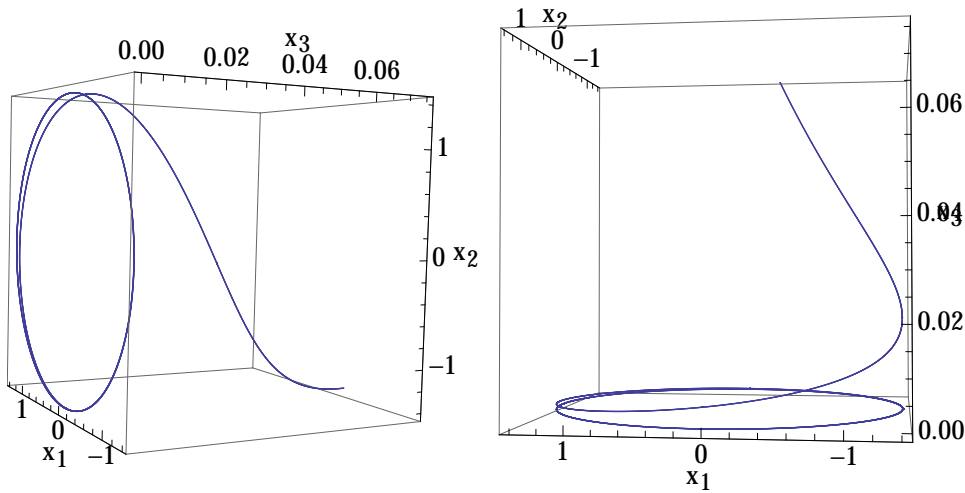
on ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

Jos  $c = 0$ , niin ratkaisu pysyy  $x_1x_2$ -tasossa ja on  $\sqrt{a^2 + b^2}$ -säteisen ympyrän parametrisointi kuten esimerkissä 1.3. Jos taas  $a = b = 0$ , niin ratkaisu pysyy  $x_3$ -akselilla ja lähestyy origoa eksponentiaalisella vauhdilla. Yleisen tilanteen ratkaisukäyrä kulkee sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}$$

ja kasautuu kohti  $x_1x_2$ -tason ympyrää

$$\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}.$$



KUVA 10. Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisusta alkuarvolla  $x(0) = (1, 1, 1)$ , kun  $B$  on kaavan (22) matriisi.

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan muuttujanvaihtolemmän 2.7 avulla.

Kun lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö  $\dot{y} = Ay$  konjugoidaan muotoon  $\dot{x} = Bx$ , missä  $B = C^{-1}AC$  on Jordanin kanonisessa muodossa, niin alkuperäinen differentiaaliyhtälö korvataan ekvivalentilla yhtälöllä, jonka ratkaiseminen on helppoa: Jos  $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_M)$ , niin differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisu saadaan yhdistämällä kutakin blokkia vastaavien differentiaaliyhtälöiden  $\dot{x}^{(j)} = B_j x^{(j)}$  ratkaisut  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ . Jos  $B_j$  on reaalista ominaisarvoa vastaava  $1 \times 1$ -blokki tai kompleksista ominaisarvoa vastaava  $2 \times 2$ -blokki, niin ratkaisu  $x^{(j)}$  tiedetään aiemman perusteella, samoin Luvussa 2 huomattiin, että alkuarvot tehtävän

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ratkaisut ovat muotoa

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}.$$



Yleistämme tämän havainnon suuremmille blokeille ja palaamme yleisen kompleksista ominaisarvoa vastaavan blokin ratkaisuun Luvussa 3.2.

**Propositio 3.3.** *Olkoot  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$  ja  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alkuarvotehtävän*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} x, \quad x(0) = x_0$$

ratkaisu on

$$x(t) = e^{\lambda t} \left[ x_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_0^2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_0^3 \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_0^n \begin{pmatrix} t^{n-1}/(n-1)! \\ t^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

*Todistus.* Suora lasku. □

**Esimerkki 3.4.** Kolmiomatriisin determinantti on sen diagonaalialkioiden tulo, joten karakteristisen polynomin avulla näemme heti, että yläkolmiomatriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainoa ominaisarvo on 1. Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä koostuu kahdesta yhtälöstä

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

joten esimerkiksi vektorit  $v_1 = (1, 0, 0, 0)$  ja  $w_1 = (0, 1, 1, 0)$  virittävät 2-ulotteisen ominaisavaruuden  $E_1$ . Ominaisarvon 1 algebrallinen kertaluku on 4 ja sen geometrisen kertaluku on 2, joten matriisin  $A$  Jordanin kanoninen muoto on (permutaatiota vaille) joko

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On siis selvitettävä ainoaa ominaisarvoa 1 vastaavan yleistetyn ominaisavaruuden rakenne tarkemmin: Yhtälöllä  $(A - I_4)x = v_1$  on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin  $v_2 = (0, 1, 0, 0)$ , joka on lineaarisesti riippumaton vektorin  $v_1$  kanssa. Sen sijaan yhtälöllä  $(A - I_4)x = v_2$  ei ole ratkaisua. Vastaavasti yhtälöllä  $(A - I_4)x = w_1$  on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin  $w_2 = (0, 0, 0, 1)$ , joka on lineaarisesti riippumaton vektorin  $w_1$  kanssa.

Jos  $F: X \rightarrow X$  on kuvaus, niin osajoukko  $Y \subset X$  on  $F$ -invariantti, jos  $F(Y) \subset Y$ . Edellä näimme, että matriisia  $A$  vastaavalla lineaarikuvauksella on siis kaksi invarianttia 2-ulotteista aliavaruutta  $V = \langle v_1, v_2 \rangle$  ja  $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ . Lineaarikuvauksen  $L|_V$  matriisi kannan  $v_1, v_2$  ja lineaarikuvauksen  $L|_W$  matriisi kannan  $w_1, w_2$  suhteen on sama matriisi  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Vektorit  $v_1, v_2$  ja  $w_1, w_2$  muodostavat kaksi *Jordanin ketjua* ominaisarvolle 1:  $(A - I_4)v_2 = v_1$ ,  $Av_1 = v_1$  ja  $(A - I_4)w_2 = w_1$ ,  $Aw_1 = w_1$ .

Haluttu matriisin  $A$  Jordanin kanoninen muoto on siis

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja kannanvaihto saadaan matriisilla

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

$A = CBC^{-1}$ . Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisut ovat

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix} .$$

Differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  ratkaisut ovat siis funktiot  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$\begin{aligned} y(t) = Cx(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b + c + dt \\ c + dt \\ d \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa ehdon  $y(0) = (a, b + c, c, d)$ , mikä pitää ottaa huomioon alkuarvotehtävää ratkaistaessa.

Yleisessä tilanteessa, jos lineaarisesti riippumattomat vektorit  $v_1, \dots, v_K$  toteuttavat  $(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}$  kaikilla  $j = 2, \dots, K$ ,  $(A - \lambda I)v_1 = 0$  ja yhtälöllä  $(A - \lambda I)x = v_K$  ei ole ratkaisua, niin nämä vektorit muodostavat Jordanin ketjun. Jos käytettävä kanta valitaan niin, että vektorit  $v_1, \dots, v_K$  sisältyvät siihen, aliavaruutta  $\langle v_1, \dots, v_K \rangle$  vastaa blokki

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

**3.2. Matriisien eksponenttifunktio.** Tarkastelemme Luvussa 3.3 periaatteessa suoraviivaista menetelmää autonomisen lineaarisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi ilman konjugointia. Aloitamme sopimalla, milloin kaksi  $n \times n$ -matriisia on lähellä toisiaan. Tätä varten määritellään metriikan ja metrisen avaruuden käsitteet. Metrisiä avaruuksia käsitellään laajemmin muun muassa topologian kurssilla, tässä valitsemme teoriasta vain tarpeelliset osat.

Olkoon  $X \neq \emptyset$ . Kuvaus  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$  metriikka joukossa  $X$ , jos

- $d(x, y) = 0$ , jos ja vain jos  $x = y$  (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$  kaikille  $x, y \in X$  (symmetrisyys) ja

- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  kaikille  $x, y, z \in X$  (kolmioepäyhtälö)

Pari  $(X, d)$  on *metrinen avaruus*.

Metriikka on tapa mitata joukon  $X$  pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden  $\mathbb{R}^n$  euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on. Metrinen avaruuden  $(X, d)$  Cauchyn jonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa.

Olkoon  $V$  reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus  $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty[, v \mapsto \|v\|$ , on *normi*, jos

- (1)  $\|v\| = 0$ , jos ja vain jos  $v = 0$ ,
- (2)  $\lambda v = |\lambda| \|v\|$  kaikille  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja kaikille  $v \in V$  ja
- (3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  kaikille  $v, w \in V$ .

Pari  $(V, \|\cdot\|)$  on *normiavaruus*.

**Esimerkki 3.5.** (1) Lineaarialgebran kursseilla osoitetaan, että euklidinen normi  $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$  on normi.

(2) Lauseke

$$(23) \quad \|A\|_\infty = \|(a_{ij})\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

määrittelee normin avaruudessa  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ .

**Lemma 3.6.** *Olkoon  $(V, \|\cdot\|)$  normiavaruus. Tällöin lauseke  $d(x, y) = \|x - y\|$  määrää metriikan.*

*Todistus.* Harjoitus. □

Varustetaan reaalisten  $n \times n$ -matriisien vektoriavaruus  $M_n$  normilla  $\|\cdot\|_\infty$  ja tätä normia vastaavalla metriikalla. Tällöin matriisien muodostama jono  $A_i$  suppenee kohti matriisia  $A$ , jos  $\|A_i - A\| \rightarrow 0$ , kun  $i \rightarrow \infty$ .

**Propositio 3.7.** *Jono  $(A_i)_{i=1}^\infty$  suppenee avaruudessa  $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , jos ja vain jos kaikki sen kertoimien muodostamat jonot  $(a_{kl})_{i=1}^\infty$  suppenevat reaalilukujen joukossa.*

*Todistus.* Harjoitus. □

**Huomaa:** Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa kaikki normit ovat ekvivalentteja, joten suppenemiskäsite ei riipu normin valinnasta. Monessa tilanteessa olisi luonteva käyttää operaattorinormia

$$|A| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

missä  $\|\cdot\|$  on euklidinen normi.

**Propositio 3.8.** *Neliömatriisien avaruus  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  varustettuna normin (23) antamalla metriikalla on homeomorfinen  $n^2$ -ulotteisen euklidisen avaruuden kanssa.*

*Todistus.* Käsitellään kurssilla Topologia. □

Määritellään matriisien potenssit tavanomaiseen tapaan asettamalla  $A^0 = I_n$ ,  $A^1 = A$ ,  $A^2 = AA$  ja induktiivisesti  $A^{k+1} = AA^k$  kaikille  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  ja kaikille  $k \geq 2$ . Neliömatriisien sarjojen ja erityisesti potenssisarjojen  $\sum_{j=0}^{\infty} c_j A^j$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , suppeneminen määritellään äärellisten osasummien jonojen suppenemisen kautta kuten 1-ulotteisessa tapauksessa kurssilla Analyysi 3/Sarjat ja approksimointi.

**Propositio 3.9.** *Sarja*

$$(24) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

suppenee kaikille neliömatriiseille  $A$ .

Sarja (24) määrittelee *matriisien eksponenttifunktion*  $\exp: M_n \rightarrow M_n$ ,

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

*Todistus.* Olkoon  $a_{ij}^k$  matriisin  $A^k$   $ij$ -kerroin. Tällöin

$$|a_{ij}^2| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} \right| \leq n \|A\|^2,$$

ja induktiolla

$$|a_{ij}^N| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}^{N-1} a_{kj} \right| \leq n^{N-1} \|A\|^N.$$

Siispä

$$\frac{|a_{ij}^N|}{N!} \leq \frac{n^{N-1} \|A\|^N}{N!} \leq \frac{n^N \|A\|^N}{N!},$$

ja koska reaalin eksponenttifunktio suppenee itseisesti, niin Weierstrassin  $M$ -testin ja Proposition 3.7 nojalla sarja (24) suppenee.  $\square$

**Esimerkki 3.10.** Tarkastellaan Jordanin kanonisessa muodossa esiintyvien blokkimatriisien kuvia eksponenttifunktiolla.

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat  $\pm i\beta$ . Tälle matriisille pätee

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I_2,$$

$$A^3 = -\beta^2 I_2 \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = -\beta^2 A,$$

$$A^4 = \beta^4 I_2,$$

$\vdots$

ja induktiolla saadaan siis

$$\exp(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti muille (luvulla  $t \in \mathbb{R}$  kerroituille)  $2 \times 2$ -matriisien perusmuodoille saadaan

$$\exp t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ja jos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad R = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

niin

$$\exp t \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & & & \\ & \Lambda & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R & Rt & Rt^2/2 & \dots & Rt^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & R & Rt & \dots & Rt^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & R & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & Rt \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix}$$

Matriisien eksponenttifunktiolla on seuraavat perusominaisuudet:

**Propositio 3.11.** Jos  $A, B, C \in M_n$ ,  $C$  on kääntyvä ja  $AB = BA$ , niin

- (1)  $\exp(CAC^{-1}) = C \exp(A)C^{-1}$ ,
- (2)  $\exp(A+B) = \exp A \exp B$  ja
- (3)  $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ .

*Todistus.* (a) On helppo todistaa tarkastelemalla osasummien jonoja.

(b) On hieman hankalampi: Binomikaava antaa kommutoiville matriiseille

$$(A+B)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{A^j B^k}{j! k!},$$

joten väite on

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{A^j B^k}{j! k!} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right).$$

Tämä yhtälö todistetaan samalla tavalla kuin vastaava reaalilukujen tulos (Cauchyn tulo/Analyysi 3), yksityiskohdat matriisitapauksessa esitetään esimerkiksi kirjassa [HSD].

(c) Seuraa (b)-kohdasta valitsemalla  $B = -A$ . □

Erityisesti siis  $\exp A$  on kääntyvä kaikilla  $A \in M_n$ .

**3.3. Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaiseminen.** Matriisien eksponenttifunktio antaa menetelmän kaikkien lineaaristen homogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen ilman konjugointia kanoniseen muotoon. Käytännössä matriisien eksponenttifunktion arvon laskeminen annetulle matriisille voi kuitenkin olla haastavaa ilman konjugointia.

Aloitamme hyödyllisellä abstraktilla havainnolla. Tässä tuloksessa määritämme derivaatan kuvaukselle, itse asiassa polulle, jonka arvot ovat matriiseja. Matriisien avaruus  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  on  $n^2$ -ulotteinen reaalinen vektoriavaruus, joka on siis isomorfinen avaruuden  $\mathbb{R}^{n^2}$  kanssa. Derivaatta määritetään siis kuten tavallisesti vektoriavaruudelle kuvaukselle tehdään.

**Propositio 3.12.** *Olkkoon  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  ja olkkoon  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ,*

$$\Phi(t) = e^{tA}.$$

*Tällöin*

$$\Phi'(t) = e^{tA}A = \Phi(t)A.$$

*Todistus.* Proposition 3.11(2) avulla saamme Taylorin kehitelmän

$$\Phi(t_0 + s) = e^{(t_0+s)A} = e^{t_0A}e^{sA} = e^{t_0A}(I + sA + O(s^2)) = e^{t_0A} + e^{t_0A}A s + O(s^2),$$

mistä väite seuraa Taylorin polynomin yksikäsitteisyyden nojalla.  $\square$

**Lause 3.13.** *Olkkoon  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ . Alkuarvottehtävän  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$  ainoa ratkaisu on  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x(t) = e^{tA}x_0$ .*

*Todistus.* Propositioista 3.12 seuraa heti, että

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{tA}x_0) = e^{tA}Ax_0 = Ae^{tA}x_0 = Ax(t)$$

kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , joten  $x(t)$  on ratkaisu.

Ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa OY-lauseesta 1.6, joka todistetaan Luvussa 4. Tässä tapauksessa yksikäsitteisyys on helppo osoittaa kuitenkin suoraan. Jos  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  on alkuarvottehtävän ratkaisu, niin määritellään kuvaus  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  asettamalla  $z(t) = e^{-tA}y(t)$ . Nyt

$$\dot{z}(t) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}Ay(t) = e^{-tA}(A - A)y(t) = 0,$$

joten  $z$  on vakiokuvaus  $z(t) \equiv x_0$ . Siispä kuvauksen  $z$  määrittelmä antaa  $y(t) = e^{tA}x_0$ .  $\square$

**Esimerkki 3.14.** Olkoot

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & & & \\ & \Lambda & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda \end{pmatrix}.$$

Lauseen 3.13 ja Esimerkin 3.10 mukaan alkuarvottehtävän  $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$  ratkaisu on

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R & Rt & Rt^2/2 & \dots & Rt^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & R & Rt & \dots & Rt^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & R & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} x_0,$$

missä

$$R = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Erityisesti siis tapauksessa

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$$

ratkaisu alkuarvolla  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  on

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t & t \cos \beta t & t \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t & -t \sin \beta t & t \cos \beta t \\ 0 & 0 & \cos \beta t & \sin \beta t \\ 0 & 0 & -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Millä tahansa joukolla  $x \neq \emptyset$  määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden joukko

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$$

muodostaa reaalisen vektoriavaruuden, kun funktioiden yhteenlasku määritellään pisteittäin asettamalla kaikille  $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

kaikille  $x \in X$  ja reaaliluvulla kertominen määritellään asettamalla kaikille  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja kaikille  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

kaikille  $x \in X$ .

**Seuraus 3.15.** *Olkoon  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ . Lineaarisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  ratkaisut muodostavat  $n$ -ulotteisen reaalisen vektoriavaruuden.*

*Todistus.* Osoitetaan, että ratkaisut muodostavat funktioiden avaruuden lineaarisen aliavaruuden. Olkoot  $x$  ja  $y$  ratkaisuja ja  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Tällöin derivoinnin lineaarisuuden, ratkaisun määritelmän ja matriisilla kertomisen lineaarisuuden nojalla

$$\frac{d}{dt}(\lambda x + \mu y) = \lambda \dot{x} + \mu \dot{y} = \lambda Ax + \mu Ay = A(\lambda x + \mu y),$$

joten  $\lambda x + \mu y$  on ratkaisu. Siis ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden.

Olkoot  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^n$  standardikantavektorit. Lauseen 3.13 mukaan kuvaukset  $x^{(1)} = e^{tA}\mathbf{e}_1, \dots, x^{(n)} = e^{tA}\mathbf{e}_n$  ovat tarkasteltavan lineaarisen homogeenisen yhtälön ratkaisuja. Ne ovat lineaarisesti riippumattomia sillä niiden lineaarikombinaatio  $\sum_{i=1}^n a_i x^{(i)}$  saa ajanhetkellä 0 arvon  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ , joka on 0 vain, jos  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . Siis ratkaisujen avaruuden dimensio on vähintään  $n$ .

Olkoon  $x$  jokin ratkaisu. Tällöin

$$x(0) = \sum_{i=1}^n x(0)_i \mathbf{e}_i = \left( \sum_{i=1}^n a_i x^{(i)} \right) (0).$$

Lauseen 3.13 yksikäsitteisyystuloksen nojalla  $x = \sum_{i=1}^n a_i x^{(i)}$ , joten ratkaisujen avaruus on  $n$ -ulotteinen.  $\square$

## Harjoitustehtäviä.

**3.1.** Olkoon  $\alpha \in \mathbb{R}$  ja olkoon

$$(25) \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  ratkaisujen käyttäytyminen kaikilla  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Piirrä kuvia.

**3.2.** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  kaikki ratkaisut.

**3.3.** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Määritä differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  kaikki ratkaisut.

**3.4.** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotettava  $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (2, 0, 1) \end{cases}$ .

**3.5.** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotettava  $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (1, 0, 0, 0) \end{cases}$ .

**3.6.** Olkoon  $A$  reaalinen  $n \times n$ -matriisi. Olkoon  $\lambda$  matriisin  $A$  ominaisarvo ja olkoon  $V$  sitä vastaava ominaisvektori. Osoita, että  $e^\lambda$  on matriisin  $\exp A$  ominaisarvo ja että  $V$  on sitä vastaava ominaisvektori.

**3.7.** Jos  $A$  on neliömatriisi ja  $\lambda$  on sen ominaisarvo, niin vastaava ominaisavaruus on matriisin  $A - \lambda I$  ydin:

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda).$$

Jos  $k$  on luonnollinen luku,  $k \geq 1$ , niin vektorialiavaruus

$$E_\lambda^k(A) = \ker(A - \lambda)^k$$

on ominaisarvoa  $\lambda$  vastaava kertaluvun  $k$  yleistetty ominaisavaruus. Osoita, että koko  $\mathbb{R}^n$  on  $n \times n$ -matriisin

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$



ominaisarvoa  $\lambda$  vastaava yleistetty ominaisavaruus.

**3.8.** Olkoon  $A$  reaallinen  $2n \times 2n$ -matriisi, jolla on  $2n$  eri kompleksista ominaisarvoa  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n$ . Olkoot  $W_1, \dots, W_n$  ominaisarvoja  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vastaavia ominaisvektoreita.

- (1) Osoita, että  $\bar{W}_k$  on ominaisarvoa  $\bar{\lambda}_k$  vastaava ominaisvektori jokaisella  $k = 1, \dots, n$ .
- (2) Osoita, että vektorit  $W_1, \dots, W_n$  ovat lineaarisesti riippumattomia.

Olkoot

$$V_{2j-1} = \frac{1}{2}(W_j + \bar{W}_j)$$

ja

$$V_{2j} = \frac{-i}{2}(W_j - \bar{W}_j)$$

kaikilla  $j = 1, \dots, n$ .

- (3) Osoita, että vektorit  $V_1, \dots, V_{2n}$  muodostavat avaruuden  $\mathbb{R}^{2n}$  kannan.

Olkoon  $C$  kannanvaihto standardikannasta kantaan  $V_1, \dots, V_{2n}$  (siis  $Ce_j = V_j$  kaikilla  $j = 1, \dots, 2n$ ).

- (4) Määritä matriisi  $C^{-1}AC$ .

**3.9.** Olkoot  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  metrisiä avaruuksia. Osoita, että lausekkeet

$$\begin{aligned}d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \\d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}, \\d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max\{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)\}\end{aligned}$$

määrittelevät metriikat tuloavaruudessa  $X \times Y$ .

**3.10.** Todista Lemma 3.6.

**3.11.** Todista Propositio 3.7.

**3.12.** Olkoot  $D = \text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda)$ ,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Määritä matriisit  $\exp D$ ,  $\exp(tN)$  ja  $\exp(tA)$ .

**3.13.** Todista Propositio 3.11(1).

#### 4. EPÄLINEAARISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Aiemmissa luvuissa tarkastelimme lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista. Monissa tilanteissa tavattavat differentiaaliyhtälöt ovat kuitenkin yleisempää muotoa, esimerkiksi muotoa

- $\dot{x} = f(x)$ , missä vektorikenttä  $f$  ei ole lineaarinen, tai
- $\dot{x} = f(x, t)$ , missä kuvaus  $f$  on ajasta riippuva.

Jälkimmäinen ongelma on pieni kuten jo johdantoluvussa totesimme: Korvataan  $n$  muuttujan differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = f(x, t)$   $n + 1$  muuttujan yhtälöllä lisäämällä uusi muuttuja  $x_{n+1} = t$  ja yhtälö:  $\dot{x}_{n+1} = 1$ .

Monissa sovelluksissa päädytään tarkastelemaan epälineaarisia differentiaaliyhtälöitä kuten Esimerkin 1.4 Lotkan ja Volterran yhtälö.

**Esimerkki 4.1** (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

missä  $b \geq 0$  on kitkakerroin. Muutetaan tämä toisen asteen differentiaaliyhtälö yhtälöpariksi valitsemalla toiseksi muuttujaksi  $v = \dot{\theta}$ , jolloin saadaan epälineaarinen differentiaaliyhtälö

$$(26) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases}.$$

Todistamme tässä luvussa epälineaaristen yhtälöiden Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen. Sitä ennen valmistelemme hieman tarkastelemalla kutistavia kuvauksia metrisissä avaruuksissa.

**4.1. Kutistavat kuvaukset metrisessä avaruudessa.** Metrinen avaruus  $X$  on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

**Esimerkki 4.2.** Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  suljettu ja rajoitettu väli. Välillä  $I$  määriteltyjen jatkuvien kuvausten  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektoriavaruus  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$  varustettuna maksiminormilla

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla  $d(f, g) = \|f - g\|$ .

Olkoot  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  metrisiä avaruuksia ja olkoon  $K > 0$ . Kuvaus  $F: X \rightarrow Y$  on *K-Lipschitz-kuvaus* tai *K-Lipschitz(-jatkuva)*, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille  $x, y \in X$ . Jos  $F$  on *K-Lipschitz* jollain  $K > 0$ , niin sanotaan, että  $F$  on *Lipschitz-jatkuva*. Jos  $F$  on *K-Lipschitz* jollain  $K < 1$ , niin sanotaan, että  $F$  on *kutistava* (vakiolla  $K$ ).

Piste  $x \in X$  on kuvauksen  $F: X \rightarrow X$  *kiintopiste*, jos  $F(x) = x$ .

**Lause 4.3** (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause). *Olkoon  $X$  täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella  $F: X \rightarrow X$  on täsmälleen yksi kiintopiste.*

*Todistus.* Olkoon  $x \in X$  ja olkoot  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ . Olkoon  $F: X \rightarrow X$  kutistava kuvaus vakiolla  $K < 1$ . Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono  $(F^j(x))_{j=1}^\infty$  on Cauchyn jono ja koska  $X$  on täydellinen, tämä jono suppenee kohti jotain pistettä  $x_\infty \in X$ .

Piste  $x_\infty$  on kuvauksen  $F$  kiintopiste, sillä kaikille  $j \in \mathbb{N}$  pätee

$$\begin{aligned} d(x_\infty, F(x_\infty)) &\leq d(x_\infty, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_\infty)) \\ &\leq (1+K)d(x_\infty, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun  $j \rightarrow \infty$ . Metriikan positiivisuudesta seuraa, että  $x_\infty = F(x_\infty)$ .

Jos  $x_\infty$  ja  $y_\infty$  ovat kiintopisteitä, niin

$$Kd(x_\infty, y_\infty) \geq d(F(x_\infty), F(y_\infty)) = d(x_\infty, y_\infty),$$

joten  $d(x_\infty, y_\infty) = 0$  ja siis  $x_\infty = y_\infty$ . □

**4.2. Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause.** Todistamme nyt Picardin ja Lindelöfin klassisen lauseen alkuarvotehtävien ratkaisujen olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä. Klassinen todistus saa miellyttävän rakenteen, kun käytämme Luvussa 4.1 käsiteltyjä metristen avaruuksien käsitteitä ja tuloksia.

**Lause 4.4** (OY-lause). *Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  avoin väli ja olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olkoon  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva kuvaus, jolle kuvaus  $x \mapsto f(t, x)$  on  $M$ -Lipschitz jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ . Jokaisella  $(a, b) \in I \times U$  on  $\delta > 0$  siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(27) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

on välillä  $]a - \delta, a + \delta[$  määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

*Todistus.* Todistamme lauseen tapauksessa, jossa  $U = \mathbb{R}^n$  ja  $f$  on  $M$ -Lipschitz. Yleisen tapauksen todistus samalla idealla esitetään esimerkiksi kirjassa [HK].

Olkoon siis  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $M$ -Lipschitz-kuvaus. Valitaan  $0 < \delta < \frac{1}{M}$ . Olkoon  $(a, b) \in ]a - \delta, a + \delta[ \times \mathbb{R}^n$ . Picardin operaattori on kuvaus  $\mathcal{P}_{a,b}: C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$ ,

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(T) = b + \int_a^T f(s, \phi(s)) ds.$$

Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

**Lemma 4.5.** *Kuvaus  $\phi: [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  on alkuarvotehtävän (27) ratkaisu välillä  $]a - \delta, a + \delta[$ , jos ja vain jos se on Picardin operaattorin  $\mathcal{P}_{a,b}$  kiintopiste.*

*Todistus.* Kuvaus  $\phi$  on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$(28) \quad \phi(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Jos  $\phi$  on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon  $\phi(a) = b$ . Lisäksi kuvaus  $\phi$  on differentioituva ja toteuttaa ehdon  $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t))$  analyysin peruslauseen nojalla.

Toisaalta, jos  $\phi$  on alkuarvotehtävän (27) ratkaisu välillä  $]a - \delta, a + \delta[$ , niin kaikilla  $t \in ]a - \delta, a + \delta[$  pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s) ds = \phi(t),$$

joten  $\phi$  on kiintopiste. □

**Lemma 4.6.** *Picardin kuvaus on kutistava.*

*Todistus.*

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\| \leq \delta M \|\phi - \psi\|. \quad \square$$

Lemman 4.6 ja Lauseen 4.3 mukaan Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 4.5 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (27) ainoa ratkaisu välillä  $]a - \delta, a + \delta[$ . □

Lausetta 4.4 voi soveltaa aina, kun  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  on  $C^1$ , sillä  $f|_B$  on Lipschitz-jatkuva, kun  $B \subset U$  on suljettu pallo.

