Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1
Harjoitus 5, 11.10.2010

1. Olkoon A reaalinen $n \times n$-matriisi. Olkoon λ matriisin A ominaisarvo, ja olkoon V sitä vastaava ominaisvektori. Osoita, että e^λ on matriisin $\exp A$ ominaisarvo, ja että V on sitä vastaava ominaisvektori.

2. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva. Osoita OY-lauseen avulla, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on ratkaisu, joka on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva. Olkoon $p \in \mathbb{R}^n$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste (siis $f(p) = 0$). Lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = Df(p)x$$

on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ *linearisointi* pisteessä p. Jos lineaarikuvauksella $Df(p)$ ei ole ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolla, niin tasapainopiste p on *hyperbolinen.*

Jos tasapainopiste p on hyperbolinen, niin differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisut käyttäytyvät lähellä pistettä p kuten linearisoidun yhtälön ratkaisut lähellä origoa. Täsmällisemmin:

Lause 1 (Grobmanin ja Hartmanin lause)**.** Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva. Jos p on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ hyperbolinen tasapainopiste, niin on avoimet joukot $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ ja $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ ja homeomorfismi $H\colon U \to V$ siten, että jokaiselle $x_0 \in U$ on avoin väli $0 \in I \subset \mathbb{R}$, jolla on seuraava ominaisuus: Olkoon $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu alkuarvolla x_0, ja olkoon A lineaarikuvauksen $Df(p)$ matriisi standardikannassa. Tällöin kaikille $t \in I$ pätee

$$H \circ x(t) = \exp(At)H(x_0). \quad \square$$

Hyperbolisen tasapainopisteen *tyyppi* on vastaavan linearisoidun differentiaaliyhtälön tyyppi (satula, nielu, lähde,...).

---

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = (x_1, \|x\|^2 - 1).$$

- Etsi differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteet.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Hahmottele vektorikenttää f ja kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisujen käyttäytymistä käsin tai Mathematicalla.

Jatkuu toisella sivulla...

4. Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälö (katso Luku 1) on

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{r} = ar - bhr, \\ \dot{h} = -ch + dhr, \end{cases}$$

missä $a, b, c, d > 0$.

- Määritä differentiaaliyhtälön $(*)$ tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö $(*)$ tasapainopisteissä.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Olkoon $V \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

  $$V(r, h) = \frac{h^a}{e^{bh}} \frac{r^c}{e^{dr}}.$$

  Osoita, että V on vakio jokaiselle differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisulle. Toisin sanoen, jos kuvaus $t \mapsto (r(t), h(t))$ on differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu, niin kuvaus $t \mapsto V(r(t), h(t))$ on vakio.