

# Renkaat ja kunnat 2025

## Harjoitus 4: ratkaisuja

1. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

**Ratkaisu.** Proposition 4.7 nojalla kuntahomomorfismi  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  olisi injektio. Tällöin kuvajoukko  $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$  olisi numeroituvan joukon ylinumeroituva osajoukko, mikä on mahdotonta.

**Ratkaisu** (Toinen ratkaisu). Tunnetusti luvulla 2 ei ole rationaalista neliöjuurta. Jos  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  olisi kuntahomomorfismi, niin koska  $\phi$  on homomorfismi ja  $\sqrt{2}^2 = 2$ ,

$$\phi(\sqrt{2})^2 = \phi(2) = \phi(1 + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Siis luvulla 2 olisikin rationaalinen neliöjuuri.

2. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ratkaisu.** Kaikille  $x \in \mathbb{R}$  pätee tunnetusti  $x^2 \geq 0$ . Jos  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  olisi kuntahomomorfismi, niin koska  $\phi$  on homomorfismi ja  $i^2 = -1$ , ja Lemman 3.18 nojalla

$$\phi(i)^2 = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1 < 0,$$

mikä on ristiriita.

3. Olkoon  $d \in \mathbb{N}$  luonnollinen luku, joka ei ole neliö. Osoita, että  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  on reaalilukujen kunnan alikunta ja että  $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  on kompleksilukujen kunnan alikunta.

**Ratkaisu.** Jokaisella  $d \in \mathbb{N}$  pätee  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ja  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ , joten joukoissa  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ja  $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  on vähintään kaksi alkioita.

Jos  $a + b\sqrt{d}, a' + b'\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , niin

$$(a + b\sqrt{d}) - (a' + b'\sqrt{d}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}).$$

Jos  $a' + b'\sqrt{d} \neq 0$ , niin

$$(a' + b'\sqrt{d})(a' - b'\sqrt{d}) = (a')^2 - (b')^2d \neq 0,$$

koska oletimme, että  $d$  ei ole neliö. Tällöin myös  $a' - b'\sqrt{d} \neq 0$  ja saamme

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d})^{-1} &= \frac{(a + b\sqrt{d})(a' - b'\sqrt{d})}{(a')^2 - (b')^2d} \\ &= \frac{aa' - bb'd}{(a')^2 - (b')^2d} + \frac{ba' - ab'}{(a')^2 - (b')^2d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}). \end{aligned}$$

Siis  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  on kunnan  $\mathbb{R}$  alikunta Proposition 4.6 nojalla.

Jos  $a + bi\sqrt{d}, a' + b'i\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ , niin

$$(a + bi\sqrt{d}) - (a' + b'i\sqrt{d}) = (a - a') + (b - b')i\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d}).$$

Jos  $a' + b'i\sqrt{d} \neq 0$ , niin Lemman 1.25 nojalla

$$\begin{aligned} (a + bi\sqrt{d})(a' + b'i\sqrt{d})^{-1} &= \frac{(a + bi\sqrt{d})(a' - b'i\sqrt{d})}{(a')^2 + (b')^2d} \\ &= \frac{aa' + bb'd}{(a')^2 + (b')^2d} + \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2d}i\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d}). \end{aligned}$$

Siis  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  on kunnan  $\mathbb{R}$  alikunta Proposition 4.6 nojalla.

4. Määritä Gaussin kokonaislukujen yksiköiden ryhmä.

**Ratkaisu.** Huomataan ensin, että  $\pm 1 \pm i$  ovat yksiköitä, koska  $(\pm 1)^2 = 1$  ja  $-i \cdot i = 1$ . Olkoon  $u \in \mathbb{Z}[i]^\times$ . Kuvaus  $\mathbf{n}: (\mathbb{Z}[i], \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, \cdot)$  on homomorfismi, joten

$$1 = \mathbf{n}(1) = \mathbf{n}(uu^{-1}) = \mathbf{n}(u)\mathbf{n}(u^{-1}).$$

Siis  $\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(u^{-1}) \in \mathbb{Z}^\times \cap [0, \infty[ = \{1\}$ . Siis, jos  $u = a + ib$ , pätee  $a^2 + b^2 = 1$ . Tämän yhtälön kokonaislukuratkaisut ovat  $(\pm 1, 0)$  ja  $(0, \pm 1)$ , joten Gaussin kokonaislukujen renkaan yksiköt ovat  $\pm 1$  ja  $\pm i$ .

5. Osoita, että  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$  on ääretön.

**Ratkaisu.** Huomataan, että  $\sqrt{2} \pm 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  ja

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1,$$

joten  $\sqrt{2} \pm 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ . Proposition 4.1 nojalla  $(\sqrt{2} + 1)^k$  on yksikkö kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ . Jono  $((\sqrt{2} + 1)^k)_{k=1}^\infty$  on aidosti kasvava, koska  $\sqrt{2} + 1 > 0$ , joten  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$  sisältää äärettömän joukon  $\{(\sqrt{2} + 1)^k : k \in \mathbb{N}\}$ .

6. Osoita, että Hamiltonin kvaterniot muodostavat renkaan.

**Ratkaisu.** Sovelletaan alirengastestiä: Olkoot  $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ . Tällöin

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(\bar{b}+\bar{d}) & \bar{a}+\bar{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

ja

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & ad + b\bar{c} \\ -\bar{b}c - \bar{a}d & -\bar{b}d + \bar{a}c \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Lisäksi  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_{M_2(\mathbb{C})} \in \mathbb{H}$ , joten alirengastestin nojalla  $\mathbb{H}$  on renkaan  $M_2(\mathbb{C})$  alirengas.

7. Olkoon  $K$  kommutatiivinen rengas. Osoita, että

- (1)  $a \mid a$  kaikille  $a \in K$ .
- (2) Jos  $a \mid b$  ja  $b \mid c$ , niin  $a \mid c$ .
- (3) Jos  $a \mid b$  ja  $a \mid c$ , niin  $a \mid b + c$ .

**Ratkaisu.** (1) Seuraa siitä, että  $a = 1a$ .

(2) Jos  $a \mid b$ , niin on  $x \in K$ , jolle  $b = xa$ . Jos  $b \mid c$ , niin on  $y \in K$ , jolle  $c = yb$ . Siis  $c = y(xa) = (yx)a$ , joten  $a \mid c$ .

(3) Jos  $a \mid b$  ja  $a \mid c$ , niin on  $x \in K$ , jolle  $b = xa$  ja  $y \in K$ , jolle  $c = ya$ . Siis

$$b + c = xa + ya = (x + y)a,$$

joten  $a \mid b + c$ .

**8.** Todista Propositio 5.5.

**Ratkaisu.** Olkoon  $K$  kokonaisalue. Olkoot  $a, b, c \in K$  siten, että  $a \neq 0$  ja  $ab = ac$ . Distributiivisuuden nojalla  $a(b - c) = 0$ . Koska kokonaisalueessa  $K$  ei ole nollan jakajia, pätee  $b - c = 0$ , joten  $b = c$ .

Oletetaan sitten, että kommutatiivisessa renkaassa  $K$  pätee renkaan supistussääntö. Olkoot  $a, b \in K$  siten, että  $ab = 0$ . Jos  $a \neq 0$ , niin  $ab = a0$ , joten supistussäännön nojalla  $b = 0$ . Siis kommutatiivisessa renkaassa  $K$  ei ole nollan jakajia, joten se on kokonaisalue.