**Seuraus 4.7** (Autonominen OY-lause). *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -kuvaus. Jokaisella  $a \in \mathbb{R}$  ja  $x_0 \in U$  on  $\delta > 0$  siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(29) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

*on välillä  $]a - \delta, a + \delta[$  määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.* □

**Esimerkki 4.8.** Vaikka tarkastelemmekin lähinnä korkeampiulotteisia tilanteita, on hyvä muistaa, miten Picardin iteraatio antaa alkuarvotehtävän  $\dot{y} = y$ ,  $y(0) = 1$  ratkaisun: Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio  $y_0(t) = 1$ . Tällöin

$$y_1(t) = \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}.$$

Kuvausten  $y_k$  muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

Osoitamme seuraavaksi, että toisiaan riittävän lähellä olevia alkuarvoja vastaavat ratkaisut pysyvät lähellä toisiaan: Merkitään jatkossa alkuarvotehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(a) = b$  ratkaisua  $\phi_{a,b}$ .

**Propositio 4.9.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -Lipschitz-jatkuva. Olkoon  $\epsilon > 0$ . Tällöin on  $\eta > 0$ , jolle*

$$\|\phi_{a,b} - \phi_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \|\phi_{a,b}(t) - \phi_{a,b'}(t)\| < \epsilon,$$

*jos  $\|b - b'\| < \eta$ .*

*Todistus.* Todistus seuraa suoraan seuraavasta parametrisoitujen kutistavien kuvausten tuloksesta valitsemalla kutistavien kuvausten perheeksi Picardin operaattorit, jotka parametrisoidaan alkuarvoilla  $b \in U$ . Käytämme tuloavaruudessa  $X \times Y$  metriikkaa

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

**Propositio 4.10.** *Olkoon  $X$  täydellinen metrinen avaruus ja olkoon  $Y$  metrinen avaruus. Olkoon  $0 < K < 1$  ja olkoon  $F: X \times Y \rightarrow X$  jatkuva kuvaus, jolle kuvaus  $F_y = F(\cdot, y): X \rightarrow X$  on kutistava kuvaus vakiolla  $K$  jokaiselle  $y \in Y$ . Olkoon  $g: Y \rightarrow X$  kuvaus, jonka arvo pisteessä  $y$  on kuvauksen  $F_y$  kiintopiste. Tällöin kuvaus  $g$  on jatkuva.*

*Todistus.* Havaitaan, että kaikille  $x \in X$  pätee

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^k d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) + d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)),$$

joten

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) = \frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x)),$$

sillä äärellinen summa on pienempi kuin  $\frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x))$  ja  $d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)) \rightarrow 0$ , kun  $k \rightarrow \infty$ , koska  $g(y)$  on kutistavan kuvauksen  $F_y$  kiintopiste. Valitaan  $x = g(y') = F(g(y'), y')$ , jolloin yllä oleva epäyhtälö antaa

$$(30) \quad d_X(g(y'), g(y)) \leq \frac{1}{1-K} d_X(F(g(y'), y'), F(g(y'), y)).$$

Tulometriikan määritelmän mukaan  $d_Y(y', y) = d_1((g(y'), y'), (g(y'), y))$ , joten kuvauksen  $F$  jatkuvuuden ja yhtälön (30) nojalla nähdään, että  $d_X(g(y'), g(y)) \rightarrow 0$ , kun  $d_Y(y', y) \rightarrow 0$ , kuten väitettiin.  $\square$

Palaamme Proposition 4.9 todistukseen tapauksessa  $U = \mathbb{R}^n$ : Väite seuraa valitsemalla  $X = C^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n)$ ,  $Y = \mathbb{R}^n$  ja  $F: X \times Y \rightarrow X$ ,  $F(\phi, b) = \mathcal{P}_{a,b}(\phi)$ .  $\square$

**Esimerkki 4.11.** Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix}$$

ratkaisut alkuarvoilla  $x_0 = (0.9, 0)$  ja  $x_1 = (0.95, 0)$  käyttäytyvät samaan tapaan (itse asiassa kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ ), kun taas alkuarvolla  $x_2 = (1.1, 0)$  käyttäytyminen on erilaista kuin alkuarvoilla  $x_0$  ja  $x_1$ , kun  $t$  kasvaa.

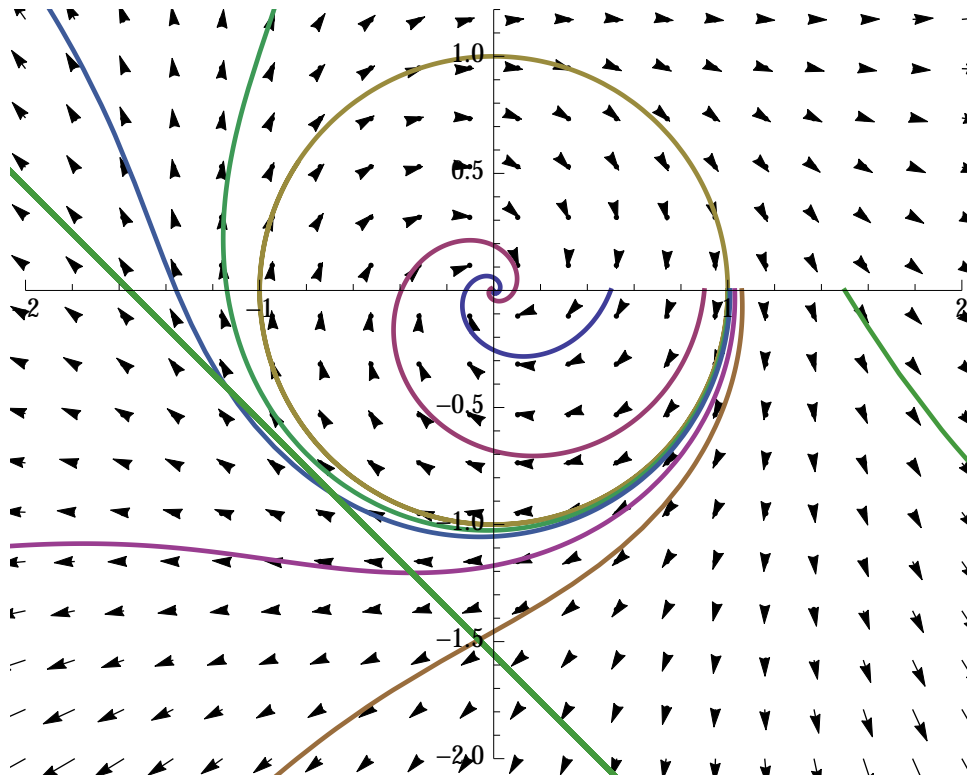
Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C^1$ -vektorikenttä. Autonomisella alkuarvototehtävällä

$$(31) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on OY-lauseen mukaan jollain avoimella välillä  $t_0 \in I$  määritelty yksikäsitteinen ratkaisu. Maksimaalista tällaista väliä kutsutaan ratkaisun *maksimaaliseksi määrittelyväliksi*.

**Propositio 4.12.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ . Tällöin*

- (1) *Jokaisella  $x_0 \in U$  ja  $t_0 \in \mathbb{R}$  on alkuarvototehtävän (31) maksimaalinen avoin määrittelyväli.*
- (2) *Jos  $U = \mathbb{R}^n$  ja  $f$  on  $K$ -Lipschitz, niin maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ .*



*Todistus.* (a) Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että  $t_0 = 0$ . OY-lauseen mukaan alkuarvotehtävällä on ratkaisu, joka on yksikäsitteisesti määritelty jollain välillä  $] - \delta, \delta[$ . Tehdään ensin seuraava havainto: Jos  $I_1$  ja  $I_2$  ovat avoimia välejä, joilla alkuarvotehtävän ratkaisut  $x_1$  ja  $x_2$  on määritelty, niin  $x_1(t) = x_2(t)$  kaikilla  $t \in I_1 \cap I_2$ . Nimittäin, jos tämä ei päde, niin on maksimaalinen osaväli  $[0, t^*] \subset I_1 \cap I_2$ , jossa ratkaisut yhtyvät. Olkoon  $x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*)$ . Nyt  $x_1$  ja  $x_2$  ovat alkuarvotehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(t^*) = x^*$  ratkaisuja jollain välillä  $]t^* - a, t^* + a[$ , joten ne yhtyvät tällä välillä. Tämä on ristiriita ajan  $t^*$  määritelmän kanssa.

Olkoon  $J = ]\alpha, \beta[$  yhdiste kaikista alkuarvotehtävän ratkaisuväleistä. Määritellään kuvaus  $x: ]\alpha, \beta[ \rightarrow U$  näin: Jokaisella  $t \in J$  on alkuarvotehtävän (31) ratkaisu  $u$ , joka on määritelty jollain ajan  $t$  sisältämällä välillä. Asetetaan  $x(t) = u(t)$ . Edellä tehdyn havainnon mukaan  $x$  on nyt hyvin määritelty. Lisäksi se on alkuarvotehtävän (31) ratkaisu.

Kohta (2) todistetaan harjoituksissa. □

Silloinkin, kun differentiaaliyhtälö on määritelty koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ , niin maksimaalinen määrittelyväli voi olla pienempi kuin koko  $\mathbb{R}$ , jos  $f$  ei ole Lipschitz-jatkuva, kuten Esimerkissä 1.1 käsitellyn differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = x^2$  ratkaisujen käyttäytyminen osoittaa.

**Esimerkki 4.13.** Alkuarvotehtävää

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2/x_3^2 \\ x_1/x_3^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1/\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/\pi \end{pmatrix}$$

on luonnollista tarkastella joukossa  $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ . Tämän alkuarvotehtävän ratkaisu voidaan itse asiassa antaa helposti:

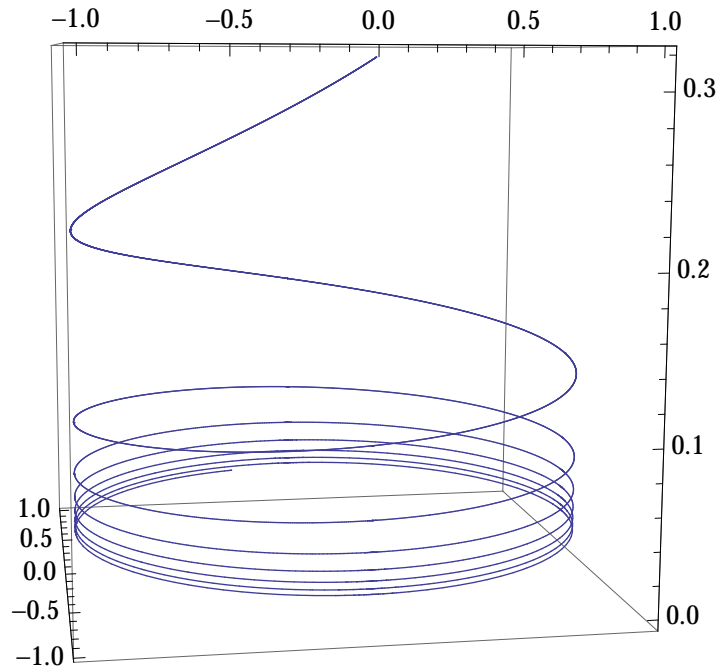
$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on  $]0, \infty[$ . Ratkaisukäyrä on sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ja kun  $t \rightarrow 0$ , niin ratkaisukäyrä kasautuu kohti ympyrää

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$



Koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  määritellyille differentiaaliyhtälöille saadaan Proposition 4.12 nojalla soveltamalla Propositiota 4.9 toistuvasti (luokkaa  $T/\delta$  kertaa) jatkuvuus alkuarvosta pidemmille aikaväleille:

**Propositio 4.14.** *Olkkoon  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -Lipschitz-jatkuva. Olkkoot  $T, \epsilon > 0$ . Tällöin on  $\eta > 0$ , jolle*

$$\|\phi_{a,b} - \phi_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq T} \|\phi_{a,b}(t) - \phi_{a,b'}(t)\| < \epsilon,$$

jos  $\|b - b'\| < \eta$ . □

Seuraava autonomisten differentiaaliyhtälöiden ominaisuus on tärkeä geometrisen hahmottamisen apukeino:

**Seuraus 4.15.** *Olkkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ . Jos kahden pisteen radat leikkaavat, niiden radat ovat joukkoina samat.*

*Todistus.* Olkkoot  $x$  ja  $y$  vektorikentän  $f$  määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja maksimaalisilla määrittelyväleillään  $I_x$  ja  $I_y$ . Oletetaan, että  $x(t_x) = y(t_y)$ . Olkkoon  $s: I_x \rightarrow I_x - t_x + t_y$  kuvaus  $s(t) = t - t_x + t_y$ . Nyt  $x$  ja  $y \circ s$  ovat alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(t_x) = x(t_x) \end{cases}$$

ratkaisuja, joten ne yhtyvät välillä  $I_x$ . Kuvausten  $y$  ja  $y \circ s$  kuvajoukko on sama, joten väite seuraa. □

## Harjoitustehtäviä.

4.1. Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  suljettu ja rajoitettu väli. Osoita, että lauseke

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

määrittää normin vektoriavaruudessa  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ . Osoita, että  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$  on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla  $d(f, g) = \|f - g\|$ .<sup>4.1</sup>

4.2. Iteroi Picardin operaattoria kolme kertaa alkuarvototehtävälle

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz-jatkuva. Osoita OY-lauseen ja sen todistuksen avulla, että alkuarvototehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on ratkaisu, joka on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

4.4. Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  rajoitettu  $C^1$ -vektorikenttä. Osoita, että sen kaikkien ratkaisujen maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ .

4.5. Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvasti differentioituva vektorikenttä ja olkoon  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $x$  alkuarvototehtävän

$$(32) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu. Oletetaan, että  $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in \mathbb{R}^n$ . Osoita, että  $x_\infty$  on differentiaaliyhtälön (32) tasapainopiste.

---

<sup>4.1</sup>Vihje: Analyysi 3/Sarjat ja approksimointi.



## 5. VAKION VARIOINTI

Tässä luvussa poikkeamme hetkeksi epähomogeenisten yhtälöiden pariin. Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  suljettu, rajoitettu väli ja olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin yhtenäinen joukko,  $I, U \neq \emptyset$ . Olkoon  $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  jatkuva kuvaus ja olkoon  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva. Differentiaaliyhtälö

$$(33) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

on ( $n$ -ulotteinen) lineaarinen differentiaaliyhtälö. Jos  $f \equiv 0$ , niin yhtälö (33) on homogeeninen.

Luvussa 8 todistamme seuraavan tuloksen, joka ei sisälly Lauseeseen 4.4

**Lause 5.1.** *Olkoon  $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$  kompakti väli. Olkoot  $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  ja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvia kuvauksia. Olkoon  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin alkuarvotetävällä*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) + f(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

*on yksikäsitteinen ratkaisu välillä  $I$ .*

Lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisulla on seuraava hyvä ominaisuus, joka yleistää Seurauksen 3.15.

**Lause 5.2.** *Olkoon  $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  jatkuva. Jos  $x_0$  on lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön*

$$\dot{x} = A(t)x$$

*ratkaisu ja  $x_f$  on differentiaaliyhtälön*

$$(34) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

*ratkaisu, niin  $x_f + x_0$  on differentiaaliyhtälön (34) ratkaisu. Lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisut muodostavat  $n$ -ulotteisen reaalisen vektoriavaruuden.*

*Todistus.* Väitteen ensimmäinen osa, jota kutsutaan *superpositioperiaatteeksi*, todistetaan harjoituksissa. Ratkaisuavaruuden  $n$ -ulotteisuus osoitetaan superpositioperiaatteen avulla samaan tapaan kuin vastaava väite Seurauksen 3.15 todistuksessa. □

**Seuraus 5.3.** *Olkoon  $x$  lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisu. Jos  $x(t_0) = 0$  jollain  $t_0$ , niin  $x \equiv 0$ .*

*Todistus.* Vakiokuvaus  $x \equiv 0$  on alkuarvotetävän ratkaisu alkuarvolla  $x(t_0) = 0$ . Ratkaisu on yksikäsitteinen koko välillä Lauseen 5.1 nojalla. □

**Seuraus 5.4.** *Olkoot  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$  lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja avoimella välillä  $I \subset \mathbb{R}$ . Jos vektorit  $x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), \dots, x^{(k)}(t_0)$  ovat lineaarisesti riippumattomia jollain  $t_0 \in I$ , niin vektorit  $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$  ovat lineaarisesti riippumattomia kaikilla  $t \in I$ .*

*Todistus.* Harjoitus. □

Jos  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  ovat  $n$ -ulotteisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja ja jos  $X: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  on kuvaus, jolle matriisin  $X(t)$  sarakkeet ovat  $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ , niin  $X$  on ratkaisujen  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  *Wronskin determinantti*. Seuraava tulos Wronskin determinantin kaksijakoisesta käyttäytymisestä saadaan erikoistapauksena Seurauksesta 5.4.

**Seuraus 5.5.** Jos Wronskin determinantti saa arvon 0 jossain määrittelyvälin pisteessä, niin se on nollafunktio.  $\square$

Lineaarisen epäautonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisu saadaan menetelmällä, jota kutsutaan *vakion varioinniksi*. Jos epäautonominen differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = f(x, t)$  muunnetaan autonomiseksi, tuloksena ei ole koskaan ole lineaarinen autonominen yhtälö; jo aikaparametrin  $x_{n+1} = t$  differentiaaliyhtälö  $\dot{x}_{n+1} = 1$  tekee yhtälöstä

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases} .$$

epälineaarisen. Tämän vuoksi seuraava tulos laajentaa aidosti niiden differentiaaliyhtälöiden joukkoa, joille tunnemme ratkaisun ainakin periaatteessa eksplisiittisesti.

**Lause 5.6.** Olkoon  $A$   $n \times n$ -matriisi ja olkoon  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva kuvaus. Kuvaus

$$x(t) = \exp(tA) \left( x_0 + \int_0^t \exp(-sA)G(s) ds \right)$$

on alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu, kun  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

*Todistus.* Harjoitus.  $\square$

**Esimerkki 5.7.** Tarkastellaan nyt *pakotettua* vaimenevaa värähtelijää: Esimerkissä 2.10 kuvatun vaimenevan värähtelijän jousen päässä liikkuvaan painoon vaikuttaa nyt jokin ulkoinen voima  $g(t)$ , joka aiheuttaa *ajasta mutta ei paikasta riippuvan kiihtyvyyden*. Epäautonomisen alkuarvottehtävän

$$(35) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2 + g(t) \end{cases}$$

ratkaisu saadaan Lauseen 5.6 avulla. Nyt siis

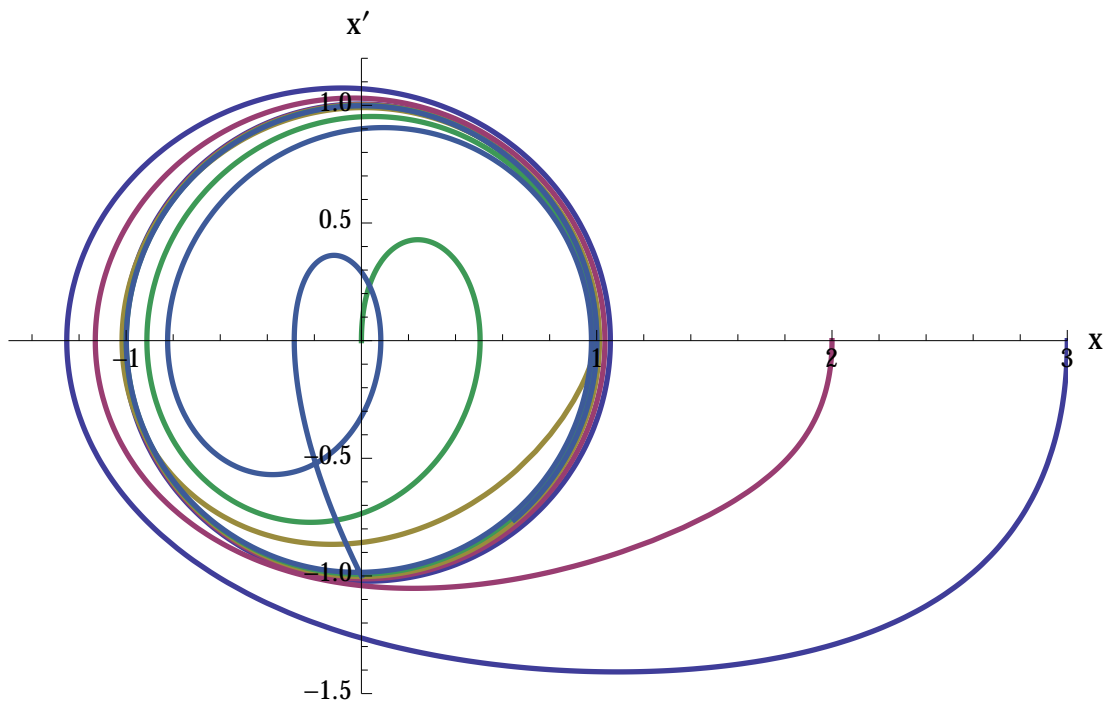
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

ja

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} .$$

Tarkastellaan erityisesti tilannetta, jossa pakottava voima on jaksollinen  $g(t) = \cos(t)$ . Alkuarvottehtävän (35) ratkaisu on siis

$$(36) \quad y(t) = \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds.$$



KUVA 11. Pakotettu vaimeneva värähtelijä parametreilla  $m = k = b = 1$  alkuarvoilla  $y(0) = (3, 0)$ ,  $y(0) = (2, 0)$ ,  $y(0) = (0, 0)$ ,  $y(0) = (1, 0)$ ,  $y(0) = (0, -1)$ . Kuvassa  $t \in [0, 15]$ .

Numeerisesti laskettuja esimerkkejä tarkastelemalla näyttäisi siltä, että alkuarvosta riippumatta ratkaisut lähestyvät samaa ympyrää, jonka koko riippuu vaimenevan värähtelijän parametreista.

Kuvasta 11 huomaamme myös, että epäautonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyrät voivat leikata itseään "epät triviaalilla tavalla". Jos korvaamme differentiaaliyhtälön (35) autonomisella yhtälöllä ottamalla ajan kolmanneksi muuttujaksi ja lisäämällä yhtälöön ehdon  $\dot{t} = 1$ , niin kuva 11 esittää tämän uuden yhtälön ratkaisun projektiota mihin tahansa aika-akselia vastaan kohtisuoraan tasoon. OY-lauseen mukaan uuden yhtälön ratkaisukäyrät eivät leikkaa itseään vaikka niiden projektiot näin tekevätkin.

Jos OY-lauseen oletukset toteuttavan autonomisen yhtälön ratkaisulle pätee  $y(t_1) = y(t_2)$ , niin ratkaisu on  $|t_2 - t_1|$ -jaksollinen. Tarkasteltavassa alkuarvototehtävässä (35) pakottava termi on  $2\pi$ -jaksollinen. Siis, jos tämän alkuarvototehtävän ratkaisulle pätee  $y(2\pi) = y_0 = y(0)$ , niin ratkaisu  $y$  on  $2\pi$ -jaksollinen. Itse asiassa alkuarvototehtävällä on täsmälleen yksi  $2\pi$ -jaksollinen ratkaisu: Jos  $y(2\pi) = y_0$ , niin

$$y_0 = \exp(2\pi A)y_0 + \exp(2\pi A) \int_0^{2\pi} \exp(-sA)G(s)ds = \exp(2\pi A)y_0 + w,$$

joten alkuarvo  $y_0$  vastaa  $2\pi$ -jaksollista rataa, jos ja vain jos se on yhtälön

$$(37) \quad (I_2 - \exp(2\pi A))y_0 = w$$

ratkaisu. Matriisin  $A$  ominaisarvojen reaali-osat ovat negatiivisia, joten matriisin  $\exp A$  ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1, erityisesti siis kumpikaan niistä ei ole 1. Siis matriisi  $\exp(2\pi A) - I$  on kääntövä ja yhtälöllä (37) on täsmälleen yksi ratkaisu  $y_0 = (I_2 - \exp(2\pi A))^{-1}w \in \mathbb{R}^2$ .

Jos  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ , niin alkuarvotehtävän (35) ratkaisu alkuarvolla  $z_0$  on

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(tA)z_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + y(t), \end{aligned}$$

missä  $y(t)$  on edellä löydetty  $2\pi$ -jaksollinen ratkaisu. Termi  $\exp(tA)(z_0 - y_0)$  lähestyy nollaa, kun  $t \rightarrow \infty$  koska se on spiraalinielua vastaavan lineaarisen autonomisen alkuarvotehtävän (20) ratkaisu alkuarvolla  $z_0 - x_0$ .

Esimerkiksi, kun  $m = k = b = 1$ ,  $y(t) = (\sin t, \cos t)$  on alkuarvotehtävän (35)  $2\pi$ -jaksollinen ratkaisu alkuarvolla  $(0, 1)$ .

## Harjoitustehtäviä.

**5.1.** Todista Lauseeseen 5.2 sisältyvä superpositioperiaate.

**5.2.** Todista Seuraus 5.4.

**5.3.** Todista Lause 5.6.

**5.4.** Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + t \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 1 \\ x(0) = (1, 0). \end{cases}$$

**5.5.** <sup>5.5</sup> Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ja olkoon

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä  $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = 0 \end{cases}$ .

---

<sup>5.5</sup>Vihje: Harjoitustehtävä 3.3

6. EPÄLINEAARISTEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN RATKAISUJEN LOKAALIA TARKASTELUA

Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvasti differentioituva. Olkoon  $p \in \mathbb{R}^n$  differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste (siis  $f(p) = 0$ ). Lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = Df(p)x$$

on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  *linearisointi* pisteessä  $p$ . Jos lineaarikuvauksella  $Df(p)$  ei ole ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolla, niin tasapainopiste  $p$  on *hyperbolinen*. Hyperbolisen tasapainopisteen *tyyppi* on vastaavan linearisoidun differentiaaliyhtälön tyyppi, tason tapauksessa siis satula, nielu, lähde, ....

**Esimerkki 6.1.** Differentiaaliyhtälöllä

$$(38) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

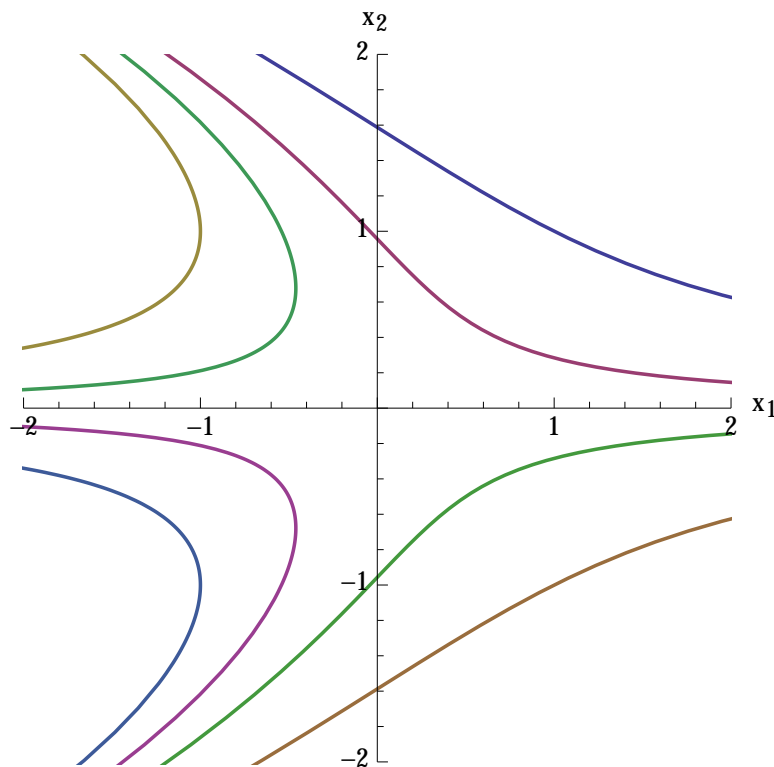
on yksi tasapainopiste  $x = 0$ . Tässä pisteessä sen linearisointi on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Linearisoitu yhtälö on hyperbolinen ja sen ratkaisut tunnemme jo hyvin: Origo on satulapiste. Alkuperäisen epälineaarisen differentiaaliyhtälön (38) ratkaiseminen ei ole vaikeaa:

$$x(t) = \begin{pmatrix} (a + b^3/2)e^t - b^3/2e^{-2t} \\ be^{-t} \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ .



KUVA 12. Esimerkin 6.1 epälineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyriä.

