Renkaat ja kunnat 2025

Harjoitus 3: ratkaisuja

1. Todista Lemma 1.26: Osoita, että kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee

(1) $\bar{\bar{z}} = z$,

(2) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,

(3) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ ja

(4) $\mathbf{n}(\bar{z}) = \mathbf{n}(z)$.

Ratkaisu. Olkoot $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$. Tällöin

(1) $\bar{\bar{z}} = \overline{(\overline{z})} = \overline{a - ib} = a + ib = z$,

(2) $\overline{z+w} = \overline{a + c + i(b+d)} = a + c - i(b+d) = (a - ib) + (b - id) = \overline{z} + \overline{w}$,

(3) $\overline{z}\,\overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ad - bc) - i(ad + bc) = \overline{zw}$,

(4) $\mathbf{n}(\overline{z}) = \mathbf{n}(a + (-b)i) = a^2 + b^2 = \mathbf{n}(z)$ tai $\mathbf{n}(\overline{z}) = \overline{z}\overline{\overline{z}} = \overline{z}z = z\overline{z} = \mathbf{n}(z)$.

2. Todista Propositio 3.15.

Ratkaisu. Olkoon R rengas ja olkoon $S \subset R$ alirengas. Tällöin S on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(S, +)$ ja $(S, \cdot)$ vakaa osajoukko. Siis (1) pätee. Koska jokaisella $s \in (S, +)$ on vasta-alkio, erityisesti tämä pätee alkiolle $1_R = 1_S \in S$. On siis alkio $x \in S \subset R$, jolle pätee $x + 1_R = 0_S = 0_R$. Vasta-alkion yksikäsitteisyyden nojalla $x = -1_R$. Siis ehto (2) pätee.

Oletetaan, että $S \subset R$ on osajoukko, jolle pätee ehdot (1) ja (2). Ehdon (1) nojalla S on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(S, +)$ ja $(S, \cdot)$ vakaa osajoukko. Siis $+$ ja $\cdot$ indusoivat laskutoimitukset joukkoon S. Molemmat laskutoimitukset ovat assosiatiivisia, koska ne ovat assosiatiivisia renkaassa R, jonka osajoukko S on. Samasta syystä $+$ on kommutatiivinen ja $\cdot$ on distributiivinen yhteenlaskun suhteen. Oletusten (1) ja (2) ja Proposition 3.9(2) nojalla $1_R = (-1_R)(-1_R) \in R$. Siis laskutoimituksella varustetussa joukossa $(S, \cdot)$ on neutraalialkio.

Olkoon $s \in S$. Oletusten (1) ja (2) nojalla $(-1_R)s \in S$ ja pätee $s + (-1_R)s = 0_R = 0_S$, joten alkiolla $s \in (S, +)$ on vasta-alkio $-s = (-1_R)s \in S$. Samalla näimme myös, että $0_R \in S$, joten $(S, +)$ on kommutatiivinen ryhmä. Siis S on rengas, jolle pätee $1_S = 1_R$.

3. Osoita, että

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right\}$$

on rengas, joka ei ole kommutatiivinen. Montako alkiota renkaassa Y on? Millä renkaan Y alkioilla on käänteisalkio kertolaskun suhteen?

Ratkaisu. Olkoot

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Tällöin
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
ja
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,. \tag{1}$$
Lisäksi
$$-1_{\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = 1_{\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Y\,,$$
joten alirengastestin nojalla Y on alirengas ja siis rengas.

Esimerkin 3.7 lasku osoittaa, että Y ei ole kommutatiivinen, sillä
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Y\,.$$

Renkaassa Y on 8 alkiota, koska jokaiselle paikalle voidaan valita alkio 2 eri tavalla.

Yhtälön (1) nojalla matriisi $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ on kääntyvä vain, jos $a_1 = c_1 = 1$. Ainoat mahdolliset kääntyvät matriisit ovat siis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, joka on neutraalialkiona oma käänteisalkionsa, ja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, jolle pätee
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
joten täsmälleen kahdella alkiolla on käänteisalkio.

4. Osoita, että Esimerkin 3.16(b) rengas C on isomorfinen kompleksilukujen renkaan $\mathbb{C}$ kanssa. Mikä renkaan C kuvaus vastaa kompleksikonjugointia?

Ratkaisu. Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to C$,
$$f(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z & \mathrm{Im}\, z \\ -\mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{pmatrix}.$$

Tällöin
$$\begin{aligned} f(z+w) &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(z+w) & \mathrm{Im}(z+w) \\ -\mathrm{Im}(z+w) & \mathrm{Re}\,(z+w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z & \mathrm{Im}\, z \\ -\mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, w & \mathrm{Im}\, w \\ -\mathrm{Im}\, w & \mathrm{Re}\, w \end{pmatrix} = f(z) + f(w) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f(zw) &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(zw) & \mathrm{Im}(zw) \\ -\mathrm{Im}(zw) & \mathrm{Re}\,(zw) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z\, \mathrm{Re}\, w - \mathrm{Im}\, z\, \mathrm{Im}\, w & \mathrm{Re}\, z\, \mathrm{Im}\, w + \mathrm{Im}\, z\, \mathrm{Re}\, w \\ -(\mathrm{Re}\, z\, \mathrm{Im}\, w + \mathrm{Im}\, z\, \mathrm{Re}\, w) & \mathrm{Re}\, z\, \mathrm{Re}\, w - \mathrm{Im}\, z\, \mathrm{Im}\, w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z & \mathrm{Im}\, z \\ -\mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, w & \mathrm{Im}\, w \\ -\mathrm{Im}\, w & \mathrm{Re}\, w \end{pmatrix} = f(z)f(w)\,. \end{aligned}$$

Lisäksi $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_C$, joten f on rengashomomorfismi.