Jos tasapainopiste  $p$  on hyperbolinen, niin differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisut käyttäytyvät lähellä pistettä  $p$  kuten linearisoidun yhtälön ratkaisut lähellä origoa. Täsmällisemmin:

**Lause 6.2** (Grobmanin ja Hartmanin lause). *Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvasti differentioituva. Jos  $p$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  hyperbolinen tasapainopiste, niin on avoimet joukot  $p \in U \subset \mathbb{R}^n$  ja  $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$  ja homeomorfismi  $H: U \rightarrow V$  siten, että jokaiselle  $x_0 \in U$  on avoin väli  $0 \in I \subset \mathbb{R}$ , jolla on seuraava ominaisuus: Olkoon  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu alkuarvolla  $x_0$  ja olkoon  $A$  lineaarikuvauksen  $Df(p)$  matriisi standardikannassa. Tällöin kaikille  $t \in I$  pätee*

$$(39) \quad H \circ x(t) = \exp(At)H(x_0).$$

*Todistus.* Katso esimerkiksi [Har2, Thm. 7.1] □

**Esimerkki 6.3.** Esimerkin 6.1 differentiaaliyhtälöllä on satulapiste origossa. Tässä tapauksessa Grobmanin ja Hartmanin lauseen homeomorfismi  $H$  on globaali homeomorfismi  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2/3 \\ x_2 \end{pmatrix} = y.$$

Kuvaus  $H$  on homeomorfismi, itse asiassa se on diffeomorfismi, sen käänteiskuvaus on

$$H^{-1}(y) = \begin{pmatrix} y_1 - y_2^2/3 \\ y_2 \end{pmatrix} = x.$$

Nyt differentiaaliyhtälö tulee uudessa koordinaatissa  $y$  muotoon

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 + \frac{2}{3}x_2\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2 - \frac{2}{3}x_2^2 = y_1$$

ja

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = -x_2 = -y_2,$$

joka on alkuperäisen differentiaaliyhtälön linearisointi tasapainosteessä 0.

Kuvaus  $H$  kuvaa  $x_1$ -akselin  $y_1$ -akseliksi ja paraabelin

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + \frac{1}{3}x_2^2\}$$

$y_2$ -akseliksi. Yhtälön (39) mukaan alkuarvoja  $x_0 \in S - \{0\}$  vastaavat ratkaisut lähestyvät origoa oleellisesti eksponentiaalista vauhtia. Käyrä  $S$  on tasapainopisteen 0 *vakaa käyrä* (stable curve). Vastaavasti  $x_1$ -akseli on tasapainopisteen 0 *epävakaa käyrä*: siltä valituilla alkuarvoilla ratkaisut menevät äärettömyyteen eksponentiaalisella nopeudella.

Joissain tapauksissa differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytyminen on helpompi hahmottaa napakoordinaattien avulla. Napakoordinaattikuvaus on  $N: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ,

$$N(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Derivoimalla komponenttifunktiot saadaan

$$(40) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}, \end{aligned}$$

ja derivoimalla yhtälöiden

$$\begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

vasemmat ja oikeat puolet saadaan käyttökelpoiset yhtälöt

$$(41) \quad \begin{cases} r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ r^2\dot{\theta} = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1. \end{cases}$$

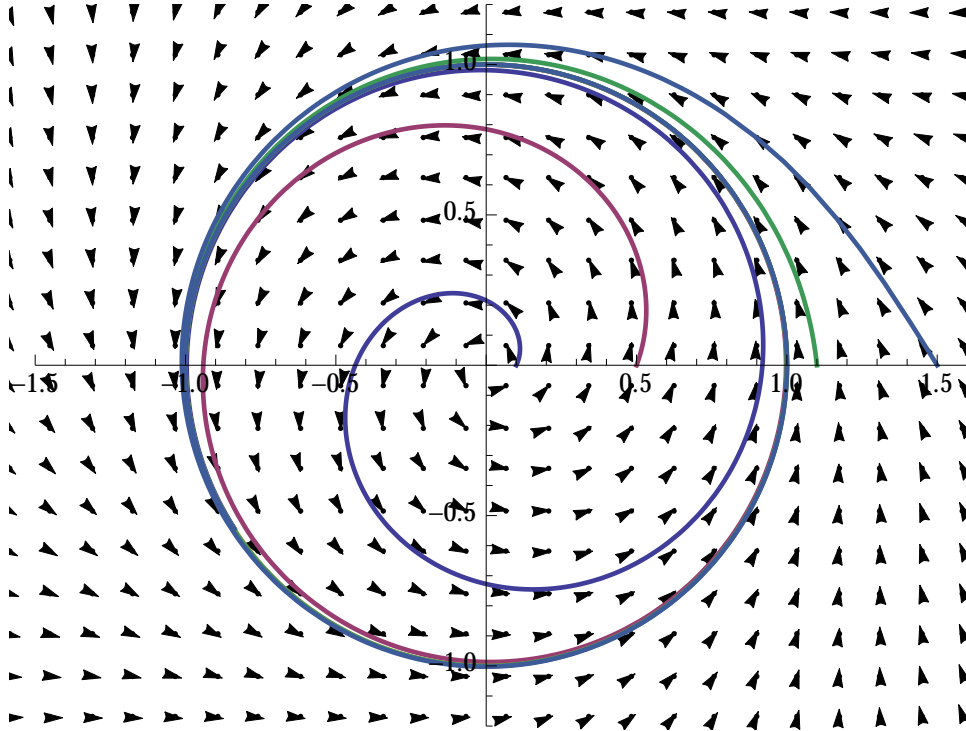
**Esimerkki 6.4.** Differentiaaliyhtälön

$$(42) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2x_1}{2} \\ x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2x_2}{2} \end{pmatrix}$$

ainoa tasapainopiste on 0. Linearisoitu yhtälö on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 \\ x_1 + \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x = Ax$$

Matriisin  $A$  ominaisarvot ovat  $\frac{1}{2} \pm i$ , joten origo on hyperbolinen tasapainopiste ja Grobmanin ja Hartmanin lausetta voi soveltaa: 0 on spiraalilähde. Ratkaisukäyrät ovat samat kuin Esimerkissä 4.11, mutta ratkaisut kulkevat käyrillä vastakkaiseen suuntaan.



Epälineaarinen differentiaaliyhtälö (42) voidaan ratkaista vaihtamalla napakoordinaatteihin: Yhtälöiden (40) avulla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2x_1}{2} &= \frac{1}{2}(r - r^3) \cos \theta - r \sin \theta \\ x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2x_2}{2} &= \frac{1}{2}(r - r^3) \sin \theta + r \cos \theta, \end{aligned}$$

Vertaamalla sinin ja kosinin kertoimia saadaan alkuperäisen kanssa ekvivalentti differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa:

$$(43) \quad \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2)/2 \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Sama tulos saadaan tietenkin myös käyttämällä yhtälöitä (41).

Kulmakomponentin ja radiaalisen komponentin yhtälöt siis eriytyvät. Ratkaisusta  $\theta(t) = t + \theta_0$  nähdään, että ratkaisut kiertävät origoa tasaisella kulmanopeudella.

Säteen differentiaaliyhtälöstä nähdään suoraan, että alkuarvoilla  $r = 1$  ratkaisukäyrä on yksikköympyrän parametrusointi vakionopeudella. OY-lauseen nojalla ratkaisukäyrät eivät leikkaa toisiaan, joten yksikköympyrästä lähtevät ratkaisut pysyvät rajoitettuina yksikköympyrään. Koska linearisoidun systeemin ratkaisut menevät äärettömyyteen, kun  $t \rightarrow \infty$ , ei Grobmanin ja Hartmanin lauseen homeomorfismi  $H$  voi olla koko tasossa määritelty kuvaus.

Napakoordinaattimuodossa oleva yhtälö (43) voidaan ratkaista eksplisiittisesti:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0 e^{t/2}}{\sqrt{r_0(e^t - 1) + 1}} \\ \theta(t) = \theta_0 + t \end{cases}$$

on ratkaisu alkuarvolla  $(r(0), \theta(0)) = (r_0, \theta_0)$ .

Grobmanin ja Hartmanin lauseen 6.2 mukaan  $C^1$ -vektorikentän virtaus on topologisesti konjugaatti vektorikentän linearisoinnin virtauksen kanssa pienessä ympäristössä. Seuraava esimerkki osoittaa, että konjugoiva kuvaus ei välttämättä ole kovin sileä.

**Esimerkki 6.5.** Olkoot  $\epsilon \neq 0$  ja  $\alpha > \gamma > 0$ . Olkoon  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektorikenttä

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ (\alpha - \gamma)x_2 + \epsilon x_1 x_3 \\ -\gamma x_3 \end{pmatrix}.$$

Vektorikentän  $f$  linearisointi tasapainopisteessä 0 on  $\dot{y} = Ay$ , missä  $A = \text{diag}(\alpha, \alpha - \gamma, \gamma)$ , on hyperbolinen.

Olkoon  $\psi_x$  alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = f(\psi(t)), \\ \psi(0) = X \end{cases}$$

ratkaisu. Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu alkuarvolla  $X = (X_1, X_2, X_3)$  on

$$\psi_X(t) = \begin{pmatrix} X_1 e^{\alpha t} \\ (X_2 + \epsilon X_1 X_3 t) e^{(\alpha - \gamma)t} \\ X_3 e^{-\gamma t} \end{pmatrix}.$$

Grobmanin ja Hartmanin lauseen 6.2 mukaan on lokaali homeomorfismi  $H: U \rightarrow H(U)$ , joka on määritelty jossain origon ympäristössä ja jolle pätee

$$H(\psi_x(t)) = \exp(At)H(x)$$

kaikille  $x \in U$  ja itseisarvoltaan riittävän pienille  $t$ .

On helppo tarkastaa, että homeomorfismit

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \epsilon x_1 x_3 \log |x_1|/\alpha \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ja

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \epsilon x_1 x_3 \log |x_3|/\alpha \\ x_3 \end{pmatrix}$$



konjugoivat vektorikentän  $f$  ja sen linearisoinnin virtaukset. Vektorikenttä  $f$  on selvästi  $C^\infty$ -kuvaus mutta kuvaukset  $H_1$  ja  $H_2$  eivät ole  $C^1$ -kuvauksia. Osoittautuu, että vektorikentän  $f$  määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja ei voi konjugoida linearisointinsa ratkaisuksi  $C^1$ -diffeomorfismilla [Har1].

**Esimerkki 6.6.** Olkoon  $f: B(0,1) \rightarrow \mathbb{R}^2$   $C^1$ -vektorikenttä

$$f(x) = \begin{cases} -x + \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{\log \|x\|} \\ +\frac{x_2}{\log \|x\|} \end{pmatrix}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

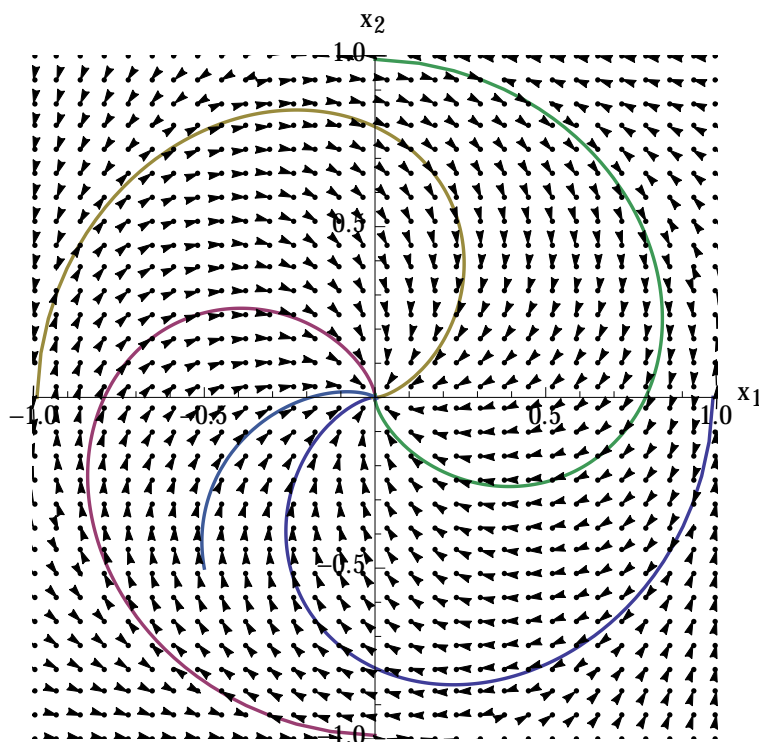
Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  linearisointi on  $\dot{x} = -x$ , jonka ratkaisut ovat  $x(t) = e^{-t}x$ , joten origo on linearisoinnin lähde ja ratkaisujen käyttäytyminen on hyvin yksinkertainen. Yhtälö  $\dot{x} = f(x)$  on napakoordinaateissa

$$\begin{cases} \dot{r} = -r \\ \dot{\theta} = \frac{1}{\log r}, \end{cases}$$

joten sen ratkaisu napakoordinaateissa alkuarvolla  $(r_0, \theta_0)$  on

$$\begin{cases} r(t) = e^{-t}r_0 \\ \theta(t) = \theta_0 - \log |\log r_0 - t|. \end{cases}$$

Siis ratkaisut lähestyvät nollaa hitaasti kiertyvää spiraalia pitkin ja erityisesti  $\theta(t) \rightarrow -\infty$ , kun  $t \rightarrow \infty$ .



Tämä esimerkki osoittaa, että Grobmanin ja Hartmanin lauseen antama homeomorfismi ei voi olla kovin paljon siistimpi kuin homeomorfismi tässä tapauksessa.

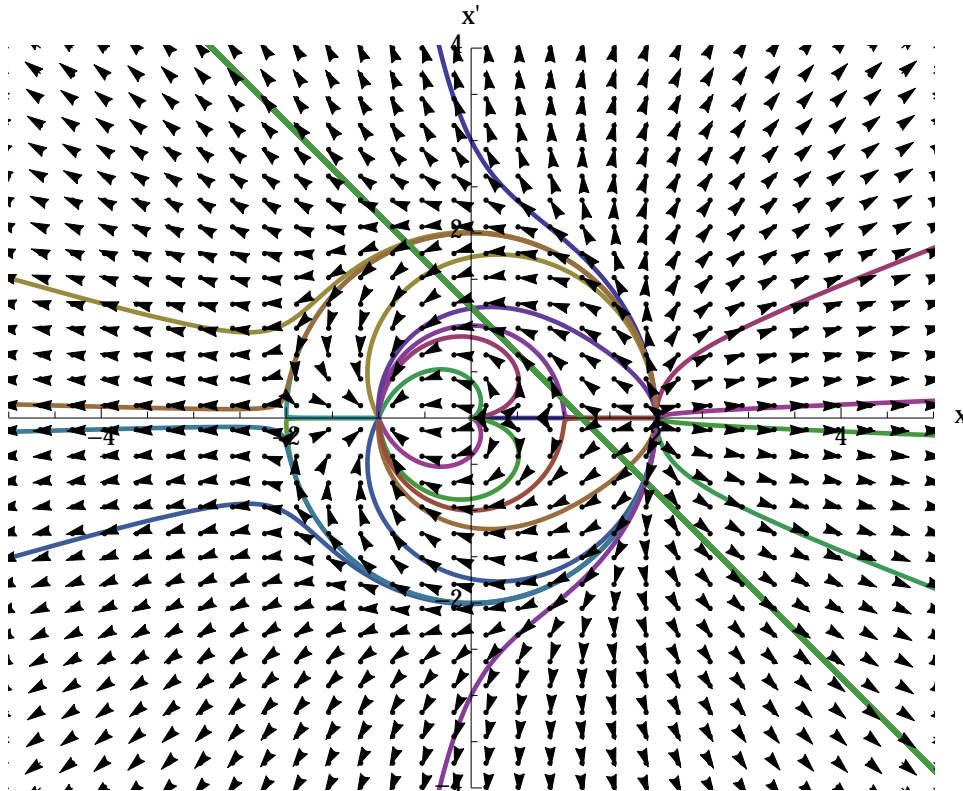
**Esimerkki 6.7.** Napakoordinaateissa määritelty differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r-1)(r-2) \\ \dot{\theta} = \sin \theta \end{cases}$$

määrää karteesisissa koordinaateissa  $C^\infty$ -vektorikentän  $f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x) = x(\|x\| - 1)(\|x\| - 2) + \frac{x_2}{\|x\|} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Tämä vektorikenttä on käyttäytyy hankalasti origon lähellä. Sillä on tasapainopisteet  $(\pm 1, 0)$  ja  $(\pm 2, 0)$ . Linearisoinnit ovat satula  $\text{diag}(2, -1)$  pisteessä  $(-2, 0)$ , nielu  $\text{diag}(-1, -1)$  pisteessä  $(-1, 0)$ , satula  $\text{diag}(-1, 1)$  pisteessä  $(1, 0)$  ja lähde  $\text{diag}(2, 1)$  pisteessä  $(2, 0)$ .



Monilla alkuarvoilla ratkaisu lähestyy jotain tasapainopistettä, kun  $t \rightarrow \infty$  ja jotain toista tasapainopistettä, kun  $t \rightarrow -\infty$ . Näin käy esimerkiksi alkuarvolla  $(0, 1)$  ja kaikilla muillakin yksikköympyrän pisteillä paitsi tasapainopisteillä  $(\pm 1, 0)$ .

### Harjoitustehtäviä.

6.1. Olkoon  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x) = (x_1, \|x\|^2 - 1).$$

- Etsi differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopisteet.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Hahmottele vektorikenttää  $f$  ja kuvaile differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisujen käyttäytymistä käsin tai Mathematicalla.

6.2. • Määritä Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälön (13) tasapainopisteet.

- Linearisoi differentiaaliyhtälö (13) tasapainopisteissä.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Olkoon  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(r, h) = \frac{h^a r^c}{e^{bh} e^{dr}}.$$

Osoita, että  $V$  on vakio jokaiselle differentiaaliyhtälön (13) ratkaisulle. Toisin sanoen, jos kuvaus  $t \mapsto (r(t), h(t))$  on differentiaaliyhtälön (13) ratkaisu, niin kuvaus  $t \mapsto V(r(t), h(t))$  on vakio.

**6.3.** Olkoon  $\epsilon > 0$ . Tarkastellaan tason differentiaaliyhtälöä

$$(44) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + \epsilon x_1 \|x\| \\ x_1 + \epsilon x_2 \|x\| \end{pmatrix}.$$

- Määritä differentiaaliyhtälön (44) tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö (44) tasapainopisteissä.
- Ratkaise linearisoitu differentiaaliyhtälö ja kuvaile sen ratkaisujen käyttäytymisen.
- Muuta epälineaarinen differentiaaliyhtälö (44) napakoordinaattimuotoon ja ratkaise se.
- Miten parametri  $\epsilon$  vaikuttaa ratkaisujen käyttäytymiseen? Piirrä muutamia selvittäviä kuvia.

**6.4.** Analysoi epälineaarisen heilurin differentiaaliyhtälön (26) tasapainopisteiden linearisoinnit kitkan  $b$  eri arvoilla. Mitä tapahtuisi, jos kitkaa kuvaava parametri olisikin positiivinen?

**6.5.** Olkoon  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

ja olkoon  $\nabla V$  sen gradienttivektorikenttä. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä  $\dot{x} = -\nabla V(x)$ .

- Määritä differentiaaliyhtälön (44) tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö (44) tasapainopisteissä.
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Miten vektorikenttä  $-\nabla V$  ja funktion  $V$  tasa-arvokäyrät suhtautuvat toisiinsa?
- Hahmottele differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä.

**6.6.** <sup>6.6</sup> Olkoon  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ -funktio. Osoita, että differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = -\nabla V$  linearisoinneilla tasapainopisteissä on vain reaalisia ominaisarvoja.

---

<sup>6.6</sup>Vihje: Differentiaalilaskenta 1 ja Lineaarinen algebra ja geometria 2 auttavat.

## 7. DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN VIRTAUS

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Ensimmäisellä kurssilla tarkastelimme alkuarvotehtävän

$$(45) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ratkaisua, joka on jollain välillä  $\Delta \subset \mathbb{R}$  määritelty differentioituva polku  $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ . OY-lauseen 4.7 mukaan alkuarvotehtävällä (45) on ratkaisu jokaisella alkuarvolla  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Propositiossa 4.9 osoitimme, että alkuarvotehtävän ratkaisu riippuu jatkuvasti alkuarvosta. Tarkastelemme nyt lähemmin differentiaaliyhtälön määäämiä kuvauksia joukolta  $U$  itselleen.

**Esimerkki 7.1.** Olkoon  $A$  reaalin  $n \times n$ -matriisi. Lineaarisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  jokaisen ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ . Lauseen 3.13 mukaan ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = x_0$  on

$$\psi_{0,x_0}(t) = \exp(At)x_0.$$

Matriisien eksponenttifunktio määrää jokaisella kiinteällä ajanhetkellä  $t \in \mathbb{R}$  kuvauksen  $\phi_t = \exp(At): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jolle pätee kaikilla  $s, t \in \mathbb{R}$

- (1)  $\phi_0 = \text{id}$ ,
- (2)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ .

Erityisesti pätee  $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \text{id}$ , joten kuvaus  $\phi_t$  on bijektio jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ . Koska  $\exp(At)$  on kääntyvä  $n \times n$ -matriisi, se määrää avaruuden  $\mathbb{R}^n$  lineaarisen automorfismin, joka on tunnetusti homeomorfismi.

Konkreettisenä esimerkkinä Esimerkissä 1.3 tarkastellun differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

ratkaisut

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cos t + b_2 \sin t \\ -b_1 \sin t + b_2 \cos t \end{pmatrix}$$

antavat kuvausperheen  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ,

$$\phi^t(b) = \begin{pmatrix} b_1 \cos t + b_2 \sin t \\ -b_1 \sin t + b_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Jos tarkasteltavan differentiaaliyhtälön ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$  kaikilla alkuarvoilla, osoitamme, että se määrää vastaavanlaisen perheen kuvauksia  $\phi_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , jolla on ominaisuudet (1) ja (2) kuten yllä.

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Jatkuva kuvaus  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ , jolle pätee

- (1)  $\phi(0, x) = x$  kaikilla  $x \in U$ ,
- (2)  $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s+t, x)$  kaikilla  $x \in U$  ja kaikilla  $s, t \in \mathbb{R}$ .

on *virtaus* joukossa  $U$ . Kuvaus  $\phi_t: U \rightarrow U$ ,

$$\phi_t(x) = \phi(t, x)$$

on virtauksen  $\phi$  *aika-t-kuvaus*. Joukko

$$\mathcal{O}_\phi(x) = \{\phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$$

on pisteen  $x$  *rata* virtauksessa  $\phi$ .

**Lemma 7.2.** *Virtauksen aika- $t$ -kuvauksella on ominaisuudet*

- (1)  $\phi_0 = \text{id}$  ja  
 (2)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$ .

*Todistus.* (1)  $\phi_0(b) = \phi(0, b) = b$  kaikilla  $b \in U$ .

(2)  $\phi_t \circ \phi_s(b) = \phi(t, \phi(s, b)) = \phi(s + t, b) = \phi_{s+t}(b)$  kaikilla  $s, t \in \mathbb{R}$  ja  $b \in U$ .  $\square$

**Propositio 7.3.** *Olkkoon  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$  virtaus. Tällöin kuvaus  $\phi_t: U \rightarrow U$  on homeomorfismi jokaiselle  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Todistus.* Kuvaukset  $\phi_t$  ja  $\phi_{-t}$  ovat oletuksen mukaan jatkuvia. Ominaisuuden (2) nojalla pätee

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0 = \text{id},$$

joten  $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ .  $\square$

**Propositio 7.4.** *Olkkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä, jolle jokaisen alkuarvotehdävän*

$$(46) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

*ratkaisun  $\psi_{0,x}$  maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ . Tällöin kuvaus  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ ,*

$$(47) \quad \phi(t, x) = \psi_{0,x}(t)$$

*on virtaus joukossa  $U$ .*

*Todistus.* Olkkoon  $\phi$  määritelty lausekkeella (47). Kuvaus  $\phi$  on jatkuva Proposition 4.9 nojalla, koska differentiaaliyhtälön ratkaisut riippuvat jatkuvasti alkuarvoista. Olkkoon  $t \in \mathbb{R}$ . Tällöin kaikille  $s \in \mathbb{R}$  ja  $b \in U$

$$\phi(s, \phi(t, b)) = \phi_s \circ \phi_t(b) = \phi_s(\psi_{0,b}(t)) = \psi_{0,\psi_{0,b}(t)}(s) = \Psi_1(s)$$

ja

$$\phi(s + t, b) = \phi_{s+t}(b) = \psi_{0,b}(s + t) = \Psi_2(s)$$

Molemmat kuvaukset  $\Psi_1, \Psi_2: \mathbb{R} \rightarrow U$  ovat differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisuja. Lisäksi

$$\Psi_1(0) = \psi_{0,\psi_{0,b}(t)}(0) = \psi_{0,b}(t) = \Psi_2(0),$$

joten yksikäsitteisyyslauseen nojalla  $\Psi_1 = \Psi_2$ , mistä väite seuraa.  $\square$

Propositio 7.4 kuvaus  $\phi$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  määräämä virtaus tai vektorikentän  $f$  määräämä virtaus.

Täydennykseksi on syytä todeta vastaavuus toiseen suuntaan:

**Propositio 7.5.** *Jos  $C^1$ -kuvaus  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$  on virtaus joukossa  $U$ , niin se on vektorikentän  $\frac{\partial}{\partial t}\phi(0, x)$  määräämä virtaus.*

*Todistus.* Olkkoon  $x \in U$  ja olkkoon  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow U$  kuvaus  $\psi(t) = \phi(t, x)$ . Nyt  $\dot{\psi}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(0, x)$ , mistä väite seuraa.  $\square$

**Seuraus 7.6.** *Olkkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  rajoitettu  $C^1$ -vektorikenttä. Tällöin  $f$  määrää avaruuden  $\mathbb{R}^n$  virtauksen.*

*Todistus.* Seuraa Propositioista 7.4 ja Harjoitustehtävästä 4.4  $\square$

**Esimerkki 7.7.** Olkoon  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ . Kuvaukset  $\phi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\phi^t(b) = x_b(t) = b + t\lambda,$$

$t \in \mathbb{R}$  muodostavat tason virtauksen. Tämä virtaus on vakiokentän  $f \equiv \lambda$  määräämä.

Vektorikentän määräämä virtaus on *jatkuva-aikainen dynaaminen systeemi*. Se liittyy ehkä tutumpiin diskreettiaikaisiin dynaamisiin systeemeihin tai iteraatioteoriaan aika- $t$ -kuvausten kautta: Esimerkiksi  $\phi(n, x) = \phi_1^n(x)$  kaikilla  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Esimerkki 7.8.** Jos  $\lambda, \mu > 0$ , niin pisteen  $x_0 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  rata iteroitaessa matriisiin  $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$  määräämää lineaarikuvausta, siis joukko  $\{B^n x_0 : n \in \mathbb{Z}\}$  on osa pisteen  $x_0$  rataa differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \text{diag}(\log \lambda, \log \mu)$ , määräämässä virtauksessa.

Virtaustulkinnan mukaan vektorikenttä  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (tai differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = f(x)$ ) määrää joukon  $U$  jatkuvan deformaation itselleen. Tämä deformaatio pitää vektorikentän tasapainopisteet paikallaan.

Olkoon  $\phi$  virtaus metrisessä avaruudessa  $X$ . Osajoukko  $A \subset X$  on *positiivisesti  $\phi$ -invariantti*, jos  $\phi_t(A) \subset A$  kaikilla  $t \geq 0$ . Se on *negatiivisesti  $\phi$ -invariantti*, jos  $\phi_t(A) \subset A$  kaikilla  $t \leq 0$  ja  *$\phi$ -invariantti*, jos se on positiivisesti ja negatiivisesti invariantti virtauksessa  $\phi$ .

Pisteen  $x \in X$   $\omega$ -rajajoukko on

$$\omega_\phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi([t, \infty[, x)} = \bigcap_{T=0}^{\infty} \left( \overline{\bigcup_{t=T}^{\infty} \phi(t, x)} \right),$$

ja sen  $\alpha$ -rajajoukko on

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\phi(]-\infty, t], x)} = \bigcap_{T=0}^{-\infty} \left( \overline{\bigcup_{t=T}^{-\infty} \phi(t, x)} \right).$$

Jos joukko  $\Omega$  on jonkin pisteen  $\omega$ - tai  $\alpha$ -rajajoukko, niin  $\Omega$  on *rajajoukko*.

**Propositio 7.9.** Olkoon  $\phi$  virtaus metrisessä avaruudessa  $X$ . Tällöin

- (1) jokaisen pisteen  $x \in X$   $\omega$ -rajajoukko  $\omega_\phi(x)$  on suljettu ja  $\phi$ -invariantti.
- (2) jos avaruuden  $X$  suljetut pallot ovat kompakteja ja pisteen  $x$  positiivinen  $\phi$ -rata on rajoitettu, niin  $\omega_\phi(x)$  ei ole tyhjä joukko.
- (3) jos avaruuden  $X$  suljetut pallot ovat kompakteja ja pisteen  $x$  rata on rajoitettu, niin  $\omega_\phi(x)$  on yhtenäinen.

*Todistus.* Rajajoukot ovat suljettuja, koska ne ovat suljettujen joukkojen leikkauksia. Loput väitteet todistetaan harjoituksissa.  $\square$

Jos  $z$  on piste, jonka rata on jaksollinen mutta  $z$  ei ole kiintopiste, pisteen  $z$  rataa sanotaan *syklikksi*. Sykli  $\Omega$  on  $\omega$ -rajasykli, jos on  $x \notin \Omega$ , jolle  $\Omega \subset \omega(x)$  ja vastaavasti  $\alpha$ -rajasykli, jos on  $x \notin \Omega$ , jolle  $\Omega \subset \alpha(x)$ .

**Esimerkki 7.10.** Esimerkin 6.4 differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix},$$

on napakoordinaateissa

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2)/2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}.$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuarvolla  $(r_0, \theta_0)$  on

$$(48) \quad \begin{cases} r(t) = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{e^t + 1/r_0^2 - 1}} \\ \theta = \theta_0 + t \end{cases}$$

Kaikilla suljettuun yksikkökiekkoon  $\overline{\mathbb{D}}$  sisältyvillä alkuarvoilla ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ . Lauseke (48) määrää virtauksen  $\phi$  joukossa  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Tasapainopisteelle 0 pätee  $\omega_\phi(0) = \alpha_\phi(0) = \{0\}$ . Jokaisella  $x \in \overline{\mathbb{D}} - \{0\}$  pätee  $\omega_\phi(x) = \mathbb{S}^1$ . Jos  $\|x\| = 1$ , niin  $\mathcal{O}_\phi(x) = \omega_\phi(x) = \alpha_\phi(x) = \mathbb{S}^1$ , joten  $\mathbb{S}^1$  on rajasykli. Jos  $\|x\| < 1$ , niin  $\alpha_\phi(x) = \{0\}$ .

**Esimerkki 7.11.** Olkoon  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tarkastellaan lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$(49) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi i z_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi \alpha i z_2 \end{cases}$$

avaruudessa  $\mathbb{C}^2$ . Jos  $\mathbb{C}^2$  ja  $\mathbb{R}^4$  identifoidaan asettamalla  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$ , saadaan reaalin differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\pi y_1 \\ \dot{y}_1 = 2\pi x_1 \\ \dot{x}_2 = -2\pi \alpha y_2 \\ \dot{y}_2 = 2\pi \alpha x_2 \end{cases}$$

Yhtälö (49) on helppo ratkaista: sen virtaus on  $\phi^\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ :

$$\phi_t^\alpha(w_1, w_2) = (e^{2\pi i t} w_1, e^{2\pi \alpha i t} w_2).$$

Molempien kompleksisten koordinaattien virtaukset säilyttävät kaikki 0-keskiset ympyrät kompleksitasossa, joten jokaisella  $r_1, r_2 > 0$  muodostettu *torus*

$$\begin{aligned} T(r_1, r_2) &= \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\} \\ &= \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| = r_1\} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

on invariantti virtauksessa.

Jos  $\alpha = p/q$  on rationaaliluku,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , niin  $\phi^\alpha(t + q, z) = \phi^\alpha(t, z)$  kaikilla  $z$ , joten kaikki radat ovat jaksollisia. Erityisesti kaikkien tasapainopisteestä 0 poikkeavien pisteiden radat ovat homeomorfisia ympyrän  $\mathbb{S}^1$  kanssa.

Jos  $\alpha$  on irrationaaliluku, niin kuvaus  $t \mapsto \phi_t^\alpha(z)$  on injektiivinen kaikille  $z \in \mathbb{C}^2$ , joille  $z_1 \neq 0$  ja  $z_2 \neq 0$ , sillä  $e^{2\pi i q} = 1$ , jos ja vain jos  $q \in \mathbb{Z}$  mutta  $e^{2\pi i \alpha q} \neq 1$  kaikilla  $q \in \mathbb{Z}$ . Osoittautuu, että

$$\omega_\phi(z) = \alpha_\phi(z) = T(|z_1|, |z_2|) = T$$

jokaiselle  $z \neq 0$ : Jokaiselle  $z \in T$  pätee

$$\phi^\alpha(t + q, z) = (z_1, e^{2\pi i \alpha q} z_2)$$

kaikilla  $q \in \mathbb{Z}$ . Koska joukko  $\{e^{2\pi i \alpha q} z_2 : q \in \mathbb{Z}\}$  on tiheä ympyrällä  $\{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\}$ , niin ympyrä  $\{z_1\} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\}$  sisältyy pisteen  $z$   $\omega$ -rajajoukkoon. Toistamalla sama tarkastelu joukolle

$$\phi^\alpha(t + q + s, z) = (e^{2\pi i s} z_1, e^{2\pi i s} e^{2\pi i \alpha q} z_2)$$

kaikille  $s \in [0, 1[$ , saadaan  $\omega_\phi(z) = T$ .

Jos toruksella  $T(r_1, r_2)$  käytetään kulmakoordinaatteja  $(\theta_1, \theta_2)$ , niin torus voidaan esittää neliön  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  tekijäavaruutena kuten topologian kurssilla samastamalla neliön pystysivut keskenään ja vaakasivut keskenään tai yhtäpitävästi tason  $\mathbb{R}^2$

tekijävaruutena  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , joka saadaan samastamalla pisteet  $(x, y)$  ja  $(x+2\pi n, y+2\pi m)$  kaikilla  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Tällöin differentiaaliyhtälöä (49) vastaa vakiovektorikentän antama differentiaaliyhtälö

$$(50) \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = 2\pi \\ \dot{\theta}_2 = 2\pi\alpha, \end{cases}$$

jonka ratkaisuja ovat kaikki affiinit suorat, joiden kulmakerroin on  $\alpha$ . Tasossa differentiaaliyhtälön (50) virtaus on siis triviaali kaikilla  $\alpha$  mutta tekijävaruudessa  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  sen radat ovat joko harvoja tai tiheitä parametrin  $\alpha$  rationaalisuudesta riippuen.

**Harjoitustehtäviä.** Tehtävissä 7.1- 7.5  $\phi$  on virtaus avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ .

**7.1.** Osoita, että  $\omega_\phi(x)$  ei ole tyhjä joukko, jos pisteen  $x \in \mathbb{R}^n$  positiivinen rata

$$\{\phi_t(x) : t \in [0, \infty[ \}$$

on rajoitettu.

**7.2.** Osoita, että jokaisen pisteen  $x \in \mathbb{R}^n$   $\omega$ -rajajoukko  $\omega_\phi(x)$  on  $\phi$ -invariantti.

**7.3.** <sup>7.3</sup>Osoita, että  $\omega_\phi(x)$  on yhtenäinen, jos se on rajoitettu.

**7.4.** Olkoon  $\phi$  virtaus avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ . Olkoon  $P \subset \mathbb{R}^n$  positiivisesti  $\phi$ -invariantti kompakti osajoukko. Olkoon  $x \in P$  ja olkoon  $z \in \omega_\phi(x)$ . Osoita, että pisteen  $z$  koko rata sisältyy joukkoon  $P$ .

**7.5.** Anna esimerkki virtauksesta, jolla on rajoittamaton epäyhtenäinen  $\omega$ -rajajoukko. (Esimerkin ei tarvitse olla eksplisiittinen.)

**7.6.** Tarkastele differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - \|x\|^2) \\ x_1 + x_2(1 - \|x\|^2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ratkaisujen käyttäytymistä. Mitä tapahtuu ympyrän  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$  lähellä?

**7.7.** Olkoon  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1 - 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Etsi differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopisteet ja määritä niiden tyypit.

(b) Mitä Grobmanin ja Hartmanin lause kertoo tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuksista?

(c) Miten ratkaisut käyttäytyvät hyperbolisten tasapainopisteiden kautta kulkevilla suorilla?

(d) Hahmottele vektorikenttää  $f$  ja kuvaile differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisujen käyttäytymistä.

---

<sup>7.3</sup>Vihje: Jos se ei ole yhtenäinen, se voidaan erottaa kahden erillisen avoimen joukon sisään. Mutta mitä näiden komplementissa tapahtuu?



## 8. VIRTAUKSEN SILEYS JA PEANON OLEMASSAOLOLAUSE

Osoitamme tässä luvussa, että  $C^1$ -vektorikentän virtaus on  $C^1$ -kuvaus. Todistus perustuu variaatioyhtälön käyttöön: Autonomisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisun  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  variaatioyhtälö on

$$(51) \quad \dot{u}(t) = Df(x(t))u(t).$$

Variaatioyhtälö on epäautonominen homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö. Näille yhtälöille pätee vahvempi versio OY-lauseesta, jota käytimme jo Lauseen 5.2 todistuksessa.

**Lause 8.1.** *Olkkoon  $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$  kompakti väli. Olkkoon  $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  jatkuva kuvaus. Tällöin alkuarvotehdävällä*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

*on yksikäsitteinen ratkaisu välillä  $I$ .*

Lauseen 8.1 todistus vaatii hieman valmisteluja. Aloitamme todistamalla yleisen ratkaisujen olemassaolotuloksen, jossa vektorikentästä oletetaan vähemmän kuin Picardin ja Lindelöfin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseessa. Alla todistettavan Peanon lauseen päätelmä on myös heikompi, ratkaisun yksikäsitteisyyttä ei saada tässä tapauksessa. Esimerkin 1.7 vektorikenttä toteuttaa Peanon lauseen ehdot mutta ei Picardin ja Lindelöfin lauseen ehtoja.

Olkkoon  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Olkkoon  $A$  epätyhjä joukko ja olkkoon  $f_\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  jokaiselle  $\alpha \in A$ . Kuvausperhe  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  on *yhtäjatkuva*, jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on  $\delta > 0$  siten, että  $\|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)\| < \epsilon$  kaikille  $x, y \in E$ , joille  $\|x - y\| < \delta$  kaikille  $\alpha \in A$ . Erityisesti, jos kaikki kuvaukset  $f_\alpha, \alpha \in A$  ovat  $K$ -Lipschitz-jatkuvia samalla  $K > 0$ , niin perhe  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  on yhtäjatkuva.

Tarvitsemme Topologian kurssilla todistettavaa tärkeää tulosta:

**Lause 8.2** (Arzelan ja Ascolin lause). *Olkkoon  $E \subset \mathbb{R}^m$  kompakti joukko. Jos  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$  on tasaisesti rajoitettu yhtäjatkuva jono kuvauksia  $f_\alpha \in C^0(E, \mathbb{R}^m)$ , niin sillä on suppeneva osajono. Tämä osajono suppenee kohti jatkuvaa kuvausta  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ .*

*Todistus.* Katso esimerkiksi [Mun], luku 45 tai [BH] Lemma 3.10. □

**Lause 8.3** (Peanon olemassaololause). *Olkkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olkkoot  $b \in U$  ja  $r > 0$  siten, että  $\overline{B}(b, r) \subset U$ . Olkkoon  $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$  suljettu väli. Oletetaan, että kuvaus  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  on jatkuva ja  $\|f(x, t)\| \leq M$  joukossa  $I \times B(b, r)$ . Olkkoon  $\alpha = \min(a, r/M)$ . Tällöin alkuarvotehdävällä*

$$(52) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = b \end{cases}$$

*on ainakin yksi välillä  $[t_0, t_0 + \alpha]$  määritelty ratkaisu.*

*Todistus.* Olkkoon  $\delta > 0$  ja olkkoon  $y_0: [t_0 - \delta, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -kuvaus, jolla on ominaisuudet

$$y_0(t_0) = b, \quad \|y_0(t) - b\| \leq r, \quad \text{ja} \quad \|y_0'(t)\| \leq M,$$

kun  $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ . Määritellään kuvaus  $y_\epsilon: [t_0 - \delta, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  kaikille  $0 < \epsilon \leq \delta$  asettamalla ensin

$$y_\epsilon(t) = y_0(t), \quad \text{kun } t \in [t_0 - \delta, t_0],$$

ja

$$y_\epsilon(t) = b + \int_{t_0}^t f(s, y_\epsilon(s - \epsilon)) ds, \text{ kun } t \in [t_0, t_0 + \min(\epsilon, \alpha)],$$

Tällöin  $y_\epsilon$  toteuttaa

$$\|y_\epsilon(t) - b\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_\epsilon(s - \epsilon)) ds \right\| \leq M|t - t_0| \leq r,$$

koska  $|t - t_0| \leq \alpha \leq r/M$  ja vastaavalla laskulla nähdään, että  $y_\epsilon$  on  $M$ -Lipschitz-jatkuva välillä  $[t_0 - \delta, t_0 + \min(\epsilon, \alpha)]$ . Asetetaan sitten

$$y_\epsilon(t) = b + \int_{t_0}^t f(s, y_\epsilon(s - \epsilon)) ds, \text{ kun } t \in [t_0 + \min(\epsilon, \alpha), t_0 + \min(2\epsilon, \alpha)],$$

ja saadaan  $M$ -Lipschitz-jatkuva kuvaus, joka toteuttaa  $\|y_\epsilon(t) - b\| \leq r$ , kun  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \min(2\epsilon, \alpha)]$ . Jatketaan näin, kunnes on määritelty jatkuva kuvaus  $y_\epsilon: [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jolla on samat ominaisuudet koko määrittelyvälillään.

Perhe  $(y_\epsilon)_{0 < \epsilon \leq \delta}$  on rajoitettu, koska kaikkien kuvausten kuvajoukot sisältyvät palloon  $\overline{B}(b, r)$  ja se on yhtäjatkuva koska kaikki kuvaukset ovat  $M$ -Lipschitz-jatkuvia. Siis Arzelan ja Ascolin lauseen 8.2 nojalla on jono  $(\epsilon(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , jolle  $\epsilon(n) \rightarrow 0$  ja  $y_{\epsilon(n)}$  suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa kuvausta  $y: [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \rightarrow \overline{B}(b, r)$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Koska kuvaus  $f$  on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa  $I \times \overline{B}(b, r)$ , saadaan integraaliyhtälö

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\epsilon(n)}(t) = b + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{\epsilon(n)}(s - \epsilon_n(s))) ds = b + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

joten  $y$  on alkuarvot tehtävän (52) ratkaisu. □

**Esimerkki 8.4.** Tarkasteltaessa yksiulotteisen alkuarvot tehtävän  $\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$  rat-

kaisua välillä  $[0, 1]$  Peanon olemassaololauseen avulla voidaan aloittaa vakioratkaisulla  $y_0 \equiv 1$ . Määritellään sitten

$$y_\epsilon(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$$

välillä  $[0, \epsilon]$  ja sen jälkeen

$$y_\epsilon(t) = 1 + \int_0^t y_\epsilon(s - \epsilon) ds = 1 + \epsilon + \int_\epsilon^t (1 + s - \epsilon) ds = 1 + t + \frac{(t - \epsilon)^2}{2}$$

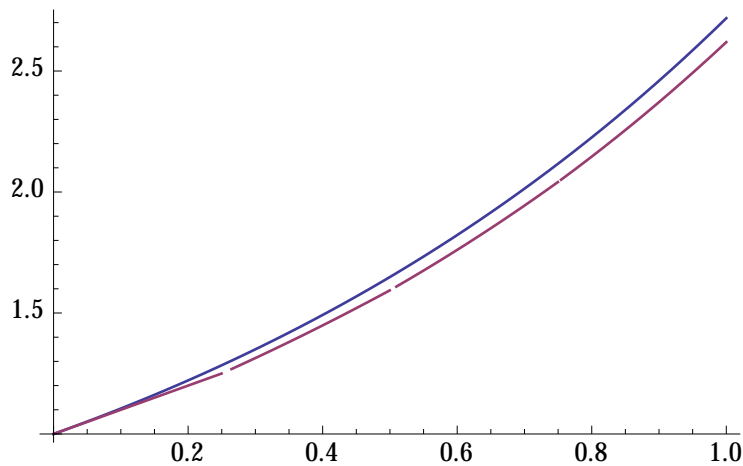
ja jatketaan näin. Kun  $\epsilon \rightarrow 0$  funktiot  $y_\epsilon$  suppenevat tasaisesti kohti eksponenttifunktiota. Kuvassa funktion  $y_{1/4}$  ja alkuarvot tehtävän ratkaisun, eksponenttifunktion (ylempi käyrä) kuvaajat.

Peanon lauseen lisäksi tarvitsemme seuraavan teknisen tuloksen:

**Propositio 8.5** (Grönwallin epäyhtälö). *Olkoon  $g: [0, a] \rightarrow [0, \infty[$  jatkuva funktio. Jos on  $C \geq 0$  ja  $K \geq 0$ , joille*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds$$

*kaikille  $t \in [0, a]$ , niin  $g(t) \leq Ce^{Kt}$  välillä  $[0, a]$ . Erityisesti, jos  $C = 0$ , niin  $g$  on vakiofunktio  $g \equiv 0$ . □*



*Todistus.* Olkoon  $G(t) = C + K \int_0^t g(s) ds$ . Oletetaan ensin, että  $C > 0$ . Oletuksen mukaan  $0 \leq g(t) \leq G(t)$  ja  $G(t) \geq C > 0$  kaikilla  $t \in [0, a]$ . Analyysin peruslauseen nojalla  $\dot{G}(t) = g(t)$ . Nyt

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \frac{Kg(t)}{G(t)} \leq \frac{KG(t)}{G(t)} = K.$$

Siis  $\log G(t) - \log G(0) \leq Kt$ , joten kaikilla  $t \in [0, a]$  pätee

$$g(t) \leq G(t) \leq G(0)e^{Kt} = Ce^{Kt},$$

kuten väitettiin.

Jos  $C = 0$ , niin jokaiselle  $C' > 0$  saadaan edellisen perusteella arvio  $g(t) \leq C'e^{Kt}$  kaikilla  $t \in [0, a]$ . Mutta tällöin  $g(t) \leq C'e^{Ka} \rightarrow 0+$ , kun  $C' \rightarrow 0+$ , joten  $g(t) = 0$  kaikilla  $t \in [0, a]$ .  $\square$

Parannamme seuraavaksi Proposition 4.9 tulosta ja todistamme Gronwallin epäyhtälön avulla Lipschitz-vektorikentän määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisujen jatkuvan riippuvuuden alkuarvoista eksplisiittisemmässä muodossa.

**Lause 8.6.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -Lipschitz-kuvaus. Olkoot  $x, y: I \rightarrow U$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisuja suljetulla välillä  $I = [t_0, t_1]$ . Tällöin kaikille  $t \in I$  pätee*

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \|y(t_0) - x(t_0)\| e^{K(t-t_0)}. \quad \square$$

*Todistus.* Olkoon  $g = \|x - y\|$ . Koska

$$y(t) - x(t) = y(t_0) - x(t_0) + \int_{t_0}^t (f(y(s)) - f(x(s))) ds,$$

saamme kolmioepäyhtälöstä arvion

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \|y(t_0) - x(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t (f(y(s)) - f(x(s))) ds \right\| \\ &\leq \|y(t_0) - x(t_0)\| + K \int_{t_0}^t \|y(s) - x(s)\| ds \\ &\leq \|y(t_0) - x(t_0)\| + K \int_{t_0}^t g(s) ds. \end{aligned}$$

Väite seuraa Gronwallin epäyhtälöstä.  $\square$

*Lauseen 8.1 todistus.* Se, että ratkaisuja on korkeintaan yksi, osoitetaan Gronwallin epäyhtälön ja superpositioperiaatteen 5.2 avulla samaan tapaan kuin Lause 8.6. Ratkaisun olemassaolo lokaalisti seuraa olemassaololauseesta 8.3. Ratkaisun olemassaolo koko välillä  $I$  tehdään paloittain jatkamalla. Yksityiskohdat tehdään harjoituksissa.  $\square$

Nyt voimme todistaa luvatus tuloksen virtauksen sileydestä. Aloitamme teknisellä versiolla.

**Lause 8.7.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Olkoon  $x: I = [t_0, t_0 + a] \rightarrow U$  alkuarvotehtävän*

$$(53) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = b \end{cases}$$

*ratkaisua. Olkoon  $\xi \in \mathbb{R}^n$  siten, että  $x + \xi \in U$ . Olkoon  $y = y_\xi: I \rightarrow U$  alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(t_0) = b + \xi \end{cases}$$

*ratkaisua ja olkoon  $u = u_\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  alkuarvotehtävän (53) ratkaisua  $x$  vastaavan variaatioyhtälön*

$$\dot{u}(t) = Df(x(t))u(t)$$

*ratkaisua alkuarvolla  $u(t_0) = \xi$ . Tällöin*

$$y(t) = x(t) + u(t) + o(\xi)$$

*tasaisesti kaikilla  $t \in I$ .*

*Todistus.* Koska  $f$  on jatkuvasti differentioituva, sille pätee

$$f(p) = f(q) + Df(p)(p - q) + o(p - q), \text{ kun } p \rightarrow q$$

kaikilla  $p, q \in U$  tasaisesti (muuttujan  $q$  suhteen) kompakteilla joukoilla. Tarkasteltavien alkuarvotehtävien kanssa ekvivalenteista integraaliyhtälöistä

$$\begin{aligned} y(t) &= b + \xi + \int_{t_0}^t f(y(s))ds, \\ x(t) &= b + \int_{t_0}^t f(x(s))ds, \text{ ja} \\ u(t) &= \xi + \int_{t_0}^t Df(x(s))u(s)ds \end{aligned}$$

saadaan

(54)

$$\begin{aligned} y(t) - (x(t) + u(t)) &= \int_{t_0}^t (f(y(s)) - f(x(s)) - Df(x(s))u(s))ds \\ &= \int_{t_0}^t Df(x(s))(y(s) - x(s) - u(s))ds + \int_{t_0}^t o(x(s) - y(s))ds. \end{aligned}$$

Valitaan  $\delta > 0$  siten, että ratkaisukäyrän  $x(I)$  suljettu  $\delta$ -ympäristö  $\mathcal{N}_\delta(x(I))$  sisältyy joukkoon  $U$ . Koska  $f$  on  $C^1$ , se on  $K$ -Lipschitz-jatkua joukossa  $\mathcal{N}_\delta(x(I))$  jollain  $K \geq 0$ . Oletetaan, että  $\|\xi\| = \|y(t_0) - x(t_0)\| \leq e^{-Ka}\delta$ . Tällöin jäännöstermiä voidaan arvioida Lauseen 8.6 avulla:

$$\int_{t_0}^t o(x(s) - y(s))ds = \int_{t_0}^t o(\|x(t_0) - y(t_0)\|e^{K(s-t_0)})ds = o(\xi),$$

kun  $\xi \rightarrow 0$ .

Olkoon  $N = \max_{s \in I} \|Df(x(s))\|$ . Yhtälöstä (54) saadaan arvio

$$\|y(t) - (x(t) + u(t))\| \leq N \int_{t_0}^t \|y(t) - (x(t) + u(t))\| + o(\xi),$$

joten Gronwallin epäyhtälön nojalla kaikille  $t \in [t_0, t_0 + a]$  pätee

$$\|y(t) - (x(t) + u(t))\| \leq o(\xi)e^{N(t-t_0)} \leq o(\xi)e^{Na} = o(\xi).$$

□

Todistamme vielä yleisen tuloksen siitä, miten differentiaaliyhtälöiden ratkaisut käyttäytyvät kun yhtälö muuttuu hieman. Tämän tuloksen seurausta sovelletaan variaatioyhtälöön.

**Lause 8.8.** *Olkoon  $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ . Olkoot  $Y_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_i \in I$ ,  $i \in \mathbb{N}$  ja olkoon  $r > 0$ . Olkoot  $f_i \in C^0(I \times \overline{B}(Y_0, r), \mathbb{R}^n)$  ja olkoot  $y_i$  alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_i) = Y_i \end{cases}$$

ratkaisuja välillä  $I$ , kun  $i \in \mathbb{N}$ . Oletetaan, että jono  $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$  on tasaisesti rajoitettu. Jos  $f_i \rightarrow f_0$ ,  $t_i \rightarrow t_0$  ja  $Y_i \rightarrow Y_0$ , kun  $i \rightarrow \infty$ , niin jonolla  $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$  on suppeneva osajono. Tämän osajonon rajafunktio on alkuarvotehtävän

$$(55) \quad \begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

ratkaisu. Jos alkuarvotehtävällä (55) on yksikäsitteinen ratkaisu, niin  $y_i \rightarrow y_0$ , kun  $i \rightarrow \infty$ .

*Todistus.* Koska kuvaukset  $f_i$  ovat jatkuvia ja suppenevat tasaisesti kohti kompaktissa joukossa jatkuvaa funktiota  $f_0$ , on  $K \geq 0$ , jolle pätee  $\|f_i\| \leq K$  kaikille  $i \in \mathbb{N}$ . Siis kuvaukset  $y_i$  ovat  $K$ -Lipschitz-jatkuvia kaikilla  $i \in \mathbb{N}$ . Jono  $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$  on siis yhtäjatkuva. Lauseen 8.2 nojalla jonolla  $(y_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$  on suppeneva osajono  $(y_{i(k)})_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ . Samaan tapaan kuin Lauseen 8.3 todistuksen lopussa nähdään, että jonon  $(y_{i(k)})_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$  rajafunktio on alkuarvotehtävän (55) ratkaisu. □

**Seuraus 8.9.** *Olkoon  $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ . Olkoot  $Y_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_i \in I$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Olkoot  $A_i \in C^0(I, \text{Mat}_n(\mathbb{R}))$  ja olkoot  $y_i$  alkuarvotehtävän*

$$(56) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) \\ y(t_i) = Y_i \end{cases}$$

ratkaisuja välillä  $I$ , kun  $i \in \mathbb{N}$ . Jos  $A_i \rightarrow A_0$ ,  $t_i \rightarrow t_0$  ja  $Y_i \rightarrow Y_0$ , kun  $i \rightarrow \infty$ , niin jonolla  $y_i \rightarrow y_0$ , kun  $i \rightarrow \infty$ .

*Todistus.* Gronwallin epäyhtälön avulla saadaan, että ratkaisujen jono on tasaisesti rajoitettu. Lauseen 8.1 nojalla yhtälöllä (56) on yksikäsitteinen ratkaisu, joten Lause 8.8 antaa väitteen. □

**Seuraus 8.10.** *Jatkuvasti differentioituvan vektorikentän virtaus on jatkuvasti differentioituva.*

*Todistus.* Vektorikentän  $f$  virtauksen  $\phi$  aikaderivaatta on  $\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = f(\phi(t, x))$ , joten se on jatkuva.

Lauseen 8.7 antama kuvaus  $\xi \mapsto u_\xi(t)$  on lineaarikuvaus. Nyt

$$\phi(t, b + \xi) = y_\xi(t) = x(t) + u_\xi(t) + o(\xi) = \phi(t, b) + u_\xi(t) + o(\xi),$$

joten avaruuskomponenttien suhteen osittaisderivaatat sisältyvät edellisen lauseen mukaan lineaarikuvaukseen  $\xi \rightarrow u_\xi(t)$ . Jatkuva differentioituvuus seuraa Seurauksesta 8.9.  $\square$

### Harjoitustehtäviä.

**8.1.** Todista Lause 8.1.

**8.2.** Olkoon  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $A$  epätyhjä joukko ja olkoon  $K > 0$ . Olkoon kuvaus  $f_\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -Lipschitz-jatkuva jokaisella  $\alpha \in A$ . Osoita, että perhe  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  on yhtäjatkuva.

## 9. MAKSIMAALINEN MÄÄRITTELYVÄLI JA RATAEKVIVALENSSI

Luvussa 7 oletettiin, että maksimaalinen määrittelyväli on kaikilla alkuarvoilla koko  $\mathbb{R}$ . Tarkastelemamme Esimerkit 1.1 ja 4.13 osoittavat, että tämä ehto ei aina toteudu. Jos vektorikentän  $f$  määräämän differentiaaliyhtälön maksimaalinen määrittelyväli ei ole kaikilla alkuarvoilla koko  $\mathbb{R}$ , niin se määrää kuitenkin osittaisen virtauksen: yhtälö  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$  on voimassa, jos  $s, t, s+t$  ovat kaikki maksimaalisella määrittelyvälillä. Jos olemme kiinnostuneita ainoastaan ratkaisujen radoista, voimme “muuttaa differentiaaliyhtälön ajan” siten, että maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$  kaikilla alkuarvoilla.