Homomorfismin f ydin on $\{0_{\mathbb{C}}\}$, joten f on injektio. Se on surjektio, koska

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = f(x+iy)$$

kaikille $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in C$.

Lasku osoittaa, että

$$f(\overline{z}) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} = {}^{T}\!f(z)\,.$$

Siis transpoosin muodostaminen vastaa kompleksikonjugointia.

5. Ovatko funktiorenkaat $\mathscr{F}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ ja $\mathscr{F}\big([0,2],\mathbb{R}\big)$ isomorfisia?

Ratkaisu. Määritellään kuvaus $\Phi\colon \mathscr{F}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \to \mathscr{F}\big([0,2],\mathbb{R}\big)$ asettamalla

$$\Phi(f)(t) = f\left(\frac{t}{2}\right).$$

Kuvaus Φ on bijektio, koska sillä on käänteiskuvaus, jonka lauseke on $\Phi^{-1}(g)(s) = g(2s)$.

Jos $f_1, f_2 \in \mathscr{F}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, niin

$$\Phi(f_1+f_2)(t) = (f_1+f_2)\left(\frac{t}{2}\right) = f_1\left(\frac{t}{2}\right)+f_2\left(\frac{t}{2}\right) = \Phi(f_1)(t)+\Phi(f_2)(t) = \big(\Phi(f_1)+\Phi(f_2)\big)(t)$$

kaikilla $t \in [0,2]$, joten $\Phi(f_1+f_2) = \Phi(f_1)+\Phi(f_2)$. Vastaavasti

$$\Phi(f_1f_2)(t) = (f_1f_2)\left(\frac{t}{2}\right) = f_1\left(\frac{t}{2}\right)f_2\left(\frac{t}{2}\right) = \Phi(f_1)(t)\Phi(f_2)(t) = \big(\Phi(f_1)\Phi(f_2)\big)(t)$$

kaikilla $t \in [0,2]$, joten $\Phi(f_1f_2) = \Phi(f_1)\Phi(f_2)$. Lisäksi

$$\Phi(\underline{1}_{[0,1]})(t) = \underline{1}\left(\frac{t}{2}\right) = 1 = \underline{1}_{[0,2]}(t)$$

kaikilla $t \in [0,2]$, joten $\Phi(\underline{1}_{[0,1]}) = \underline{1}_{[0,2]}$. Siis $\mathscr{F}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ ja $\mathscr{F}\big([0,2],\mathbb{R}\big)$ ovat rengasisomorfisia.

6. Todista Propositio 3.24(2).

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in \phi^{-1}(S')$. Tällöin $\phi(x), \phi(y) \in S'$. Siis

$$\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y) \in S' \quad \text{ja} \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \in S'\,,$$

koska ϕ on rengasisomorfismi ja S' on renkaan R' alirengas. Siis $x+y, xy \in \phi^{-1}(S')$.

Lemman 3.18 nojalla $\phi(-1_R) = -1_{R'}$. Koska S' on renkaan R' alirengas, pätee $-1_{R'} \in S'$. Siis $-1_R \in \phi^{-1}(S')$. Alirengastestin[1] nojalla $\phi^{-1}(S')$ on renkaan S alirengas.

7. Osoita, että renkaalla $\mathbb{Z}$ ei ole muita alirenkaita kuin $\mathbb{Z}$.

[1] Propositio 3.15

Ratkaisu. Olkoon S renkaan $\mathbb{Z}$ alirengas. Määritelmän mukaan $1 \in S$, Lemman 3.14 nojalla $0 \in S$ ja esimerkiksi alirengastestin nojalla $-1 \in S$. Alirenkaana S on vakaa yhteenlaskun suhteen, joten kaikki lukujen 1 ja -1 monikerrat kuuluvat alirenkaaseen S. Siis $\mathbb{Z} \subset S$, joten $S = \mathbb{Z}$.

8. Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Osoita, että ei ole rengashomomorfismia jäännösluokkarenkaalta $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ renkaaseen $\mathbb{Z}$.

Ratkaisu. Jos olisi rengashomomorfismi $\phi\colon \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, niin Proposition 3.24(1) nojalla $\phi(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ olisi renkaan $\mathbb{Z}$ alirengas. Tehtävän 7 nojalla siis $\phi(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ mutta tämä on mahdotonta, koska $\phi(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ on äärellinen joukko.

Ratkaisu (Toinen tapa)**.** Oletetaan, että $\phi\colon \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ on rengashomomorfismi. Tällöin $\phi(1 + q\mathbb{Z}) = 1$ ja Lemman 3.18 nojalla $\phi(0 + q\mathbb{Z}) = 0$. Siis

$$\begin{aligned}0 = \phi(0 + q\mathbb{Z}) = \phi(q(1 + q\mathbb{Z})) &= \phi((1 + q\mathbb{Z}) + (1 + q\mathbb{Z}) + \cdots + (1 + q\mathbb{Z})) \\ &= \phi(1 + q\mathbb{Z}) + \phi(1 + q\mathbb{Z}) + \cdots + \phi(1 + q\mathbb{Z}) = 1 + 1 + \cdots + 1 = q\,,\end{aligned}$$

mikä on ristiriita.