**9.1. Maksimaalinen määrittelyväli.** Olkoon seuraavissa tuloksissa  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä ja olkoon  $I = I(x_0, f) = ]\sigma, \tau[$  alkuarvot tehtävän

$$(57) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli. Tässä  $\sigma < 0 < \tau$ ,  $\sigma \in [-\infty, \infty[$  ja  $\tau \in ]-\infty, \infty]$

**Propositio 9.1.** *Olkoon  $K \subset U$  kompakti. Jos  $\tau < \infty$ , niin on  $t \in ]0, \tau[$ , jolle  $x(t) \notin K$ . Jos  $\sigma > -\infty$ , niin on  $t \in ]\sigma, 0[$ , jolle  $x(t) \notin K$ .*

*Todistus.* Tarkastellaan vain ylhäältä rajoitetun maksimaalisen määrittelyvälin tapaus, alhaalta rajoitettu tilanne todistetaan samalla tavalla. Koska  $K$  on kompakti ja  $f$  on jatkuva, niin on  $M > 0$ , jolle

$$\max_{x \in K} \|f(x)\| \leq M.$$

Oletetaan, että  $x(t) \in K$  kaikilla  $t \in [0, \tau[$ . Tällöin kaikille  $0 < t_1 < t_2 < \tau$  pätee

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|,$$

joten ratkaisu on tasaisesti jatkuva välillä  $[0, \tau[$  ja sillä on raja-arvo

$$x_\tau = \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) \in K.$$

Nyt

$$\begin{aligned} x_\tau &= \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) = x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t \dot{x}(s) ds \\ &= x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t f(x(s)) ds = x(0) + \int_0^\tau f(x(s)) ds. \end{aligned}$$

Ratkaisu  $x$  voidaan jatkaa differentioituvaksi kuvaukseksi päättepisteeseen  $\tau$  saakka lausekkeella

$$x(t) = x_0 + \int_0^\tau f(x(s)) ds,$$

erityisesti  $\dot{x}(\tau) = f(x(\tau)) = f(x_\tau)$ . Alkuarvot tehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\tau) = x_\tau \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä  $]\tau - a, \tau + a[$ , joten ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla alkuarvot tehtävällä (57) olisi siis ratkaisu välillä  $]\sigma, \tau + a[$ , mikä taas on välin  $]\sigma, \tau[$  maksimaalisuuden kanssa ristiriidassa.  $\square$

**Seuraus 9.2.** *Olkoon  $K \subset U$  kompakti ja olkoon  $x(t)$  alkuarvot tehtävän (57) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli on  $]\sigma, \tau[$ . Jos  $x(t) \in K$  kaikilla  $t \geq 0$ , niin  $\tau = \infty$ .  $\square$*

**Seuraus 9.3.** Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  rajoitettu ja olkoon  $x(t)$  alkuarvottehtävän (57) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli  $]\sigma, \tau[$  on ylhäältä rajoitettu. Jos  $x(t)$  supenee, kun  $t \rightarrow \tau-$ , niin  $\lim x(t)_{t \rightarrow \tau-} \in \partial U$ .  $\square$

Rajoitetun ja rajoittamattoman maksimaalisen määrittelyvälin tulokset voidaan yhdistää seuraavalla muotoilulla:

**Seuraus 9.4.** Olkoon  $x$  alkuarvottehtävän (57) ratkaisu maksimaalisella määrittelyvälillä  $]\sigma, \tau[$ . Tällöin  $(t, x(t))$  poistuu kaikista joukon  $\bigcup_{b \in U} I(b, f) \times \{b\}$  kompakteista osajoukoista, kun  $t \nearrow \tau$  tai  $t \searrow \sigma$ .  $\square$

**Esimerkki 9.5.** Seurauksessa 9.2 esiintyvää raja-arvoa ei aina ole: Esimerkeissä 6.4 ja 7.10 tarkastellun differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix}$$

ratkaisun

$$\begin{cases} r(t) = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{e^t + 1/r_0^2 - 1}} \\ \theta = \theta_0 + t \end{cases}$$

määrittelyväli on  $]\log(1 - 1/r_0^2), \infty[$ , kun alkuarvon  $r_0 > 1$ . Differentiaaliyhtälö ei siis määrittele virtausta ja dynaamista systeemiä suljetun yksikkökiekon ulkopuolella. Näillä alkuarvoilla ratkaisu  $t \mapsto x(t)$  poistuu kaikista tason kompakteista joukoista, kun  $t$  lähestyy maksimaalisen määrittelyvälin alkua:

$$\lim_{t \rightarrow \log(1/r_0^2 - 1)} \|x(t)\| = \infty.$$

**9.2. Rataekvivalenssi.** Olkoot  $U \subset \mathbb{R}^n$  ja  $V \subset \mathbb{R}^n$  avoimia joukkoja ja olkoot  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttiä. Olkoot  $\phi^f$  ja  $\phi^g$  vektorikenttien  $f$  ja  $g$  määräämät osittaiset virtaukset. Vektorikentät  $f$  ja  $g$  ovat *rataekvivalentteja*, jos on homeomorfismi  $H: U \rightarrow V$  ja jos jokaisella  $b \in U$  on aidosti kasvava bijektio  $\tau_b: I(b, f) \rightarrow I(H(b), g)$  maksimaalisten määrittelyvälien välillä, jolle pätee

$$H \circ \phi^f(t, b) = \phi^g(\tau_b(t), H(b))$$

kaikille  $t \in I(b, f)$ . Sanotaan, että osittaiset virtaukset  $\phi^f$  ja  $\phi^g$  saadaan toisistaan *muuttamalla aika*. Joskus sanotaan myös, että vektorikentät  $f$  ja  $g$  (ja vastaavasti virtaukset  $\phi^f$  ja  $\phi^g$ ) ovat *topologisesti ekvivalentteja*.

Jos kuvaus  $\tau$  on identtinen kuvaus kaikille  $b \in U$ , niin osittaiset virtaukset  $\phi^f$  ja  $\phi^g$  ovat *topologisesti konjugaatteja* ja  $H$  on *konjugoiva homeomorfismi*. Grobmanin ja Hartmanin lause 6.2 käsittelee tällaista tilannetta.

Seurauksen 7.6 mukaan koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  määritelty  $C^1$ -vektorikenttä määrää dynaamisen systeemin. Tämän havainnon avulla todistetaan seuraava tulos:

**Propositio 9.6.** Jokainen koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  määritelty  $C^1$ -vektorikenttä on *rataekvivalentti* sellaisen  $C^1$ -vektorikentän kanssa, joka määrää dynaamisen systeemin.

*Todistus.* Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Olkoon  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  sileä funktio, jolle  $\|f(x)\| \leq M(f(x))$  kaikille  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin  $C^1$ -vektorikenttä  $g = f/M(f)$  on rajoitettu,  $\|g(x)\| \leq 1$ , joten se määrää dynaamisen systeemin Seurauksen 7.6 nojalla. Osoitetaan vielä, että kaikille  $b \in \mathbb{R}^n$  on jatkuva kasvava bijektio  $\tau: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle pätee

$$\phi^f(t, b) = \phi^g(\tau(t), b).$$



Tässä tapauksessa siis identtinen kuvaus käy rataekvivalenssin määritelmässä esiintyväksi homeomorfismiksi  $H$ .

Olkoon  $x: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  alkuarvot tehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = b$  ratkaisu ja määritellään ajanvaihto  $\tau: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla

$$\tau(t) = \int_0^t M(f(x(s))) ds.$$

Kuvaus  $\tau$  on selvästi jatkuva ja se on aidosti kasvava, koska  $M$  saa vain positiivisia arvoja. Lisäksi, jos  $I(b, f) = ]\alpha, \beta[$  ja  $\beta < \infty$ , niin Proposition 9.1 nojalla

$$\tau(t) \geq \int_0^t \|f(x(s))\| ds = \int_0^t \|\dot{x}(s)\| ds \geq \left\| \int_0^t \dot{x}(s) ds \right\| = \|x(t) - b\| \rightarrow \infty,$$

kun  $t \rightarrow \infty$ . Olkoon  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y = x \circ \tau^{-1}$ . Nyt  $y(0) = x(0) = b$  ja

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(\tau^{-1}(t)) \frac{d}{dt} \tau^{-1}(t) = \frac{f(x(\tau^{-1}(t)))}{M(f(x(\tau^{-1}(t))))} = \frac{f(y(t))}{M(f(y(t)))},$$

joten  $y$  on alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{f(y)}{M(f(y))} \\ y(0) = b \end{cases}$$

ratkaisu kuten pitikin. □

Jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on  $C^1$ -vektorikenttä, niin Proposition 9.6 mukaisia rataekvivalentteja vektorikenttiä ovat esimerkiksi

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}}, \quad F(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|^2}, \quad F(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}.$$

Näissä siis vektorikentän  $F$  suunta on jokaisessa pisteessä sama kuin alkuperäisen vektorikentän  $f$ .

Jos vektorikentän määrittelyjoukko on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  aito osajoukko, niin Proposition 9.6 menetelmä ei ole riittävä. Yleisempi tulos pätee, seuraavassa tuloksessa tosin menettämme osan sileydestä.

**Lause 9.7.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Tällöin  $f$  on rataekvivalentti sellaisen jatkuvan vektorikentän  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  kanssa, joka määrää dynaamisen systeemin.*

*Todistus.* Toistamalla Proposition 9.6 konstruktio, voidaan olettaa, että  $f$  on rajoitettu,  $\|f(x)\| \leq 1$  kaikilla  $x \in U$ . Olkoon  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$g(x) = f(x) \frac{d(x, \partial U)}{1 + d(x, \partial U)}$$

Vektorikentät  $f$  ja  $g$  ovat rataekvivalentteja kuten Lauseessa 9.6. Osoitetaan vielä, että jokaisen vektorikenttää  $g$  vastavan alkuarvot tehtävän maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ .

Koska jokaiselle  $x \in U$  pätee  $\|g(x)\| < \|f(x)\|$ , niin alkuarvot tehtävän  $\dot{x} = g(x)$ ,  $x(0) = x_0$  maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ , jos alkuarvot tehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ .

Oletetaan, että on alkuarvo  $b \in U$ , jolle alkuarvot tehtävän

$$(58) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = b \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on  $] \alpha, \beta[$  ja  $\beta < \infty$ . Tällöin alkuarvotehtävän (58) ratkaisukäyrä  $\gamma = \psi_{0,b}|_{[0,\beta]}$  on äärellisen mittainen, sen pituus on  $\ell(\gamma) = L < \infty$ , koska  $g$  on rajoitettu. Seurauksen 9.3 nojalla  $\gamma(t)$  suppenee johonkin joukon  $U$  reunapisteeseen  $p$ , kun  $t \nearrow \beta$ .

Tarkastellaan käyrän  $\gamma$  pituutta tarkemmin. Koska käyrä  $\gamma$  ei kulje vektorikentän  $g$  tasapainopisteiden kautta, niin kuvaus  $\ell: [0, \beta[ \rightarrow [0, L[$ ,

$$\ell(t) = \ell(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t \|g \circ \gamma(s)\| ds$$

on aidosti kasvava. Jokaiselle  $s \in [0, \beta[$  pätee

$$\begin{aligned} \|g(\gamma(s))\| &\leq \frac{d(\gamma(s), \partial U)}{1 + d(\gamma(s), \partial U)} \|f(x)\| \leq d(\gamma(s), \partial U) \leq d(\gamma(s), p) \\ &\leq \int_s^\beta \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \int_s^\beta \|g(\gamma(s))\| ds \leq \beta - s. \end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned} \ell^{-1}(s) &= \int_0^s \ell^{-1}(u) du = \int_0^s \|g(\gamma(\ell^{-1}(u)))\|^{-1} du \geq \int_0^s (\beta - \ell^{-1}(u))^{-1} du \\ &= \log \frac{\beta}{\beta - \ell^{-1}(s)} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kun  $s \nearrow \ell(\beta)$ , joten maksimaalinen positiivinen määrittelyväli on  $[0, \infty[$ . □

Huomaa, että vaikka Lauseen 9.7 antama alkuperäisen vektorikentän kanssa rataekvivalentti vektorikenttä ei ole  $C^1$ , niin sen määräämillä alkuarvotehtävillä on konstruktion perusteella yksikäsitteinen ratkaisu.

**Esimerkki 9.8.** Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Esimerkin 1.1(2) alkuarvotehtävän

$$(59) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = a \end{cases},$$

missä  $a > 0$ , ratkaisun  $x(t) = \frac{a}{1-at}$  maksimaalinen määrittelyväli on  $] -\infty, \frac{1}{a}[$ . Olkoon  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Proposition 9.6 antama ajan muuttava funktio  $\tau: ] -\infty, \frac{1}{a}[ \rightarrow \mathbb{R}$  on

$$\tau(t) = \int_0^t \left(1 + \left(\frac{a}{1-as}\right)^2\right) ds = t - \frac{a}{1-at}.$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = a \end{cases},$$

ratkaisun lauseke on huomattavasti monimutkaisempi kuin tehtävän (59) mutta sen maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$  ja Proposition 9.6 mukaan  $f$  ja  $g$  ovat rataekvivalentteja.

## Harjoitustehtäviä.

**9.1.** Ratkaise alkuarvotehtävä  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} \\ x(0) = (1, 1) \end{cases}$ . Määritä ratkaisun maksimaalinen määrittelyalue ja kuvaile ratkaisun käyttäytymistä.

**9.2.** Ratkaise alkuarvotehtävä  $\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{2x_1} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ x(0) = (1, 1) \end{cases}$ . Määritä ratkaisun maksimaalinen määrittelyalue ja kuvaile ratkaisun käyttäytymistä.

**9.3.** Olkoon  $g: [0, \tau[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  tasaisesti jatkuva kuvaus. Osoita, että sillä on vasen raja-arvo  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} g(t)$ .

**9.4.** Todista Seuraus 9.2.

**9.5.** Todista Seuraus 9.3.

**9.6.** Todista Seuraus 9.4

## 10. LINEAARISTEN YHTÄLÖIDEN VAKAUS

Palaamme hetkeksi lineaaristen differentiaaliyhtälöiden tarkasteluun ja täydennämme ensimmäisellä kurssilla luvussa 3 tehtyä tarkastelua.

Olkoon  $A$  reaalinen  $n \times n$ -matriisi. Reaalista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaava *juuriavaruus* on

$$\widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)^k v = 0 \text{ jollain } k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(A - \lambda I)^k,$$

ja kompleksiselle ominaisarvolle  $\lambda$  se on

$$\widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)^k v = 0 \text{ jollain } k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(A - \lambda I)^k \subset \mathbb{C}^n.$$

Kompleksista ominaisarvoparia  $\lambda, \bar{\lambda}$  vastaava *reaalinen juuriavaruus* on

$$\widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} = \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}(A) = (\widehat{E}_\lambda \oplus \widehat{E}_{\bar{\lambda}}) \cap \mathbb{R}^n = \text{Re } \widehat{E}_\lambda \oplus \text{Im } \widehat{E}_\lambda = \text{Re } \widehat{E}_{\bar{\lambda}} \oplus \text{Im } \widehat{E}_{\bar{\lambda}}.$$

Matriisin  $A$  vakaa aliavaruus eli *stabiili aliavaruus* on

$$E^s = E^s(A) = \bigoplus_{\lambda < 0} \widehat{E}_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \text{Re } \lambda < 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

sen epävakaa aliavaruus eli *epästabiili aliavaruus* on

$$E^u = E^u(A) = \bigoplus_{\lambda > 0} \widehat{E}_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \text{Re } \lambda > 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

ja sen *keskusaliavaruus* on

$$E^0 = E^0(A) = \widehat{E}_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \text{Re } \lambda = 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}.$$

Esimerkiksi Jordanin kanonisen muodon (Lause 3.1) avulla nähdään, että

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^0 \oplus E^u.$$

**Esimerkki 10.1.** Olkoot  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Matriisin

$$B_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat  $-1$  ja  $\alpha \pm i\beta$ . Matriisin  $B_{\alpha, \beta}$  vakaa, epävakaa ja keskusaliavaruus riippuvat reaalisen parametrin  $\alpha$  merkistä: Matriisin

$$B_{0, \beta} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat  $-1$  ja  $\pm i\beta$ , joten

$$E^s(B_{0, \beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\},$$

$$E^0(B_{0, \beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$

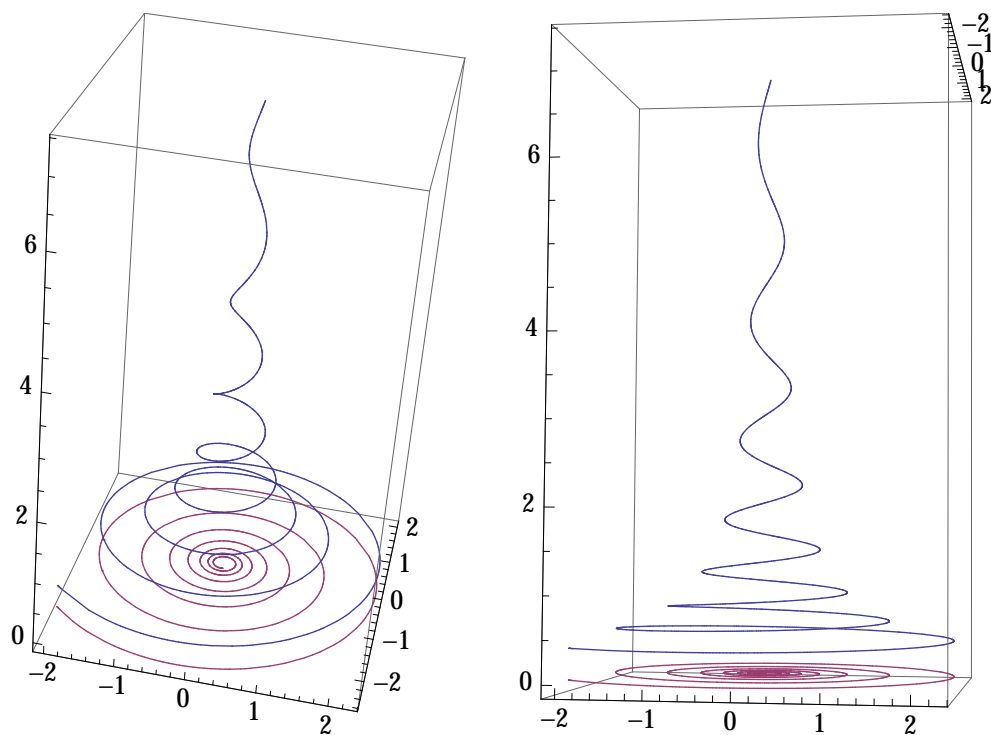
ja  $E^u(B_{0, \beta}) = \{0\}$ .

Jos  $\alpha \neq 0$ , niin  $E^0(B_{\alpha, \beta}) = \{0\}$ . Lisäksi, jos  $\alpha < 0$ , niin  $E^s(B_{\alpha, \beta}) = \mathbb{R}^3$  ja jos  $\alpha > 0$ , niin

$$E^s(B_{\alpha, \beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\},$$

ja

$$E^u(B_{\alpha, \beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$



KUVA 13. Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = B_{1,15}$  epästabiilissa aliavaruudessa olevasta ratkaisusta (punainen) ja toisesta ratkaisusta, joka ei ole stabiilissa eikä epästabiilissa aliavaruudessa.

Ensimmäinen havainto avaruuden jaosta vakaaseen ja epävakaaseen aliavaruuteen ja keskusaliavaruuteen on, että jako on  $A$ -invariantti, samoin kuin sen kuva matriisien eksponenttifunktiolla.

**Lemma 10.2.** (1)  $A(E^s(A)) \subset E^s(A)$ ,  $A(E^u(A)) \subset E^u(A)$  ja  $A(E^0(A)) \subset E^0(A)$ .  
 (2) Aliavaruudet  $E^s(A)$ ,  $E^0(A)$ ,  $E^u(A)$  ovat invariantteja avaruuden  $\mathbb{R}^n$  virtauksessa  $\phi_t(x) = \exp(At)x$ .  $\square$

*Todistus.* Olkoon  $x \in \widehat{E}_\lambda$ . Tällöin  $(A - \lambda I)^k x = 0$  jollekin  $k \geq 1$ . Koska matriisit  $A\lambda I$  ja  $A$  kommutoivat, saadaan  $(A - \lambda I)^k Ax = A(A - \lambda I)^k x = A0 = 0$ . Väite (1) seuraa tästä. Väite (2) seuraa käyttämällä matriisien eksponenttifunktion sarjaesitystä ja väitettä (1).  $\square$

Neliömatriisin  $B$  ominaisarvot muodostavat matriisin  $B$  spektrin  $\text{Sp}(B)$  ja sen spektraalisäde on

$$r(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(B)\}.$$

Sanomme, että jono  $x_k \in \mathbb{R}^n$  suppenee kohti pistettä  $x_\infty \in \mathbb{R}^n$  eksponentiaalista vauhtia, jos  $\|x_k - x_\infty\| \leq CK^k$  joillain  $C > 0$  ja  $0 < K < 1$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Jos jono  $x_k \in \mathbb{R}^n$  on rajoittamaton, niin  $\|x_k\| \rightarrow \infty$  eksponentiaalista vauhtia, jos  $\|x_k\| \geq CK^k$  joillain  $C > 0$  ja  $K > 1$ , kun  $k \rightarrow \infty$ .

**Propositio 10.3.** Jos  $r(B) < 1$ , niin  $B^k(x) \rightarrow 0$  kaikille  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  eksponentiaalista vauhtia, kun  $k \rightarrow \infty$ .

*Todistus.* Oletetaan, että  $B$  on reaalisessa Jordanin kanonisessa muodossa. Tehdään muuttujanvaihto lineaarikuvauksella, jonka matriisi on

$$\text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{m(\lambda)-1})$$

reaalista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaavaa Jordanin blokkia vastaavassa  $B$ -invariantissa aliavaruudessa, jonka dimensio on  $m(\lambda)$  ja jonka matriisi on

$$\text{diag}(I_2, \delta I_2, \delta^2 I_2, \dots, \delta^{m(\lambda)/2-1} I_2)$$

kompleksista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaavaa Jordanin blokkia vastaavassa  $B$ -invariantissa aliavaruudessa, jonka dimensio on  $m(\lambda)$ .

Uudessa kannassa Jordanin blokkeja vastaavat matriisit ovat muotoa

$$(\lambda) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \delta & & & \\ & \lambda & \delta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \delta \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

reaaliselle ominaisarvolle  $\lambda$  ja

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_\lambda & \delta I_2 & & & \\ & C_\lambda & \delta I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \delta I_2 \\ & & & & C_\lambda \end{pmatrix}$$

kompleksiselle ominaisarvolle  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

Muistetaan vielä, että kaikki avaruuden  $\mathbb{R}^n$  normit ovat ekvivalentteja ja ne määrittävät saman topologian, joten lauseen väitteen todistamisessa voidaan valita tilanteeseen sopiva normi. Olkoon siis  $\|\cdot\|$  maksiminormi edellä muodostetussa kannassa. Tällöin

$$\|B\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq r(A) + \delta$$

Valitsemalla  $\delta$  riittävän pieneksi saadaan siis  $\|B\| \leq K < 1$ , joten kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  pätee

$$\|B^k x\| \leq K^k \|x\| \rightarrow 0,$$

kun  $k \rightarrow \infty$ . □

Propositiosta 10.3 seuraa helposti vastaava tulos tilanteessa, jossa matriisin  $B$  kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan suurempia kuin 1.

**Propositio 10.4.** *Jos*

$$\min\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(B)\} > 1,$$

*niin  $B^k(x) \rightarrow \infty$  kaikille  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  eksponentiaalista vauhtia, kun  $k \rightarrow \infty$ .*

*Todistus.* Matriisi  $B$  on kääntyvä, koska nolla ei ole sen ominaisarvo. Lisäksi

$$\text{Sp}(B) = \{1/\lambda : \lambda \in \text{Sp}(B^{-1})\},$$

joten  $r(B^{-1}) < 1$  ja Proposition 10.3 mukaan  $B^{-1}$  on kutistava: jokaiselle  $y \in \mathbb{R}^n$  pätee  $\|B^{-k}y\| \leq K^k \|y\|$  jollain  $0 < K < 1$ . Väite seuraa, koska jokaiselle  $x \in \mathbb{R}^n$  on  $y \in \mathbb{R}^n$ , jolle  $x = B^{-1}y$ . □

Seuraava tulos kuvailee hyperbolisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen käyttäytymisen:

**Lause 10.5.** *Olkoon  $A$  reaalinen  $n \times n$ -matriisi, jonka keskusaliavaruus on triviaali. Tällöin*

*(1) Jos  $x \in E^s$ , niin  $\exp(At)x \rightarrow 0$  eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow \infty$  ja  $\|\exp(At)x\| \rightarrow \infty$  eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow -\infty$ .*

(2) Jos  $x \in E^u$ , niin  $\exp(At)x \rightarrow \infty$  eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow \infty$  ja  $\|\exp(At)x\| \rightarrow 0$  eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow -\infty$ .

(3) Jos  $x \notin E^u \cup E^s$ , niin  $\|\exp(At)x\| \rightarrow \infty$  eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

Tason differentiaaliyhtälöiden tapauksessa Lause 10.5 antaa karkean version luvussa 2 tehdystä luokittelusta.

Grobmanin ja Hartmanin lause kertoo, että hyperbolisen tasapainopisteen lähellä differentiaaliyhtälön virtaus on topologisesti konjugaatti differentiaaliyhtälön lineaarisoinnin virtauksen kanssa. Yhdistämällä tämä tieto Lauseen 10.5 kanssa saadaan hyvä kuva hyperbolisten yhtälöiden lokaalista käyttäytymisestä.

Todistetaan vielä lineaarialgebran tulos, jota käytetään epälineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopisteen tarkastelussa seuraavassa luvussa.

**Propositio 10.6.** *Olkoon  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ . Jos  $\text{Re Sp } A \subset ]m, M[$ , niin avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  on sisätulo  $(\cdot|\cdot)$ , jolle pätee*

$$m\|x\|^2 \leq (Ax|x) \leq M\|x\|^2$$

*kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Todistus.* Konjugoimalla voidaan olettaa, että  $A$  on samanlaisessa Jordanin kanonisesta muodosta saatavassa blokkidiagonaalimuodossa kuin Proposition 10.3 todistuksessa. Osoitetaan, että väite pätee jokaista blokkia vastaavassa aliavaruudessa. Väite seuraa tästä asettamalla nämä aliavaruudet keskenään ortogonaalisiksi. Riittää siis tarkastella tapaukset, joissa  $A$  on jokin Lauseessa 3.1 esiintyvistä blokeista.

Jos  $A = (\lambda)$ , niin kaikille  $x \in \mathbb{R}$  pätee standardisisätulolla  $(Ax|x) = \lambda\|x\|^2$ , mistä väite seuraa.

Jos  $A = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$ , niin matriisin  $A$  ominaisarvot ovat  $\alpha \pm i\beta$ . Nyt standardisisätulolle pätee  $(Ax|x) = \alpha\|x\|^2$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Jos  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja

$$\begin{pmatrix} \lambda & \delta & & & \\ & \lambda & \delta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \delta \\ & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

niin standardisisätulolle pätee

$$(Ax|x) = (\lambda x + (x_2, x_3, \dots, x_n, 0)|x) = \lambda\|x\|^2 + \epsilon((x_2, x_3, \dots, x_n, 0)|x).$$

Cauchyn epäyhtälön nojalla  $|((x_2, x_3, \dots, x_n, 0)|x)| \leq \|x\|^2$ , joten

$$(\lambda - \epsilon)\|x\|^2 \leq (Ax|x) \leq (\lambda + \epsilon)\|x\|^2.$$

Valitsemalla  $\epsilon > 0$  saadaan haluttu arvio. Kompleksisen ominaisarvon tapaus todistetaan samaan tapaan.  $\square$

---

Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  virtaus on

$$\phi_t(x) = \exp(At)x.$$

Lineaarikuvauksen  $\exp(A)$  ominaisarvot ovat luvut  $e^\lambda$ , missä  $\lambda$  käy läpi matriisin  $A$  ominaisarvot. Lineaarikuvausta kutsutaan yleensä *hyperboliseksi*, jos sillä ei ole yhtään ominaisarvoa, jonka moduli on 1. Tästä aiheutuu pieni terminologinen kiemura: Lineaarista differentiaaliyhtälöä  $\dot{x} = Ax$  sanotaan hyperboliseksi, jos matriisin  $A$  keskusaliavaruus on triviaali. Tällöin siis matriisi  $\exp(A)$  on hyperbolinen. Epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä sanotaan vastaavasti, että vektorikentän  $f$  tasapainopiste  $b$  on hyperbolinen, jos differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  linearisointi pisteessä  $b$  on hyperbolinen.

### **Harjoitustehtäviä.**

**10.1.** Todista Lause 10.5.



## 11. EPÄLINEAARISEN YHTÄLÖN TASAPAINOPISTEEN VAKAUS

Tässä luvussa tarkastelemme hyperbolisia tasapainopisteitä käyttämättä Grobmanin ja Hartmanin lausetta ja lisäksi selvitämme, millä keinoilla voidaan tarkastella sellaisten tasapainopisteiden vakautta, jotka eivät ole hyperbolisia.

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektorikenttä. Vektorikentän  $f$  tasapainopiste  $b$  on

- *stabiili* tai *vakaa*, jos jokaiselle avoimelle joukolle  $V \subset U$  on avoin  $b \in W \subset V$ , jolle  $\phi_t(W) \subset V$  kaikille  $t \geq 0$ .
- *asymptoottisesti stabiili* tai *asymptoottisesti vakaa*, jos  $b$  on vakaa ja on pisteen  $b$  avoin ympäristö  $W$ , jolle  $\phi_t(x) \rightarrow b$  kaikille  $x \in W$ , kun  $t \rightarrow \infty$ .

Jos  $b$  ei ole vakaa, se on (tietenkin) epävakaa. Jos  $b$  on asymptoottisesti vakaa tasapainopiste, niin sen maksimaalista avointa ympäristöä  $W$ , jossa pätee  $\phi(x) \rightarrow b$ , kun  $t \rightarrow \infty$  kaikille  $x \in W$ , sanotaan pisteen  $b$  *attraktioaltaaksi*.

Dynaamisten systeemien yhteydessä asymptoottisesti vakaata tasapainopistettä sanotaan *puoleensavetäväksi kiintopisteeksi*. Jos taas on kiintopisteen  $b$  avoin ympäristö  $V$  siten, että jokaiselle  $x \in V$  on  $t(x) \in \mathbb{R}$ , jolle  $\phi_t(x) \notin V$  kaikille  $t \geq t(x)$ , niin  $x$  on *hylkivä kiintopiste*.

Lauseesta 10.5 saadaan yllä määritellyllä terminologialla

**Seuraus 11.1.** *Origo on hyperbolisen lineaarisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  vakaa tasapainopiste, jos ja vain jos  $E^s(A) = \mathbb{R}^n$ .* □

**Lause 11.2.** *Olkoon  $b$   $C^1$ -vektorikentän  $f$  hyperbolinen tasapainopiste.*

- (1) *Jos lineaarikuvauksen  $Df(b)$  kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia, niin  $b$  on asymptoottisesti vakaa.*
- (2) *Jos lineaarikuvauksen  $Df(b)$  jonkin ominaisarvon reaaliosa on positiivinen, niin  $b$  on epävakaa.*

*Todistus.* (1) Harjoitustehtävä.

(2) Affinilla koordinaattimuunnoksella voimme olettaa, että  $b = 0$  ja että differentiaalilin  $Df(0)$  matriisille  $A$  pätee  $E^s(A) = \mathbb{R}^k$ ,  $E^u(A) = \mathbb{R}^{n-k}$  ja  $E^s(A) \perp E^u(A)$ .  
Olkoon

$$x = (x_s, x_u),$$

missä  $x_s \in E^s$ ,  $x_u \in E^u$ . Proposition 10.6 nojalla on  $K_s < 0$  ja  $K_u > 0$  siten, että  $(Ax_s|x_s) \leq K_s \|x_s\|^2$  kaikille  $x_s \in E^s$  ja  $(Ax_u|x_u) \geq K_u \|x_u\|^2$  kaikille  $x_u \in E^u$ .

Olkoon

$$f(x) = Ax + R(x),$$

missä  $R(x) = (R_s(x), R_u(x)) = o(x)$ , kun  $x \rightarrow 0$ . Valitaan  $0 < \epsilon < (K_u - K_s)/4$  ja  $r > 0$  siten, että  $\|R(x)\| \leq \epsilon \|x\|$ , kun  $\|x\| \leq r$ .  
Olkoon

$$C_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_u\| \geq \|x_s\|\} \cap \overline{B}(0, r).$$

Olkoon  $x = (x_s, x_u)$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu, jolle  $x(0) \in C_r$ . Tällöin, kun  $x(t) \in C_r$  pätee Taylorin kehittämän, Cauchyn epäyhtälön ja kolmioepäyhtälön, ja oletuksen  $\|x_u\| \geq \|x_s\|$  nojalla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|x_u(t)\|^2) &= 2(x_u(t)|Ax_u(t) + R_u(t)) \\ &\geq 2(K_u \|x_u(t)\|^2 - \|x_u(t)\| \epsilon \|x(t)\|) \\ &\geq 2(K_u - 2\epsilon) \|x_u(t)\|^2, \end{aligned}$$

joten  $\|x_u\|$  kasvaa eksponentiaalisesti, kun ratkaisu on katkaistussa kartiossa  $C_r$ . Samaan tapaan nähdään, että

$$\frac{d}{dt}(\|x_s(t)\|^2) \leq 2(K_s + 2\epsilon)\|x_u(t)\|^2,$$

kun  $x(t) \in K_r$ .

Tarkastellaan erotusta

$$g(t) = \|x_u(t)\|^2 - \|x_s(t)\|^2.$$

Selvästi  $g(t) = 0$ , jos  $x(t)$  on yhtälön  $\|x_u\| = \|x_s\|$  määräämällä kartiolla ja  $g(0) \geq 0$ . Edellä tehtyjen laskujen mukaan

$$\dot{g}(t) = 2(K_u - K_s - 4\epsilon)\|x_u(t)\| > 0$$

kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , joilla  $x(t) \in C_r$ , joten  $x(t)$  poistuu kartiosta pallon  $\overline{B}(0, r)$  reunan läpi. Erityisesti se poistuu pallosta  $\overline{B}(0, r)$  riippumatta siitä, kuinka läheltä tasapainopistettä alkuarvo valitaan. Siis tasapainopiste ei ole vakaa.  $\square$

Olemme jo Luvun 6 harjoituksissa havainneet, että tasapainopisteen vakaudesta ei voi päätellä mitään ilman lisätietoja, jos linearisaation joidenkin ominaisarvojen reaaliosa on nolla.

**Esimerkki 11.3.** Differentiaaliyhtälön

$$(60) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + \epsilon x_1 \|x\|^2 \\ x_1 + \epsilon x_2 \|x\|^2 \end{pmatrix}.$$

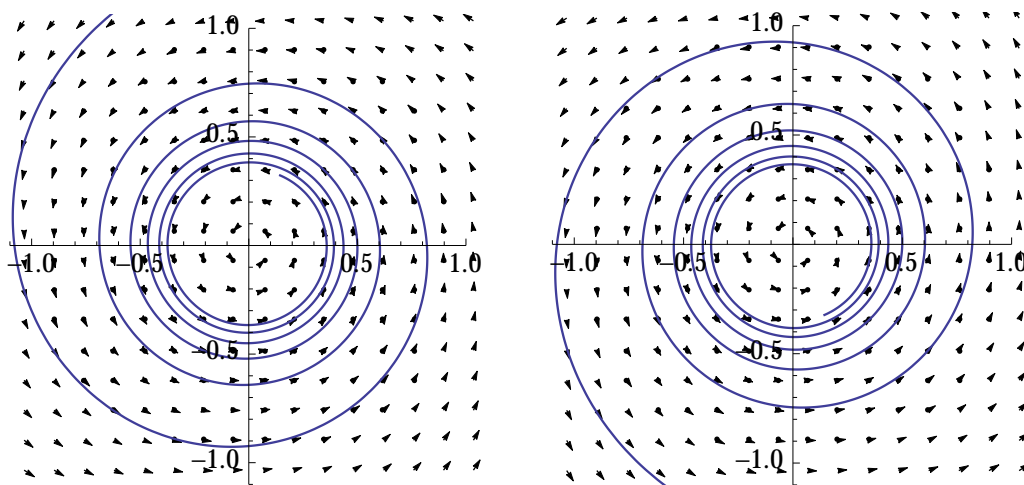
ainoa tasapainopiste on 0. Sen linearisaatio on kaikilla  $\epsilon \in \mathbb{R}$  sama yhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Linearisaation kerroinmatriisin ominaisarvot ovat  $\pm i$ , joten Lausetta 11.2 ei voi soveltaa. Differentiaaliyhtälö (60) on napakoordinaattimuodossa

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon r^3 \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

joten 0 on asymptoottisesti vakaa, kun  $\epsilon < 0$ , vakaa, kun  $\epsilon \leq 0$  ja epävakaa, kun  $\epsilon > 0$ .



KUVA 14. Piste  $(\frac{1}{2}, 0)$  radan osia, kun  $\epsilon = -0.1, 0.1$ .

Kun  $\epsilon < 0$ , niin koko  $\mathbb{R}^2$  on origon attraktioallas.

Jos tasapainopiste ei ole hyperbolinen, sen vakaus tai asymptoottinen vakaus voidaan joskus päätellä seuraavalla *Liapunovin menetelmällä*. Tässä menetelmässä differentiaaliyhtälön ratkaisua ei tarvitse tuntea mutta tarvitaan vektorikentän kanssa oikealla tavalla yhteensopiva reaaliarvoinen funktio.

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Differentioituvan funktion  $L: U \rightarrow \mathbb{R}$  *rataderivaatta* on

$$\dot{L}(x) = DL(x)f(x) = \left. \frac{\partial(L \circ \phi_t(x))}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Olkoon  $V \subset U$  vektorikentän  $f$  tasapainopisteen  $b$  avoin ympäristö. Differentioituva funktio  $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  on vektorikentän  $f$  *Liapunovin funktio* pisteessä  $b$ , jos

- (1)  $L(b) = 0$  ja  $L(x) > 0$  kaikilla  $x \in V - \{b\}$  ja
- (2)  $\dot{L}(x) \leq 0$  kaikilla  $x \in V - \{b\}$ .

Jos Liapunovin funktio  $L$  toteuttaa vahvemman ehdon

- (2')  $\dot{L}(x) < 0$  kaikilla  $x \in V - \{b\}$ ,

niin  $L$  on *aito Liapunovin funktio*.

**Lause 11.4** (Liapunovin lause). *Olkoon  $b$  vektorikentän  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tasapainopiste. Jos jossain pisteen  $b$  avoimessa ympäristössä  $V \subset U$  on (aito) Liapunovin funktio, niin  $b$  on (asymptoottisesti) vakaa.*

*Todistus.* Olkoon  $L$  Liapunovin funktio pisteessä  $b$ . Olkoon  $\delta > 0$  siten, että  $\bar{B}(b, \delta) \subset V$  ja olkoon

$$\alpha = \min_{x \in \partial B(b, \delta)} L(x) > 0.$$

Olkoon

$$W = \{x \in B(b, \delta) : L(x) < \alpha\}.$$

Nyt  $W$  on tasapainopisteen  $b$  avoin ympäristö ja koska  $\dot{L} \leq 0$ , niin joukosta  $W$  lähtevät ratkaisut pysyvät siinä. Siispä  $b$  on vakaa.

Oletetaan, että  $\dot{L} < 0$ . Olkoon  $x$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu, jolle  $x(0) \in W$ . Erityisesti pisteen  $x$  positiivinen rata on rajoitettu, joten samaan tapaan kuin Harjoitustehtävässä 7.1 saadaan  $\omega_f(x) \neq \emptyset$ .

Olkoon  $z \in \omega_f(x) \subset \bar{B}(0, \delta)$ . Koska kuvaus  $t \mapsto L(x(t))$  on vähenevä, niin  $L(z) \leq L(x(t))$  kaikille  $t \geq 0$ . Jos  $z \neq b$ , niin  $\dot{L}(z) < 0$ , joten  $L(\phi_s(z)) < L(z)$  kaikille  $s > 0$ . Koska  $\phi$  on jatkuva, niin kiinnitetylle  $s > 0$  on  $r > 0$  siten, että kaikille  $x \in B(z, r)$  pätee  $L(\phi_s(x)) < L(z)$ . Mutta tästä saadaan ristiriita tarkastelemalla pistettä  $x(t) \in B(z, r)$ .  $\square$

**Esimerkki 11.5.** Funktio  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ,

$$V(r, h) = \frac{h^a}{e^{bh}} \frac{r^c}{e^{dr}}.$$

on invariantti Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälön

$$(61) \quad \begin{cases} \dot{r} = ar - bhr, \\ \dot{h} = -ch + dhr, \end{cases}$$

virtauksessa. Sen avulla muodostettu funktio

$$L(r, h) = -\log V(r, h) + \log V(b)$$

on differentiaaliyhtälön (61) Liapunovin funktio tasapainopisteessä

$$b = (r, h) = (c/d, a/b).$$

Funktion  $L$  tasa-arvojoukot  $L^{-1}(\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , ovat topologisia ympyröitä. Koska  $\dot{L} = 0$ , tasa-arvokäyrät eivät sisällä kriittisiä pisteitä ja tarkastellaan tason systeemiä, nämä käyrät ovat suljettuja ratoja.

**Esimerkki 11.6.** Olkoon  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Funktio  $L(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$  on lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi i z_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi \alpha i z_2 \end{cases}$$

Liapunovin funktio ja  $\dot{L} \equiv 0$ . Kuten edelläkin Liapunovin funktion tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja. Kuitenkaan emme voi päätellä, että radat ovat suljettuja, itse asiassa esimerkissä 7.11 osoitettiin, että radat eivät usein ole suljettuja.

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  sileä funktio. Differentiaaliyhtälö

$$(62) \quad \dot{x} = -\nabla V(x)$$

on funktiota  $V$  vastaava *gradienttisysteemi*.

**Propositio 11.7.** *Olkoon  $V$  sileä funktio. Tällöin*

- (1) *vektorikenttä  $-\nabla V$  on kohtisuorassa funktion  $V$  tasa-arvojoukkoa vastaan jokaisessa vektorikentän  $-\nabla V$  säännöllisessä pisteessä. Tämän pisteen ympäristössä funktion  $V$  tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja.*
- (2) *jos  $b$  on gradienttisysteemin (62) tasapainopiste, niin sen linearisoinnin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia.*
- (3) *jos  $b$  on funktion  $V$  eristetty kriittinen piste, joka on aito lokaali minimipiste, niin funktio  $x \mapsto V(x) - V(b)$  on on vastaavan gradienttisysteemin (62) aito Liapunovin funktio pisteessä  $b$  ja  $b$  on systeemin asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.*
- (4) *kaikki gradienttisysteemin (62)  $\omega$ -rajapisteet ovat systeemin tasapainopisteitä.*

*Todistus.* Kohdat (1) ja (2) todistettiin Harjoitustehtävissä 6.5 ja 6.6. Kohta (4) tehdään harjoituksissa.

Kohdan (3) todistusta varten huomaamme, että funktio  $x \mapsto V(x) - V(b)$  on selvästi positiivinen jossain pisteen  $b$  punkteeratussa ympäristössä. Lisäksi

$$\dot{V}(x) = DV(x)(-\nabla V(x)) = -\|\nabla V(x)\|^2 < 0,$$

koska oletimme, että  $b$  on eristetty kriittinen piste. Väite seuraa Liapunovin lauseesta 11.4.  $\square$

**Esimerkki 11.8.** Funktio  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

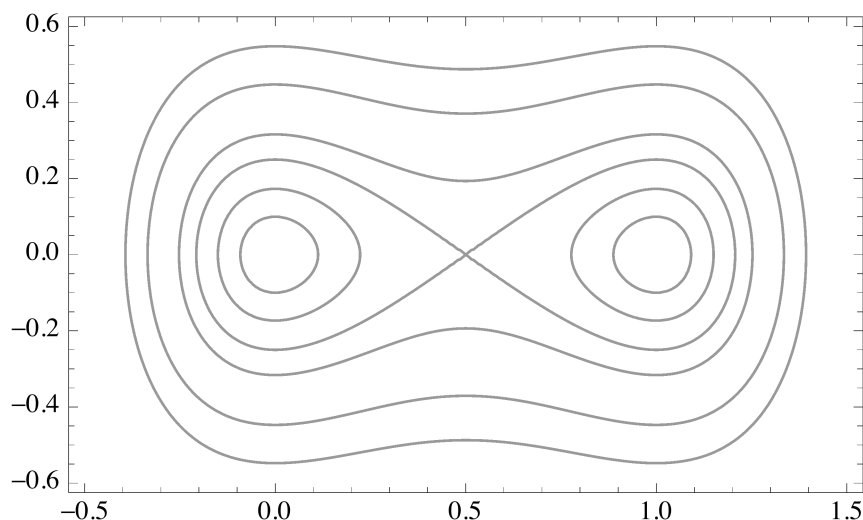
määrittää gradienttisysteemin

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4x_1(x_1 - \frac{1}{2})(x_1 - 1) \\ -2x_2 \end{pmatrix},$$

jota tarkasteltiin harjoituksissa 6 ensimmäisellä kurssilla. Vektorikenttä  $\nabla V$  on kohtisuorassa funktion  $V$  tasa-arvokäyriä vastaan. Koska  $\nabla V(x) = 0$  ainoastaan, jos  $x_2 = 0$  ja  $x_1 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ , niin tasa-arvokäyrät ovat sileitä kaikkialla paitsi tasapainopisteessä  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

Kaikki tasapainopisteet ovat hyperbolisia ja kaikki radat suppenevat kohti jotain tasapainopistettä: Jos  $x_1 < \frac{1}{2}$ , niin  $\phi_t(x)$  suppenee kohti asymptoottisesti vakaata tasapainopistettä 0 ja jos  $x_1 > \frac{1}{2}$ , niin  $\phi_t(x)$  suppenee kohti asymptoottisesti vakaata

tasapainopistettä  $(1, 0)$ , kun  $t \rightarrow \infty$ . Suoran  $x_1 = \frac{1}{2}$  pisteet taas suppenevat kohti epästabliilia tasapainopistettä  $(\frac{1}{2}, 0)$ .



KUVA 15. Funktion  $V$  tasa-arvokäyriä

**Lause 11.9** (Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaate). *Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä ja olkoon  $b \in U$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopiste. Olkoon  $L: U \rightarrow \mathbb{R}$  vektorikentän  $f$  Liapunovin funktio pisteessä  $b$ . Olkoon  $P \subset U$  pisteen  $b$  positiivisesti invariantti kompakti ympäristö. Oletetaan, että  $L$  ei ole vakio millään maksimaalisella ratkaisukäyrällä, joka sisältyy kokonaan joukkoon  $P - \{b\}$ . Tällöin  $b$  on asympotoottisesti vakaa tasapainopiste ja joukko  $P$  sisältyy pisteen  $b$  attraktio-  
altaaseen.*

*Todistus.* Olkoon  $x_0 \in P$  siten, että  $\omega(x_0) \neq \{b\}$ . Koska  $P$  on kompakti, niin  $\omega(x_0)$  ei ole tyhjä. Harjoituksissa osoitettiin, että  $\omega(x_0)$  sisältyy kokonaan joukkoon  $P$  ja että se on invariantti differentiaaliyhtälön virtauksessa.

Olkoon  $z \in \omega(x_0)$ . Tällöin on  $t_k \nearrow \infty$  siten, että  $\phi_{t_k}(x_0) \rightarrow z$ , kun  $k \rightarrow \infty$ . Nyt  $L(\phi_{t_k}(x_0)) \geq L(z)$  kaikilla  $k$  ja  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(\phi_{t_k}(x_0)) = L(z)$ . Toisaalta kaikille  $s \in \mathbb{R}$  pätee  $\lim L(\phi_{t_k+s}(x_0)) = L(z)$ , koska  $L$  on vähenevä rataa pitkin, ja  $\phi_{t_k+s}(x_0) \rightarrow \phi_s(z)$ , kun  $k \rightarrow \infty$ , joten  $L(\phi_s(z)) = L(z)$  kaikilla  $s \in \mathbb{R}$ . Koska pisteen  $z$  rata sisältyy joukkoon  $P$ , onkin löydetty kokonaan joukkoon  $P - \{b\}$  sisältyvä rata, jolla  $L$  on vakio, mutta tämä on vastoin oletusta.  $\square$

**Esimerkki 11.10** (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa Esimerkissä 4.1 ja Harjoitustehtävässä 6.4 tarkasteltu differentiaaliyhtälö

$$(63) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases} .$$

Differentiaaliyhtälöllä (63) on numeroituva joukko tasapainopisteitä: Tasapainopisteet  $(\pi + k2\pi, 0)$  vastaavat heilurin yläasemaa. Näissä pisteissä yhtälön lineaarisointi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

on hyperbolinen ja ominisarvojen tulo on negatiivinen. Pisteet ovat siis Lauseen 11.2 nojalla epävakaita. Pisteet  $(k2\pi, 0)$  taas vastaavat heilurin ala-asemaa. Näissä

pisteissä yhtälön linearisointi on

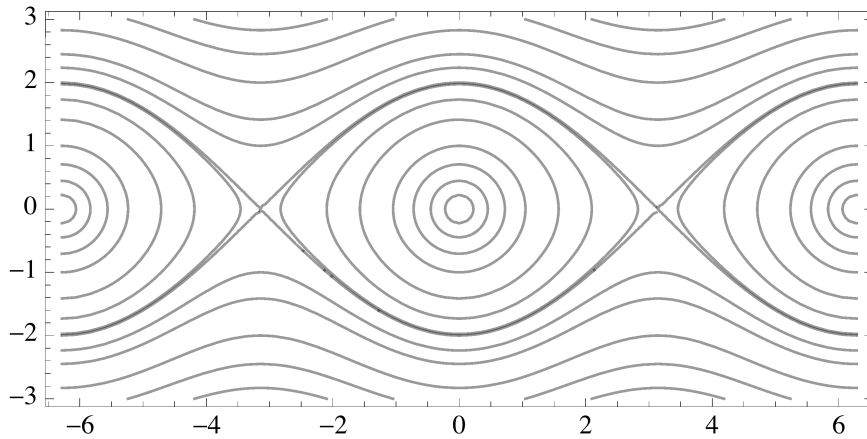
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}.$$

Jos kitka on positiivinen, niin ala-asema on vakaa tasapainopiste, jos taas  $b = 0$ , niin ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia ja linearisointi on keskus.

Epälineaarisen heilurin Liapunovin funktiona tasapainopisteessä  $(0, 0)$  on luonteva käyttää systeemin *energiaa*

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos \theta,$$

joka koostuu liike-energiasta  $\frac{1}{2}v^2$  ja potentiaalienergiasta  $1 - \cos \theta$ . Nyt  $E(0, 0) = 0$



KUVA 16. Kitkattoman epälineaarisen heilurin yhtälön ratkaisuja.

ja  $E(\theta, v) > 0$ , kun  $(\theta, v) \neq 0$  ja  $|\theta| < \pi$ .

$$\dot{E} = DE(\theta, v) \begin{pmatrix} v \\ -bv - \sin \theta \end{pmatrix} = -bv^2 \leq 0,$$

joten Liapunovin funktion ehdot toteutuvat kaikilla  $b > 0$ . Siis 0 on vakaa kaikilla  $b \geq 0$  ja asymptoottisesti vakaa kaikilla  $b > 0$ .

Kun  $b = 0$  nähdään kuten Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälön tapauksessa, että energiefunktion tasapainokäyrät ovat sileitä käyriä, kun  $|\theta| < \pi$  ja että nämä tasa-arvokäyrät ovat systeemin suljettuja ratoja, kun  $E(\theta, v) < 2 = E(\pi, 0)$ .

Kun  $b > 0$ , linearisaation ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia, joten lokaali käyttäytyminen tiedetään puoleensavetäväksi. Energian tasa-arvojoukko

$$\begin{aligned} & \{(\theta, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : E(\theta, v) = E(\pi, 0) = 2\} \\ & = \{(\theta, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : v^2 = 2(1 - \cos \theta)\} \end{aligned}$$

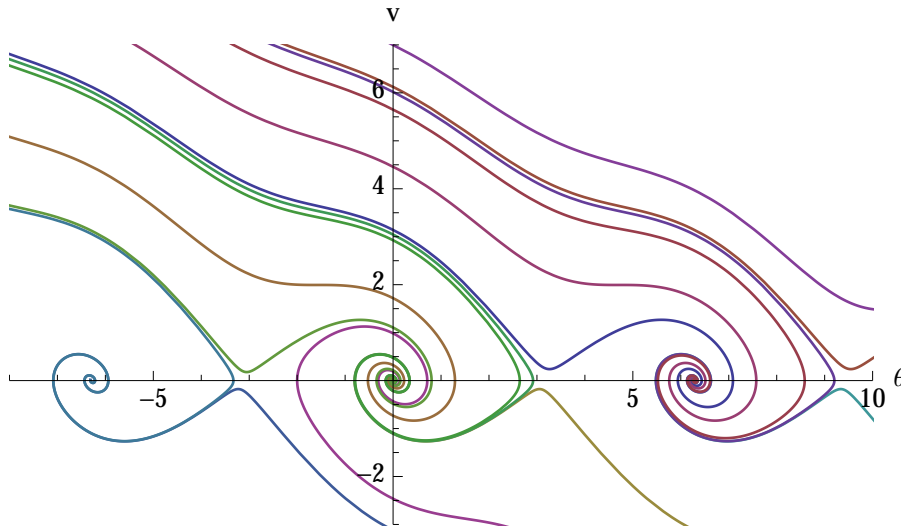
topologinen ympyrä, joka koostuu kahdesta epävakaita tasapainopisteitä  $(\pm\pi, 0)$  yhdistävästä radasta. Radat, joiden alkuarvo on tämän ympyrän rajaamassa joukossa

$$P = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : |\theta| < \pi, E(\theta, \pi) < 2\}$$

pysyvät Jordanin käyrälauseen nojalla tässä joukossa, joka on siis positiivisesti invariantti. Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaatteen nojalla joukko  $P$  sisältyy origon attraktioaltaaseen. Nimittäin, jos  $E$  on vakio jollain radalla, niin

$$\dot{E}(\theta, v) = -bv^2 = 0.$$

Siispä  $v = 0$ , joten  $\dot{\theta} = 0$ . Lisäksi  $\sin \theta = \dot{v} = 0$ , joten ehdosta  $|\theta| < \pi$  saadaan  $\theta = 0$ . Joukossa  $P - \{0\}$  ei siis ole ratoja, joilla  $E$  on vakio. "Fysikaalinen päättely" tai Mathematica kertovat, että attraktioallas on huomattavasti suurempi.



KUVA 17. Kitkallisen epälineaarisen heilurin yhtälön ratkaisuja, kun  $b = \frac{1}{2}$ .

Kitkaton matemaattinen heiluri on esimerkki Hamiltonin systeemistä: Olkoon  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  avoin joukko. Kirjoitetaan pisteen  $z \in U$  koordinaatit muodossa  $z = (x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $H: U \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2$ -funktio ja määritellään sen osittaisderivaatoista muodostetut vektoriarvoiset kuvaukset  $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

on *Hamiltonin systeemi*, jolla on  $n$  vapausastetta. Funktio  $H$  on systeemin *kokonaisenergia* tai *Hamiltonin funktio*.

**Propositio 11.11.** *Hamiltonin systeemin ratkaisut sisältyvät kokonaisenergiafunktion tasa-arvojoukkoihin*

*Todistus.* Harjoitustehtävä 11.5. □

Jatkuvasti differentioituvan vektorikentän  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tasapainopiste  $b$  on *surkastumaton* (tai *degeneroitumaton*), jos  $Df(p)$  on kääntyvä.

**Lemma 11.12.** *Yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin surkastumattoman tasapainopisteen linearisointi on keskus tai satula.*

*Todistus.* Harjoitustehtävä 11.6. □

Tämän avulla osoitetaan

**Propositio 11.13.** *Yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin degeneroitumaton tasapainopiste  $b$  on*

- *vakaa mutta ei asympotoottisesti vakaa, jos sen linearisointi on keskus ja*
- *epävakaa, jos sen linearisointi on satula.*

*Todistus.* Harjoitustehtävä 11.7. □

**Esimerkki 11.14.** Olkoon  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ -funktio jollain reaalilukuvälillä  $I$ . Funktion  $f$  määräämä *Newtonin systeemi* on toisen asteen differentiaaliyhtälö  $\ddot{x} = f(x)$  tai vastaava differentiaaliyhtälöpari

$$(64) \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases}$$

Newtonin systeemin *liike-energia* on  $T(v) = \frac{1}{2}v^2$  ja sen *potentiaalienergia* pisteen  $x_0 \in I$  suhteen on

$$V(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds .$$

Systeemin *kokonaisenergia* on  $E = T + V$ . Nyt

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial x} = \partial V'(x) = -f(x)$$

ja

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial v} = T'(v) = v,$$

joten Newtonin systeemi (64) on yhden vapausasteen Hamiltonin systeemi. Esimerkeissä 4.1 ja 11.10 tarkasteltu kitkaton matemaattinen heiluri on Newtonin systeemi, siis yhden vapausasteen Hamiltonin systeemi.

**Esimerkki 11.15.** Esimerkissä 11.8 käsitelty funktio  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$V(x) = x^2(x - 1)^2 + y^2,$$

määrittää yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -4x(x - \frac{1}{2})(x - 1) , \end{cases}$$

jonka radat ovat kuvassa 15 esitettyjä funktion  $V$  tasa-arvokäyrien komponentteja. Systeemillä on kaksi poikkeuksellista rataa, jotka muodostavat tasapainopisteen  $(\frac{1}{2}, 0)$  kanssa tasa-arvokäyrän  $V(x, y) = \frac{1}{16}$ . Tämä tasa-arvokäyrä on kahdeksikon muotoinen. Oikeanpuoleinen silmukka on ratkaisun  $t \mapsto \phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0)$  rata, jolle  $\phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$  oikealta alaviistosta, kun  $t \rightarrow \infty$  ja  $\phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$  oikealta yläviistosta, kun  $t \rightarrow -\infty$ . Vasemmanpuoleinen silmukka on pisteen  $(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0)$  rata, joka käyttäytyy vastaavasti. Tasapainopiste  $(\frac{1}{2}, 0)$  on *homokliininen tasapainopiste*:  $\phi(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$ , kun  $t \rightarrow \pm\infty$ .



## Harjoitustehtäviä.

**11.1.** Olkoon  $b$   $C^1$ -vektorikentän  $f$  tasapainopiste. Oletetaan, että lineaarikuvauksen  $Df(b)$  ominaisarvojen reaalisosat ovat negatiivisia. Osoita, että  $b$  on asymptootisesti vakaa tasapainopiste.

**11.2.** Osoita, että funktio  $L(x) = \|x\|^2$  on differentiaaliyhtälön

$$(65) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ -x_2(x_1^2 + x_3^2 + 1) \\ -\sin x_3 \end{pmatrix}$$

aito Liapunovin funktio origossa.

**11.3.** Olkoon  $\phi$  differentiaaliyhtälön (65) lokaali virtaus. Arvioi niiden pisteiden  $x \in \mathbb{R}^3$  joukkoa, joille  $\phi_t(x) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ .

**11.4.** Osoita, että kaikki gradienttisysteemin  $\omega$ -rajapisteet ovat systeemin tasapainopisteitä.

**11.5.** Osoita, että Hamiltonin systeemin kokonaisenergian rataderivaatta on 0. Osoita, että Hamiltonin systeemin ratkaisukäyrät sisältyvät kokonaisenergian tasa-arvojoukkoihin.

**11.6.** Todista Lemma 11.12

**11.7.** Todista Propositio 11.13.

**11.8.** Ratkaise kokonaisenergiaa

$$H(x, y) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2}$$

vastaava kahden vapausasteen Hamiltonin systeemi.

**11.9.** Olkoon  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V(t) = (t^2 - 1)^2$ . Tarkastele tason differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) - \mu x_2 \end{pmatrix}$$

tasapainopisteitä parametrin  $\mu \geq 0$  eri arvoilla.

## 12. VAKAA JA EPÄVAKAA MONISTO

Luvussa 11 osoitimme muun muassa, että hyperbolinen tasapainopiste, jonka linearisoinnin jonkin ominaisarvon reaaliosa on positiivinen, on epävakaa. Jos tarkasteltava hyperbolinen tasapainopiste on tyypiltään satula, tätä kuvaa voi tarkentaa huomattavasti.

**Lause 12.1** (Vakaan ja epävakaan moniston lause). *Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektori-kenttä. Olkoon  $\phi$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  osittainen virtaus ja olkoon  $b$  sen hyperbolinen tasapainopiste. Oletetaan, että differentiaalilla  $Df(b)$  on  $0 < k < n$  ominaisarvoa (algebraalisen kertaluvun mukaan laskettuna), joilla on negatiivinen reaaliosa ja  $n-k$  ominaisarvoa, joilla on positiivinen reaaliosa. Tällöin on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  positiivisesti  $\phi$ -invariantti  $k$ -ulotteinen differentioituva alimonisto  $W_{\text{loc}}^s(b)$ , jolla on seuraavat ominaisuudet:*

- Jos  $x_0 \in W_{\text{loc}}^s(b)$ , niin  $\phi_t(x_0) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ ,
- On  $\delta > 0$  siten, että jos  $x_0 \in B(b, \delta) - W_{\text{loc}}^s(p)$ , niin  $\phi_t(x) \notin B(b, \delta)$  jollain  $t > 0$ .
- $W_{\text{loc}}^s(b)$  sivuaa differentiaalilin  $Df(b)$  vakaata aliavaruutta origossa.

*Lisäksi on negatiivisesti  $\phi$ -invariantti  $(n-k)$ -ulotteinen differentioituva alimonisto  $W_{\text{loc}}^u(b)$ , jolla on ominaisuudet*

- Jos  $x_0 \in W_{\text{loc}}^u(b)$ , niin  $\phi_t(x_0) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow -\infty$ ,
- On  $\delta > 0$  siten, että jos  $x_0 \in B(p, \delta) - W_{\text{loc}}^u(b)$ , niin  $\phi_t(x) \notin B(b, \delta)$  jollain  $t < 0$ .
- $W_{\text{loc}}^u(b)$  sivuaa differentiaalilin  $Df(b)$  epävakaata aliavaruutta origossa.

Lauseen 12.1 antama monisto  $W_{\text{loc}}^s(b)$  on pisteen  $b$  lokaali vakaa monisto ja  $W_{\text{loc}}^u(b)$  on pisteen  $b$  lokaali epävakaa monisto.

*Todistus.* Katso esimerkiksi [HSD] Luku 8.3 ja [Per] Luku 2.7. Tämä todistus on yksi kurssin harjoitustyön aiheista. □

Vakaan ja epävakaan moniston lause antaa hyperbolisen tasapainopisteen ympäristön jaon pisteisiin, jotka virtaavat kohti tasapainopistettä, kun aika lähestyy positiivista tai negatiivista äärettömyyttä ja jäljelle jäävään avoimeen joukkoon. Seuraava määritelmä antaa globaalin version näistä monistoista:

Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektori-kenttä, jota vastaa virtaus  $\phi$  ja olkoon  $b$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopiste. Tasapainopisteen  $b$  *globaali vakaa monisto* on

$$W^s(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow \infty\}$$

ja sen *globaali epävakaa monisto* on

$$W^u(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow -\infty\}$$

**Esimerkki 12.2.** (1) Esimerkissä 4.1 käsitellyn matemaattisen heilurin hyperbolisten tasapainopisteiden  $((1+2k)\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , (globaalit) vakaat ja epävakaat monistot saadaan valitsemalla vuorotellen alempi ja ylempi haara kokonaisenergian tasa-arvojoukossa

$$\{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : E(\theta, v) = E(\pi, 0) = 2\} = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 2(1 - \cos \theta)\},$$

kuvan 17 mukaisesti.

(2) Esimerkissä 11.15  $W_{\text{loc}}^s(\frac{1}{2}) = W_{\text{loc}}^u(\frac{1}{2}) = V^{-1}(\frac{1}{16})$ .

**Esimerkki 12.3.** Propositio 11.13 ei sovellu funktion  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$$

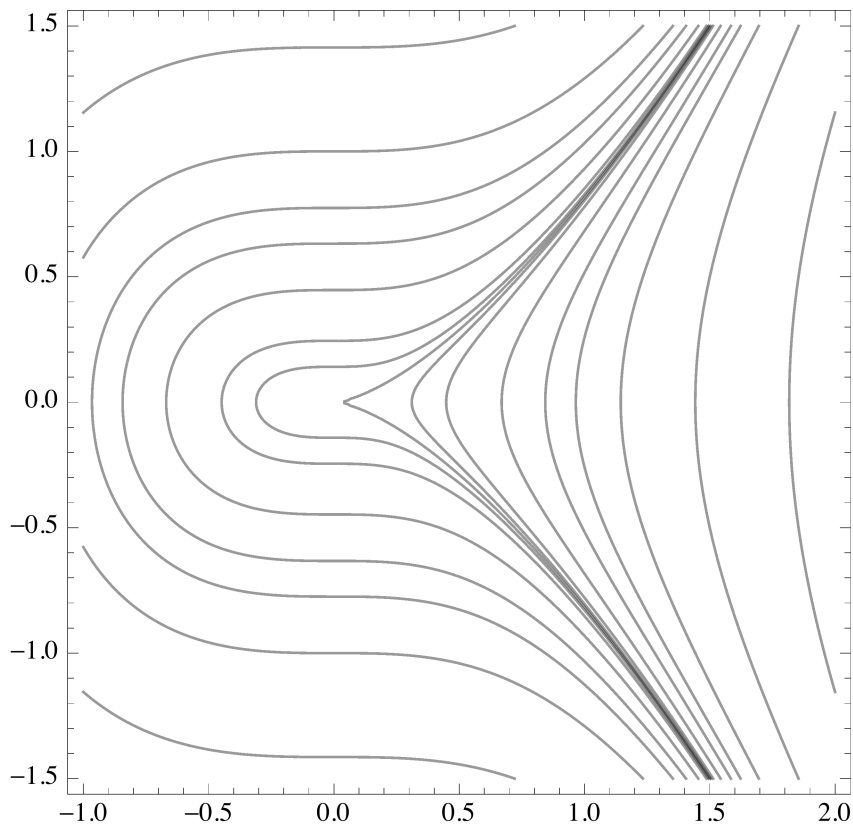
määräämään Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

tasapainopisteen 0 tarkasteluun koska 0 on tarkasteltavan vektorikentän degeneroitunut tasapainopiste. Samasta syystä emme voi myöskään soveltaa Vakaan ja epävakaa moniston lausetta. Voimme kuitenkin määrittää origon vakaan ja epävakaa moniston:  $H(0, 0) = 0$ , joten epävakaa ja vakaa monisto sisältyvät tasa-arvojoukkoon

$$H^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = \frac{2}{3}x^3\}.$$

Tämä käyrä on muodoltaan *kärki* (cusp). Koska  $\dot{y} = x^2 > 0$  kaikkialla, nähdään, että käyrän alempi haara on origon vakaa monisto ja ylempi haara on origon epävakaa monisto.



KUVA 18. Hamiltonin funktiota  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$  vastaavan Hamiltonin systeemin ratoja lähellä tasapainopistettä 0.

Lokaali ja globaali vakaa ja epävakaa monisto voidaan määrittellä yleisemminkin kuin kiintopisteelle: Jos  $x_0 \in U$  on piste, jonka rata on jaksollinen:  $\phi_T(x_0) = x_0$  jollain minimaalisella  $T > 0$ , olkoon

$$\Gamma = \phi(\mathbb{R}, x_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(x_0) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \phi_t(x_0).$$

Olkoon

$$d(z, K) = \min_{x \in K} \|z - x\|$$

pisteen  $z$  ja kompaktin joukon  $K$  etäisyys. Määritellään radan  $\Gamma$  *globaali vakaa monisto*

$$W^s(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0, \text{ kun } x \rightarrow \infty\}$$

ja sen *globaali epävakaa monisto*

$$W^u(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0, \text{ kun } x \rightarrow -\infty\}$$

**Esimerkki 12.4.** Olkoon  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Koska  $\|f\|$  kasvaa turhan nopeasti, kun  $x_1^2 + x_2^2$  kasvaa,  $f$  määrää vain osittaisen virtauksen. Sen sijaan kenttä

$$F(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|^2}$$

määrää virtauksen Proposition 9.6 nojalla. Kenttää  $f$  on toisaalta helpompi tarkastella.

Tason  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$  yksikköympyrä

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

on invariantti differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = F(x)$  määräämässä osittaisessa virtauksessa. Itse asiassa  $\Gamma$  on minkä tahansa pisteen  $p \in \Gamma$  jaksollinen rata. Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  sylinterikoordinaattimuodosta

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

nähdään, että

$$W^s(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0, x \neq 0\}$$

ja

$$W^u(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

Vaihtamalla vektorikentän viimeisen komponentin suunnan vastakkaiseksi saamme differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

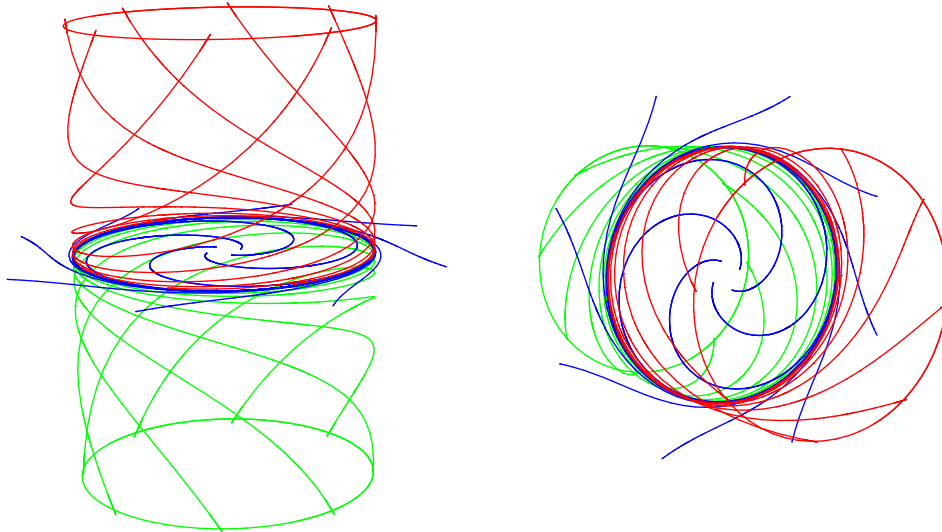
jossa ympyrän  $\Gamma$  vakaa monisto on  $\mathbb{R}^3 - \{0\} \times \mathbb{R}$ .

**Esimerkki 12.5.** Olkoon  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Vektorikenttä  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x) = \begin{cases} Ax + x\|x\|^2 \sin(\|x\|^{-1}), & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

on jatkuvasti differentioituva ja differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = f(x)$  on napakoordinaateissa muotoa

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \sin(1/r), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$



KUVA 19. Kaksi näkökulmaa  $x_1x_2$ -tason ympyrän vakaasta ja epävakasta monistosta. Siniset radat ovat vakaassa monistossa, punaiset ja vihreät epävakaassa.

Tästä muodosta näkee helposti, että ympyrät  $t \mapsto \frac{1}{k\pi}(\cos t, \sin t)$  ovat jaksollisia ratkaisuja kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ . Lisäksi  $\dot{r} > 0$ , kun  $r \in ]\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}[$  ja  $\dot{r} < 0$ , kun  $r \in ]\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{(2k-1)\pi}[$ , joten ympyrät  $r = \frac{1}{2k\pi}$  ovat puoleensavetäviä rajasyklejä ja ympyrät  $r = \frac{1}{(2k+1)\pi}$  ovat hylkiviä rajasyklejä.

### Harjoitustehtäviä.

**12.1.** Ratkaise vektorikentän  $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$  määräämä differentiaaliyhtälö. Määritä tasapainopisteen 0 vakaa ja epävakaa monisto.

**12.2.** Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + x^2 \end{aligned}$$

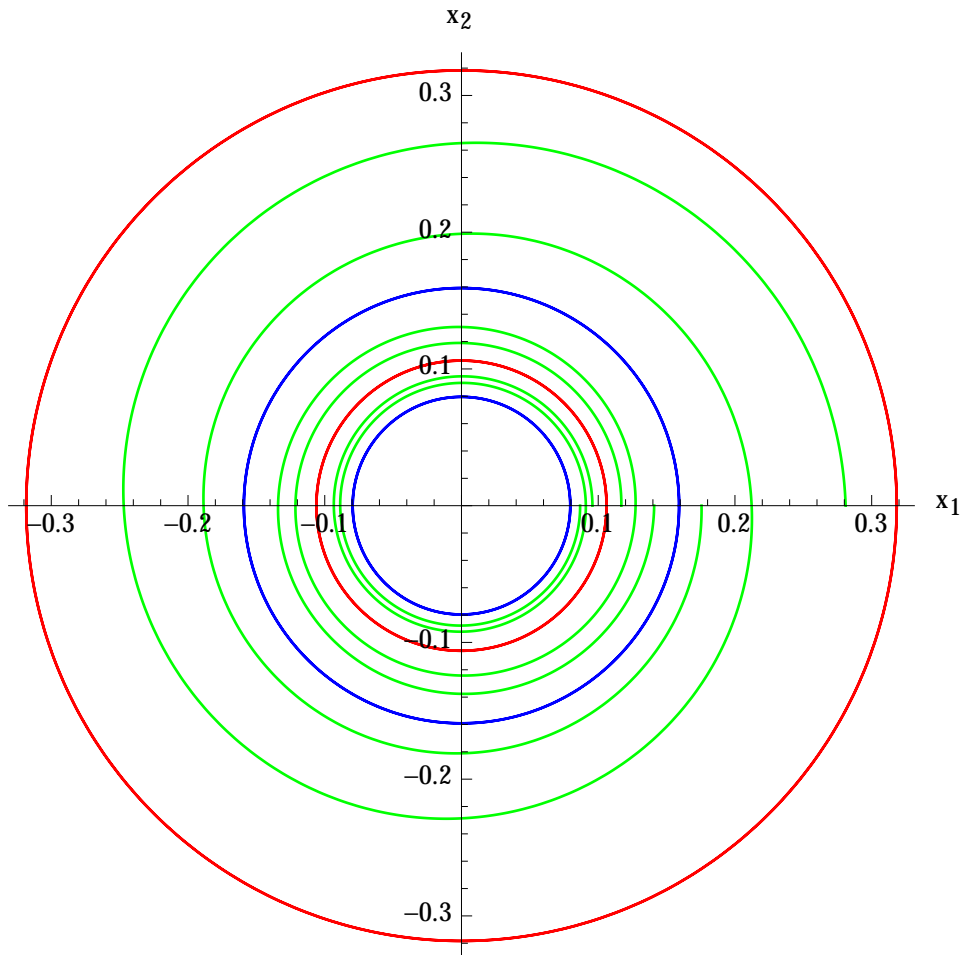
on Hamiltonin systeemi. Määritä kriittisten pisteiden vakaus. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit vakaat ja epävakaat monistot.

**12.3.** <sup>12.3</sup> Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= -x - 2xy \end{aligned}$$

on Hamiltonin systeemi. Määritä kriittisten pisteiden vakaus. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit vakaat ja epävakaat monistot.

<sup>12.3</sup>Vihje: Harjoitustehtävä 7.7



KUVA 20. Punaiset ympyrät ovat hylkiviä ratoja, siniset puoleensavetäviä. Välissä olevien pisteiden  $\omega$ -rajajoukko on sininen ympyrä.

**12.4.** Pisteen  $a$  vahva vakaa monisto virtauksessa  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$  on

$$W_\phi^{\text{su}}(a) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(x), \phi_t(a)) = 0\}$$

Olkoon  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = (1, x_2, -x_3)$ . Määritä pisteen  $x_0$  vahva vakaa monisto vektorikentän  $f$  määräämässä virtauksessa kaikille  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ .

**12.5.** <sup>12.5</sup> Olkoon  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ . Olkoon  $f: \mathbb{R}^2 \times B \rightarrow \mathbb{R}^4$  vektorikenttä

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ \frac{x_3}{2} - x_4 - \frac{x_3^3 + x_4^2 x_3}{2} \\ x_3 + \frac{x_4}{2} - \frac{x_4^3 + x_3^2 x_4}{2} \end{pmatrix}.$$

Miten vektorikentän  $f$  määräämä virtaus käyttäytyy?

**12.6.** Anna esimerkki tason avoimessa joukossa määritellystä differentiaaliyhtälöstä, jolla on sykli, joka on hylkivä joillekin  $x \in \mathbb{R}^2$  ja puoleensavetävä joillekin  $x \in \mathbb{R}^2$ .

<sup>12.5</sup>Vihje: Esimerkki 6.4

### 13. RATKAISUJEN GLOBAALI KÄYTTÄYTYMINEN

Tässä luvussa tarkastelemme muun muassa differentiaaliyhtälön  $\omega$ - ja  $\alpha$ -rajajoukkojen rakennetta. Etsimme vastauksia kysymykseen, millaista joukkoa kohti differentiaaliyhtälön ratkaisut voivat kasautua.

Tasossa tilanne on yksinkertaisempi kuin korkeammassa ulottuvuudessa. Jaksolliset radat eivät ole kovin kiinnostavia tässä yhteydessä, jos muut radat eivät kasaudu niitä kohti. Esimerkiksi tason lineaaristen yhtälöiden tapauksessa, kun molemmat ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia, koko taso origon ulkopuolella on keskenään samanjaksoisten ellipsiratojen yhdiste.

Olemme nähneet monenlaisia rajajoukkoja:

- Esimerkissä 12.4 tarkastelimme 3-ulotteisia systeemejä, joissa  $x_1x_2$ -tason yksikköympyrä on rajasykli.
- Esimerkissä 7.11, tarkastelimme lineaarista 4-ulotteista systeemiä

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi iz_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi \alpha iz_2 . \end{cases}$$

Jos parametri  $\alpha$  on irrationaalinen, niin jokainen torus

$$T(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\},$$

$r_1, r_2 > 0$  on jokaisen pisteensä rajajoukko. Toisaalta, koska nämä torukset ovat invariantteja ja kaikki radat, jotka eivät ole näillä toruksilla ovat suljettuja, niin  $T_{r_1, r_2}$  ei ole minkään pisteen  $(z, w) \notin T_{r_1, r_2}$  rajajoukko.

**Esimerkki 13.1.** Funktio  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

määrää Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 . \end{cases}$$

jonka radat sisältyvät funktion  $V$  tasa-arvojoukkoihin. Olkoon  $\mu \in \mathbb{R}$  ja häiritään Hamiltonin systeemin vektorikenttää parametrilla  $\mu$  riippuvalla funktiolla ja tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

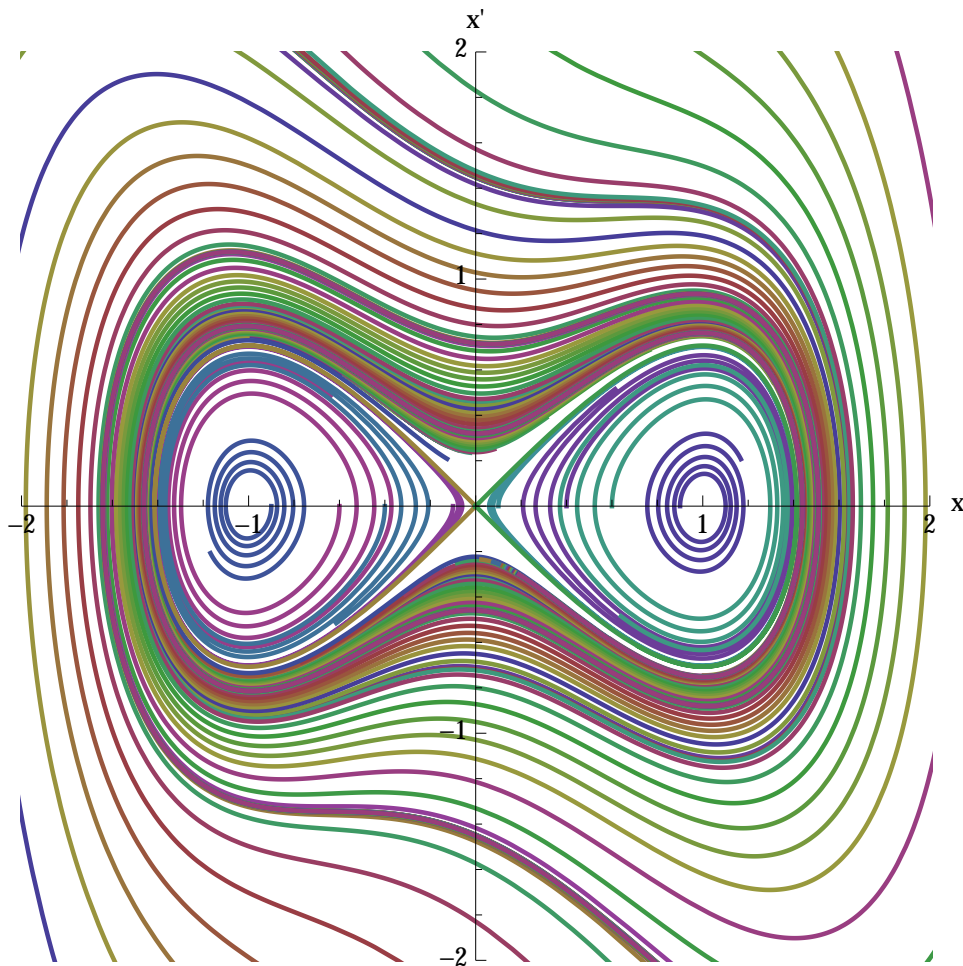
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - 4\mu y V(x, y) . \end{cases}$$

Funktiota  $V$  voidaan käyttää differentiaaliyhtälön tutkimiseen kuten Liapunovin funktiota. Sen rataderivaatta on

$$\dot{V}(x, y) = -4\mu y^2 L(x, y) .$$

Erityisesti, kun  $\mu > 0$ ,  $L(x, y) > 0$  ja  $y \neq 0$ , rataderivaatta on negatiivinen, joten nähdään, että kahdeksikon  $V^{-1}$  ulkopuolelta lähtevät radat kasautuvat kohti koko joukkoa  $V^{-1}$ , kun  $t \rightarrow \infty$ . Vastaavasti joukon  $V^{-1}$  kummankin silmukan sisäpuolelta lähtevät radat kasautuvat kohti sitä puoiskoa, jonka sisällä ne ovat.

Pistettä, joka ei ole tarkasteltavan vektorikentän tasapainopiste, sanotaan usein *säännölliseksi pisteeksi*. Osoitamme Lauseen 8.10 avulla, että säännöllisen pisteen lähellä virtaus käyttäytyy hyvin säännöllisesti:



KUVA 21. Esimerkin 13.1 ratoja, kun  $\mu = 0.1$ .

**Propositio 13.2.** *Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Olkoon  $x_0$  vektorikentän  $f$  säännöllinen piste. Tällöin on pisteen  $x_0$  avoin ympäristö  $N$  ja  $C^1$ -diffeomorfismi  $H: N \rightarrow ]-\epsilon, \epsilon[^n$  siten, että*

$$(66) \quad H(\phi(t, x)) = H(x) + (t, 0, \dots, 0)$$

kaikille  $x \in U$  ja itseisarvoltaan riittävän pienille  $t$ .

*Todistus.* Oletetaan, että  $x_0 = 0$  ja että  $f(0) = (\alpha, 0, \dots, 0)$ . Olkoon  $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$  pieni pallo ja määritellään  $G: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$G(y) = \phi(y_1, (0, y_2, \dots, y_n)).$$

Kuvaus  $G$  on selvästi  $C^1$ , koska se on muodostettu siistiksi oletetun virtauksen avulla. Lisäksi  $G$  on kääntyvä jossain origon pienessä ympäristössä käänteiskuvauslauseen nojalla:

$$\frac{\partial G(0)}{\partial y_1} = \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial t} = f(0) = (\alpha, 0, \dots, 0),$$

ja kuvaus  $x \mapsto \phi(0, (0, x))$  on avaruuden  $\mathbb{R}^{n-1}$  identtinen kuvaus, joten  $DG(0) = \text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$ , joka on kääntyvä.

Olkoon nyt  $H$  kuvauksen  $G$  käänteiskuvaus jossain pienessä origon ympäristössä. Tällöin  $H$  toteuttaa ehdon (66), jos ja vain jos  $G$  toteuttaa

$$\phi(t, G(y)) = G(y + (t, 0, \dots, 0))$$



kaikille  $y$  lähellä origoa ja kaikille itseisarvoltaan riittävän pienille  $t$ . Mutta virtausominaisuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\phi(t, G(y)) &= \phi(t, \phi(y_1, (0, y_2, \dots, y_n))) = \phi(y_1 + t, (0, y_2, \dots, y_n)) \\ &= G(y_1 + t, y_2, \dots, y_n) = G((y_1, y_2, \dots, y_n) + (t, 0, \dots, 0))\end{aligned}$$

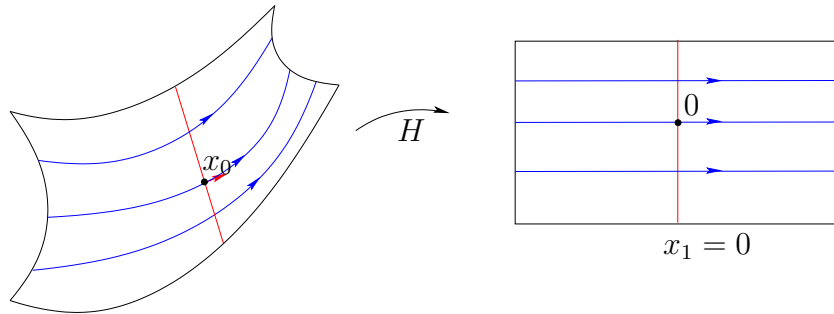
kuten pitikin. Halutun muotoinen ympäristö saadaan valitsemalla sivun pituus  $\epsilon$  riittävän pieneksi  $\square$

Proposition 13.2 antama ympäristö  $N$  on *virtauslaatikko* (flow box): Diffeomorfismin  $H$  antamissa koordinaateissa virtaus on yksinkertaisesti siirto ajan  $t$  verran suuntaan, joka määräytyy vektorikentän arvosta pisteessä  $p$ , kunhan aika on riittävän pieni. Hypertason  $\{y_1 = 0\}$  kuutiota  $] -\epsilon, \epsilon[$  leikkaavan osan alkukuvaa kuvauksella  $H$ , joka on siis sen kuva kuvauksella  $G = H^{-1}$ ,

$$G(0, y_2, \dots, y_n) = \phi(0, (0, y_2, \dots, y_n)) = (0, y_2, \dots, y_n)$$

sanotaan *lokaaliksi virtauslaatikkopoikkileikkaukseksi* tai *lokaaliksi sektiksi* pisteessä  $x_0$ . Tässä konstruktiossa lokaali poikkileikkaus on vektorin  $f(x_0)$  kanssa pisteessä  $x_0$  kohtisuora hypertason osa.

Yleisemmin mikä tahansa lokaali hyperpinta  $S$ , joka on vektorikentän  $f$  kanssa lokaalisti transversaalinen (siis  $f$  ei ole pinnan  $S$  tangenttivektori missään pisteessä) on vektorikentän  $f$  *lokaali poikkileikkaus*.



Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä ja olkoon  $\phi$  vektorikentän  $f$  määräämä (ositainen) virtaus. Olkoon  $x_0$  säännöllinen piste, jonka rata  $\Gamma$  on jaksollinen. Olkoon  $S$  lokaali poikkileikkaus pisteessä  $x_0$ . Jos pisteelle  $x \in S$  on  $t > 0$ , jolla  $\phi_t(x) \in S$ , niin

$$\tau(x) = \min\{t > 0 : \phi_t(x) \in S\}$$

on pisteen  $x$  *ensimmäinen paluu aika* poikkileikkaukseen  $S$ . Niille pisteille, joiden ensimmäinen paluu aika on määritelty, määritellään *Poincarén kuvaus* asettamalla  $P(x) = \phi(\tau(x), x) \in S$ . Kuvaus  $P$  ei ole välttämättä määritelty koko poikkileikkauksessa  $S$ .

**Propositio 13.3.** *Olkoot  $f$  ja  $x_0$  kuten yllä. Ensimmäinen paluu aika ja Poincarén kuvaus ovat hyvin määriteltyjä differentioituvia kuvauksia jossain pisteen  $x_0$  avoimessa ympäristössä virtauslaatikkopoikkileikkauksella  $S$ .*

*Todistus.* Olkoon  $T = \tau(x_0)$  pisteen  $x_0$  jakso. Tarkastellaan jatkuvasti differentioituvaa funktiota

$$F(t, x) = (\phi_t(x) - x_0 | f(x_0)).$$

Pisteen  $x_0$  jaksollisuudesta seuraa, että  $F(T) = 0$ . Määritelmän mukaan  $\phi_t(x)$  on poikkileikkauksen  $S$  sisältävässä hypertasossa täsmälleen silloin, kun  $F(t, x) = 0$ .

Koska  $x_0$  on säännöllinen piste,

$$\frac{\partial F(T, x_0)}{\partial t} = \left( \frac{\partial \phi(T, x_0)}{\partial t} \Big|_{f(x_0)} \right) = \|f(x_0)\|^2 > 0.$$

Implisiittifunktiolauseen mukaan on  $r > 0$  ja yksikäsitteinen funktio  $\tau: B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  siten, että  $\tau(x_0) = T$  ja  $F(\tau(x), x) = 0$  kaikille  $x \in B(x_0, r)$ . Saadaan siis määriteltä jatkuvasti differentioituva kuvaus  $P_0: B(x_0, r) \rightarrow f(x_0)^\perp$ . Käyttämällä jatkuvuutta voidaan rajoittaa kuvaukset  $\tau$  ja  $P_0$  riittävän pieneen pisteeseen  $x_0$  ympäristöön hypertasossa  $f(x_0)^\perp$ , jotta ne määrittelevät ensimmäisen paluuaajan ja Poincarén kuvauksen.  $\square$

Tasossa Poincarén kuvaus voidaan ajatella reaaliarvoisena funktiona, kun samastetaan  $f(x_0)^\perp$  ja  $\mathbb{R}$ . Tällöin Poincarén kuvauksen tarkastelu on melko suoraviivaista. Harjoituksissa osoitetaan

**Propositio 13.4.** *Olkoon  $x_0$  tason differentiaaliyhtälön säännöllinen jaksollinen piste. Olkoon  $\Gamma$  pisteen  $x_0$  rata. Jos  $|P'(x_0)| < 1$ , niin on  $\delta > 0$  siten, että  $\Gamma = \omega(x)$  jokaiselle pisteelle  $x$ , joka on radan  $\Gamma$   $\delta$ -ympäristössä.*

*Todistus.* Harjoitustehtävä 13.1.  $\square$

**Propositio 13.5.** *Olkoon  $S$  tason differentiaaliyhtälön lokaali poikkileikkaus. Olkoon  $x$  piste, jonka positiivinen rata kohtaa poikkileikkauksen  $S$  äärettömän monta kertaa. Olkoot  $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$  siten, että  $\phi_{t_k}(x) \in S$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ . Tällöin jono  $(\phi_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$  on monotoninen poikkileikkauksella  $S$ .*

*Todistus.* Tarkastellaan kolmea perättäistä aikaa  $t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$ . Tarkastellaan silmukkaa

$$\Sigma = \phi([t_{k-1}, t_k], x) \cup [\phi_{t_k}(x), \phi_{t_{k-1}}(x)].$$

Olkoon  $D$  silmukan  $\Sigma$  rajoittama kompakti topologinen kiekko.

Jos vektori  $f(\phi_{t_k}(x))$  osoittaa joukon  $D$  sisään, niin sama pätee kaikkialla janalla  $[\phi_{t_k}(x), \phi_{t_{k-1}}(x)] \subset S$ . Siis  $\phi_{t_{k+1}}(x) \in D$  koska ratkaisukäyrä  $\phi([t_k, \infty[, x)$  ei leikkaa silmukkaa  $\Sigma$ , joten tarkasteltavat pisteet ovat väitetyssä järjestyksessä. Toinen tapaus todistetaan vastaavasti.  $\square$

Poincarén ja Bendixsonin lause kuvailee tason systeemien mahdolliset rajajoukot melko kattavasti:

**Lause 13.6** (Poincarén ja Bendixsonin lause). *Olkoon  $\Omega \neq \emptyset$  tason differentiaaliyhtälön kompakti rajajoukko. Jos  $\Omega$  ei sisällä yhtään tasapainopistettä, niin  $\Omega$  on suljettu rata.*

*Todistus.* Olkoon  $y \in \omega(x)$ . Oletetaan, että joukon  $\omega(x)$  pisteet ovat säännöllisiä, erityisesti siis  $y$  on säännöllinen piste. Osoitamme ensin, että  $y$  on jaksollinen ja sitten, että  $\omega(x)$  koostuu pisteen  $y$  radasta.

Koska  $\omega(x)$  on kompakti, niin Proposition 7.9 mukaan  $\omega(y) \subset \omega(x)$  on invariantti kompakti joukko, joka sisältää ainakin yhden pisteen  $z$ . Olkoon  $S$  lokaali poikkileikkaus pisteessä  $z$  ja olkoon  $N$  vastaava virtauslaatikko.

Oletetaan, että tarkasteltavan pisteen  $y \in \omega(x)$  positiivinen rata kohtaa poikkileikkauksen  $S$  vähintään kahdessa pisteessä  $y_1, y_2 \in \omega(x)$ . Tällöin pisteen  $x$  rata kasautuu pisteisiin  $y_1$  ja  $y_2$ , joten se ei voi olla monotoninen, mikä on ristiriita Proposition 13.5 kanssa. Siis pisteen  $y$  rata kohtaa poikkileikkauksen  $S$  vain yhdessä pisteessä.

Koska  $z \in \omega(y)$ , niin on äärettömään nouseva jono  $t_k$ , jolle  $\phi_{t_k}(y) \in N$ . Siispä, koska pisteen  $y$  rata leikkaa poikkileikkausta vain yhdessä pisteessä  $y_1 \in S$ , on

$0 < s < t$ , joille  $\phi_s(y) = \phi_t(y) = y_1$ , joten  $y_1$  on jaksollinen. Siis myös  $y$  on jaksollinen piste jollain positiivisella jaksolla  $T$ . Olkoon  $\Gamma$  pisteen  $y$  rata.

Osoitetaan sitten, että  $d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ . Olkoon  $S$  lokaali poikkileikkaus pisteessä  $y$ . Olkoon  $t_k \nearrow \infty$  siten, että jono  $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$  monotonisesti poikkileikkauksessa  $S$  ja  $t \notin S$ , kun  $t_k < t < t_{k+1}$ . Kun  $k$  on riittävän iso, niin jatkuva riippuvuus alkuarvoista (Propositio 4.9) takaa, että  $\phi_T(\phi_{t_k}(x)) \in N$ , joten

$$t_{k+1} \leq t_k + T + \epsilon.$$

Olkoon  $\delta > 0$ . Jatkuvasta riippuvuudesta alkuarvoista (Propositio 4.14 tai Lause 8.6) seuraa, että  $\|\phi_t(z) - \phi_t(y)\| \leq \delta$  kaikille  $t \in [t_k, t_k + T + \epsilon]$ , kun piste  $z$  on riittävän lähellä pistettä  $y$ . Siis on  $N \in \mathbb{N}$ , jolle kaikilla  $k \geq N$  pätee

$$\|\phi_t(\phi_{t_k}(x)) - \phi_t(y)\| \leq \delta$$

kaikille  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , joten sama epäyhtälö pätee kaikille suurille ajoille: Olkoon  $n \geq N$  ja olkoon  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ . Tällöin

$$d(\phi_t(x), \Gamma) \leq \|\phi_t(x) - \phi_{t-t_n}(z)\| = \|\phi_{t-t_n}(\phi_{t_n}(x)) - \phi_{t-t_n}(z)\| < \delta. \quad \square$$

**Seuraus 13.7.** *Olkoon  $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$  positiivisesti invariantti kompakti joukko. Jos  $K$  sisältää pisteen, joka ei ole jaksollinen, niin  $K$  sisältää tasapainopisteen tai rajasyklin.*  $\square$

**Seuraus 13.8.** *Olkoon  $\Gamma$  suljettu rata siten, että joukon  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  rajoitettu komponentti sisältyy joukkoon  $U$ . Jos  $U$  sisältää pisteen, joka ei ole jaksollinen, niin  $U$  sisältää tasapainopisteen tai rajasyklin.*

*Todistus.* Olkoon  $x \in U$  piste, joka ei ole jaksollinen. Jos joukossa  $U$  ei ole rajasykliä eikä tasapainopistettä, niin Poincarén ja Bendixsonin lauseen mukaan  $\omega(x) = \alpha(x) = \Gamma$ . Mutta tämä on mahdotonta, koska noin käyttäytyvän radan  $\mathcal{O}(x)$  leikkaus jossain radan  $\Gamma$  pisteessä olevan poikkileikkauksen kanssa ei voi olla monotoinen.  $\square$

**Lause 13.9.** *Olkoon  $\Gamma$  suljettu rata siten, että joukon  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  rajoitettu komponentti sisältyy joukkoon  $U$ . Tällöin  $U$  sisältää tasapainopisteen.*

*Todistus.* Oletetaan, että  $U$  ei sisällä tasapainopistettä. Olkoon  $\text{Area}(\Gamma')$  joukkoon  $U$  sisältyvän suljetun radan  $\Gamma'$  rajaaman joukon pinta-ala. Olkoon

$$A = \inf\{\text{Area}(\Gamma') : \Gamma' \subset U \text{ on suljettu rata}\}.$$

Olkoon  $\Gamma_k$  minimoiva jono ja olkoon  $x_k \in \Gamma_k$ . Kompaktiuden nojalla voimme olettaa, että jono  $x_k$  suppenee kohti pistettä  $x \in U \cup \Gamma$ . Jos pisteen  $x$  rata ei olisi jaksollinen, niin Poincarén ja Bendixsonin lauseen mukaan  $\omega(x)$  olisi rajasykli. Harjoitustehtävän 13.3 nojalla  $\omega(x_k) = \omega(x)$  suurilla  $k$ , mutta tämä on mahdotonta. Jatkuva riippuvuus alkuarvoista antaa yhtälön  $\text{Area}(\mathcal{O}(x)) = A$ . Oletuksen mukaan  $x$  ei ole tasapainopiste, joten  $A > 0$ . Erityisesti radan  $\mathcal{O}(x)$  sisäpuolella ei ole jaksollisia ratoja. Tämä on ristiriita Seurauksen 13.8 kanssa.  $\square$

**Lause 13.10.** *Olkoon  $L: U \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, joka on vakio radoilla. Jos ei ole avointa epätyhjää joukkoa  $V \subset U$ , jossa  $L$  on vakio, niin vektorikentällä ei ole rajasykliä.*

*Todistus.* Harjoitustehtävä 13.4.  $\square$

## Harjoitustehtäviä.

**13.1.** Todista Propositio 13.4.

**13.2.** Osoita, että differentiaaliyhtälöllä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_1^3 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}$$

on rajasykli renkaassa

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\|^2 \leq 2\}.$$

**13.3.** Olkoon  $\Gamma$  vektorikentän  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  rajasykli ja olkoon  $\phi$  vastaava virtaus. Osoita, että joukko

$$\{x \in U : \omega(x) = \Gamma\} - \Gamma$$

on avoin.

**13.4.** Todista Lause 13.10.

## 14. LOPUKSI

Luvun 13 tulokset antavat melko tarkan kuvan tason differentiaaliyhtälöiden käyttäytymisestä. Erityisesti ratkaisujen asymptoottinen käyttäytyminen on tässä tapauksessa kohtuullisen kesyää. Asymptoottista käyttäytymistä kuvaavan Poincarén ja Bendixsonin lauseen todistus käyttää oleellisella tavalla sitä, että topologinen ympyrä jakaa tason kahteen erilliseen komponenttiin.

Korkeammissa ulottuvuuksissa havaitaan monia ilmiöitä, joita tasossa ei voi olla. Tarkastelemme esimerkkinä Lorenzin differentiaaliyhtälöä

$$(67) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}.$$

joka riippuu kolmesta positiivisesta parametrissa  $\sigma$ ,  $b$  ja  $r$ . Yhtälö kehitettiin alunperin hyvin vahvasti yksinkertaistetuksi ilmastomalliksi 60-luvulla. Se lienee ensimmäinen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisujen huomattiin käyttäytyvät kaoottisesti sopivilla parametreilla. Sitten Lorenzin yhtälö ja sen eri variaatiot ovat eläneet omaa elämäänsä mahdollisista sovelluksista riippumattomina esimerkkeinä jatkuva-aikaisista dynaamisista systeemeistä joissa havaitaan kaoottista käyttäytymistä. Klassisin valinta kaoottisen käytöksen esittämiseen on  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ja  $r = 28$ .

Lorenzin differentiaaliyhtälön vektorikentällä on tasapainopiste origossa ja parametreilla  $r > 1$  myös tasapainopisteet

$$P_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Tarkastelemalla linearisoitua yhtälöä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix}$$

nähdään, että 0 on nielu, kun  $0 < r < 1$ . Itse asiassa funktio  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(x) = x_1^2 + \sigma(x_2^2 + x_3^2)$$

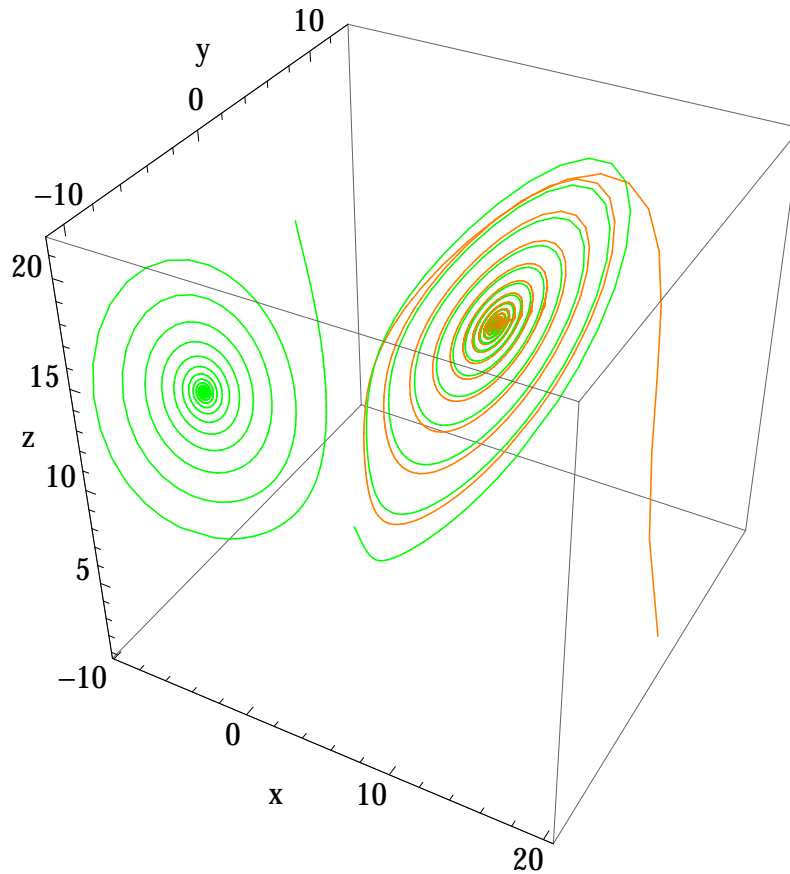
on aito Liapunovin funktio origossa. Kun  $r \rightarrow 1+$ , niin  $P_{\pm} \rightarrow 0$ , joten ajatellaan, että tasapainopisteet  $P_{\pm}$  syntyvät parametrilla  $r = 1$  ja erkanevat origosta, kun parametri  $r$  kasvaa suuremmaksi kuin 1. Tämä on esimerkki differentiaaliyhtälöiden parametrisoidussa perheessä tapahtuvasta *bifurkaatiosta*, jossa yhtälön käyttäytyminen muuttuu selvästi jollain parametrilla. Bifurkaatioista voi lukea lisää esimerkiksi lähteen [HSD] Luvuissa 8.5 ja 12.4 ja lähteen [Per] Luvussa 4.

Kun  $r > 1$ , origo muuttuu satulapisteeksi, jolla on yksi positiivinen ominaisarvo. Tasapainopisteet  $P_{\pm}$  taas ovat nieluja parametrivälillä

$$1 < r < r_H(\sigma, b) = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}.$$

Näillä parametreilla systeemin käyttäytyminen on melko yksinkertaista. Klassisilla parametreilla  $\sigma = 10$  ja  $b = \frac{8}{3}$  saadaan  $r_H(10, \frac{8}{3}) = \frac{470}{19} \approx 24.7368$ . Jo ennen tätä rajaa systeemissä tapahtuu mielenkiintoisia muutoksia, joita on selostettu Esimerkiksi Lorenzin differentiaaliyhtälöä laajasti käsittelevässä lähteessä [Spa].

Kuuluisa perhoskuvio on hyvin selkeä parametrilla  $r = 28$ . Tällä ja monilla muillakin parametreilla systeemi riippuu herkästi alkuarvoista: lähekkäisten pisteiden radat poikkeavat dramaattisesti toisistaan, kun aika etenee riittävän pitkään. Kuitenkin nämä radat seuraavat samaa joukkoa ja niillä vaikuttaisi olevan sama raja-joukko.



KUVA 22. Lorenzin differentiaaliyhtälön ratkaisuja kolmella eri alkuarvolla parametreilla  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ja  $r = 14$ .

Lorenzin yhtälö parametreilla  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ja  $r = 28$  on esimerkki systeemistä, jonka rajajoukot ovat eksoottisempia kuin tasossa tavattavat. Sanotaan, että systeemillä on *outo attraktori*. Joukko  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  on virtauksen  $\phi$  *attraktori*, jos

- $\Lambda$  on kompakti ja invariantti.
- Joukolla  $\Lambda$  on avoin positiivisesti invariantti ympäristö  $U$  siten, että

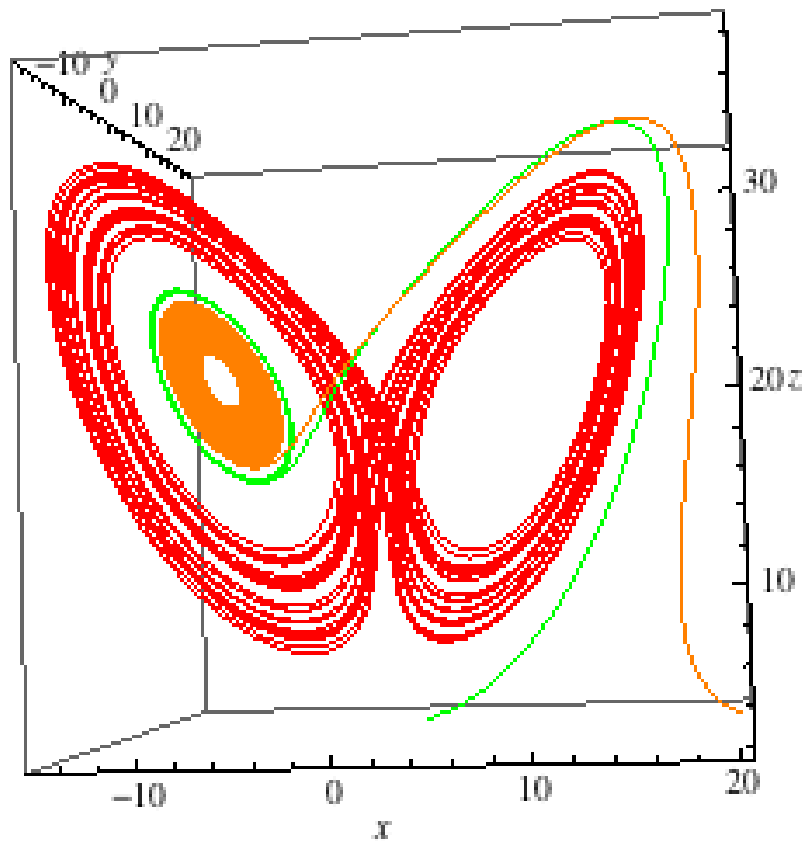
$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U).$$

- Virtaus  $V$  on topologisesti transitiivinen: jos  $V_1$  ja  $V_2$  ovat pisteiden  $x_1, x_2 \in \Lambda$  avoimia ympäristöjä, niin on  $z \in V_1$  ja  $t \geq 0$  siten, että  $\phi_t(z) \in V_2$ .

Lorenzin systeemin attraktoria sanotaan oudoksi muun muassa sen vuoksi, että sen Hausdorffin dimensio ( $\approx 2.06$ ) ei ole kokonaisluku. Koska Lorenzin systeemi on “ilmastomalli”, sen herkkä riippuvuus alkuarvoista tunnetaan myös perhosefektin nimellä. Tätä aihetta käsitellään elokuvan Chaos [LGA] luvuissa 7-9. Lorenzin yhtälöä käsitellään myös lähteissä [HSD] Luvussa 14 ja [Per] Luvussa 4.5.

#### VIITTEET

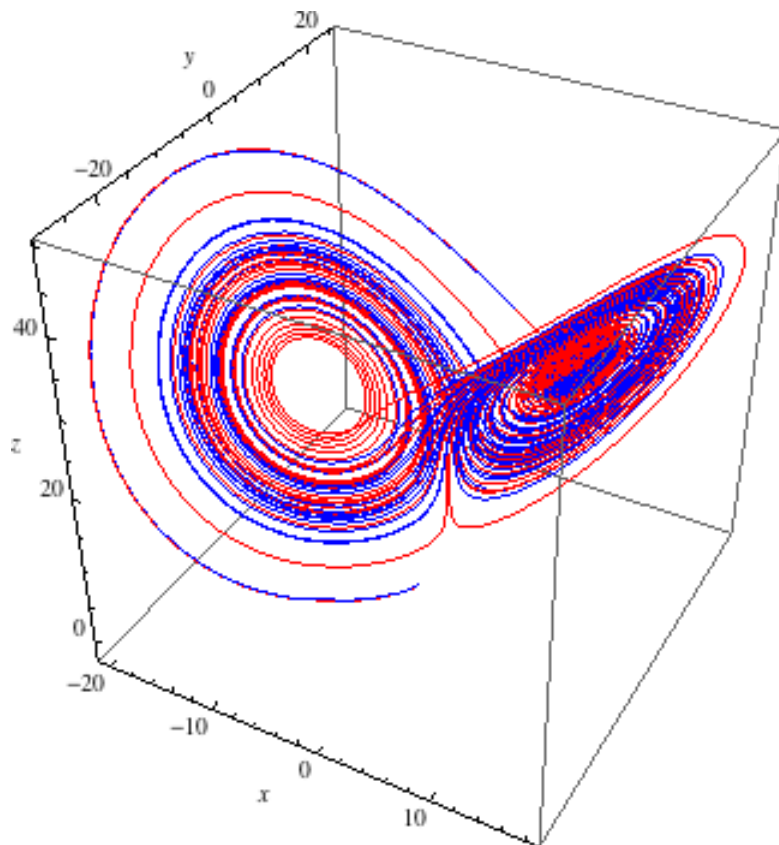
- [BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1999.
- [Dur] J. R. Durbin. *Modern algebra*. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1986. An introduction.
- [Gre] W. Greub. *Linear algebra*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 23.
- [Gro] S. Grossman. *Elementary linear algebra*. Saunders College Publishing, 1991.



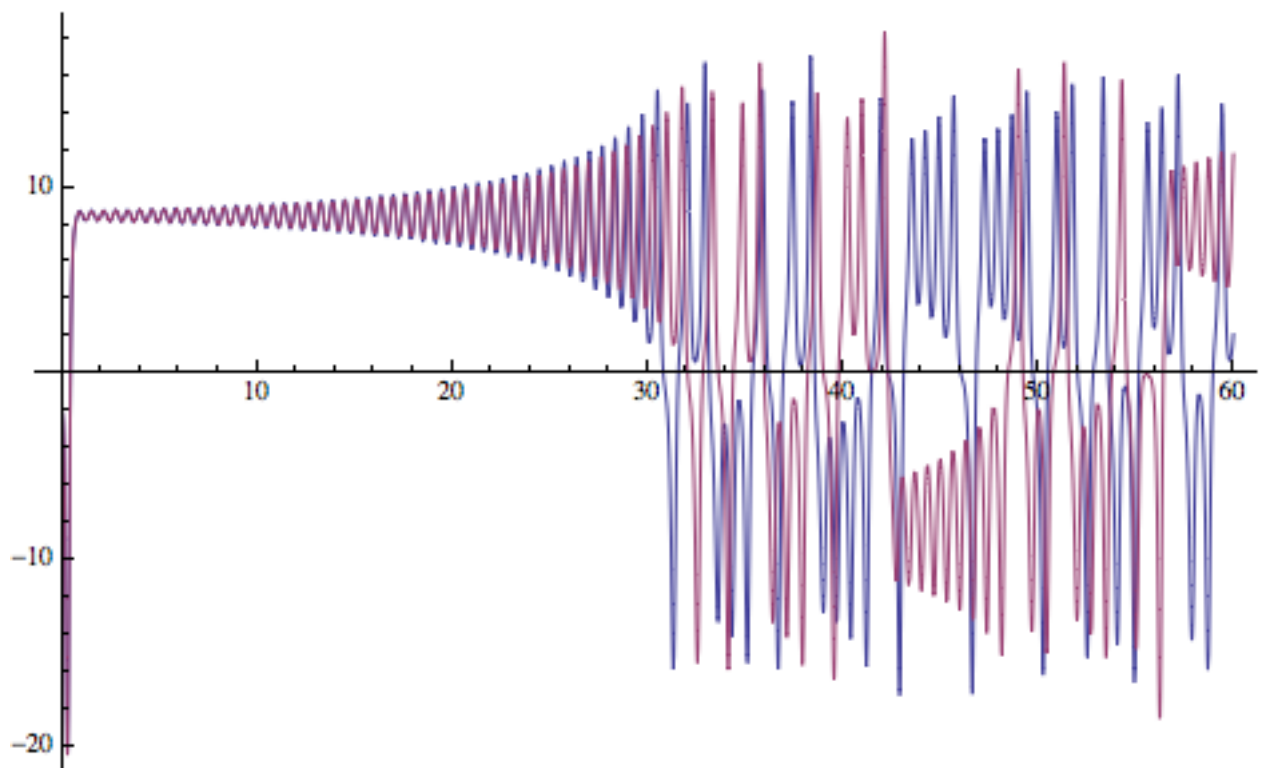
KUVA 23. Lorenzin differentiaaliyhtälön ratkaisuja kolmella eri alkuarvolla parametreilla  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ja  $r = 23.295$ .

- [Har1] P. Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:610–620, 1960.
- [Har2] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Birkhäuser, Boston, Mass., second edition, 1982.
- [HK] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003. With a panorama of recent developments.
- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [HJ] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [LGA] J. Leys, É. Ghys, and A. Alvarez. Chaos. A mathematical adventure. <http://www.chaos-math.org/en>.
- [Mun] J. R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [Ort] J. M. Ortega. *Matrix theory*. The University Series in Mathematics. Plenum Press, New York, 1987. A second course.
- [Per] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993. Corrected reprint of the 1991 original.
- [Spa] C. Sparrow. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, volume 41 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS, PL 35, 40014 JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
 E-mail address: jouni.t.parkkonen@jyu.fi



KUVA 24. Lorenzin differentiaaliyhtälön ratkaisuja kahdella lähekkäisellä alkuarvolla parametreilla  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ja  $r = 28$ .



KUVA 25. Lorenzin differentiaaliyhtälön ratkaisuja parametreilla  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ja  $r = 28$ . Kuva esittää Kuvassa 24 esitettyjen ratkaisujen  $x$ -koordinaatteja.