Renkaat ja kunnat 2025

Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Olkoon X joukko. Onko joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitus $\cap$ distributiivinen laskutoimituksen $\cup$ suhteen? Onko laskutoimitus $\cup$ distributiivinen laskutoimituksen $\cap$ suhteen?

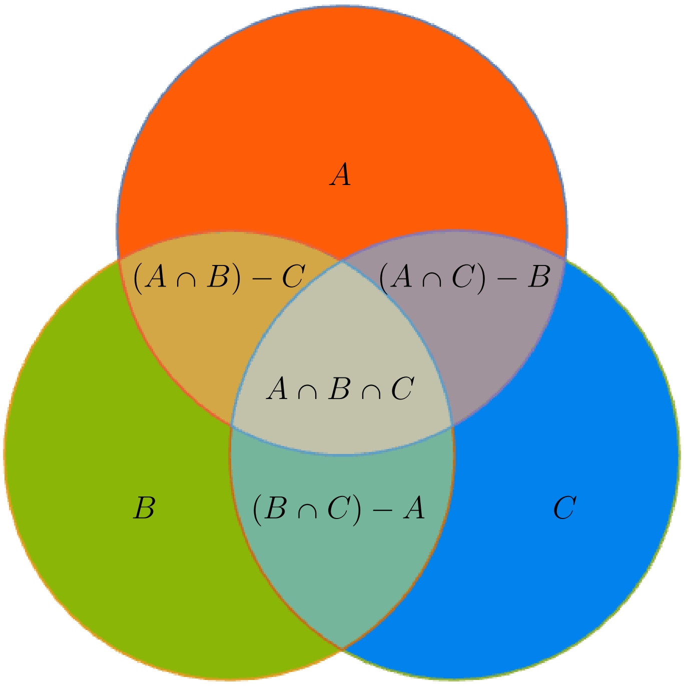
Ratkaisu. Joukkojen leikkaus ja yhdiste ovat potenssijoukon $\mathscr{P}(X)$ kommutatiivisia laskutoimituksia. Olkoot $A, B, C \in \mathscr{P}(X)$. Joukko-opin alkeista tiedämme, että

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ja

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,$$

joten molemmat väitteet pitävät paikkansa.



Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *vektoritulo* eli *ristitulo* on laskutoimitus, joka määritellään asettamalla kaikille $a = (a_1, a_2, a_3)$ ja $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b = \left(\det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right).$$

2. Osoita, että

(a) $\times$ on *antikommutatiivinen*: $b \times a = -a \times b$ kaikille $a, b \in \mathbb{R}^3$.

(b) $\times$ on distributiivinen vektorien yhteenlaskun suhteen.

(c) $\times$ ei ole assosiatiivinen.

Ratkaisu. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

(a) Lasku osoittaa

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= -(b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1ba_2 - b_2a_1) = -b \times a\,. \end{aligned}$$

(b) Lasku osoittaa

$$\begin{aligned} a \times (b+c) &= (a_2(b_3+c_3) - a_3(b_2+c_2), a_3(b_1+c_1) - a_1(b_3+c_3), a_1(b_2+c_2) - a_2(b_1+c_1)) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &\quad + (a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1) = a \times b + a \times c\,. \end{aligned}$$

Kohdan (a) nojalla

$$(b+c) \times a = -a \times (b+c) = -(a \times b + a \times c) = -a \times b - a \times c = b \times a + b \times c = (b+c) \times a\,.$$

(c) Lasku osoittaa, että

$$\big((1,0,0) \times (1,0,0)\big) \times (0,1,0) = (0,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,0)$$

ja

$$(1,0,0) \times \big((1,0,0) \times (0,1,0)\big) = (1,0,0) \times (0,0,1) = (0,-1,0)\,.$$

Siis

$$\big((1,0,0) \times (1,0,0)\big) \times (0,1,0) \neq (1,0,0) \times \big((1,0,0) \times (0,1,0)\big)\,.$$

3. Todista Lemma 1.23(1): Kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia. Yhteenlaskun neutraalialkio on $0 = (0,0)$ ja kertolaskun neutraalialkio on $1 = (1,0)$. Kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen

Ratkaisu. Kompleksilukujen yhteenlasku on sama kuin tason $\mathbb{R}^2$ vektoreiden komponenteittainen yhteenlasku. Sen assosiatiivisuus ja kommutatiivisuus nähdään helposti: Olkoot $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{C}$. Tällöin määritelmän, reaalilukujen yhteenlaskun assosiatiivisuuden ja määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \big((x_1,y_1) + (x_2,y_2)\big) + (x_3,y_3) &= (x_1+x_2, y_1+y_2) + (x_3,y_3) \\ &= \big((x_1+x_2)+x_3, (y_1+y_2)+y_3\big) \\ &= \big(x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3)\big) \\ &= (x_1,y_1) + (x_2+x_3, y_2+y_3) \\ &= (x_1,y_1) + \big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)\,, \end{aligned}$$

joten yhteen lasku on assosiatiivinen. Se on myös kommutatiivinen, sillä

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_2+x_1, y_2+y_1) = (x_2,y_2) + (x_1,y_1)\,.$$

Selvästi $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ on yhteenlaskun neutraalialkio ja $(x,y) + (-x,-y) = 0$ kaikille $(x,y) \in \mathbb{C}$.

Laskemalla

$$\begin{aligned} \big((x_1,y_1)(x_2,y_2)\big)(x_3,y_3) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)(x_3,y_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}(x_1, y_1)\big((x_2, y_2)(x_3, y_3)\big) &= (x_1, y_1)(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3)\\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)\end{aligned}$$

havaitsemme, että kertolasku on assosiatiivinen. Lisäksi

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) = ((x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) = (x_2, y_2)(x_1, y_1)\,,$$

joten kertolasku on kommutatiivinen ja

$$(1, 0)(x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + 0 \cdot x) = (x, y)\,,$$

joten $(1, 0)$ on kertolaskun neutraalialkio.

Osoitimme, että kertolasku on kommutatiivinen, joten distributiivisuus riittää tarkastaa toiselta puolelta:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1)\big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= \big(x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)\big)\\ &= \big((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)\big)\\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3)\\ &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3)\,.\end{aligned}$$

4. Todista Lemma 1.23(2): Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Tällöin $zw = 0$, jos ja vain jos $z = 0$ tai $w = 0$.

Ratkaisu. Kertolaskun määritelmän nojalla $(0, 0)(x, y) = (0, 0) = (x, y)(0, 0)$.

Olkoot $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$. Tällöin $zw = (ac - bd) + i(ad + bc) = 0$, jos ja vain jos

$$\begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö luvulla c ja toinen luvulla d. Laskemalla näin saatavat yhtälöt yhteen saadaan $a(c^2 + d^2) = 0$. Jos $c^2 + d^2 = 0$, niin $w = c + id = 0$. Muutoin täytyy olla $a = 0$. Tällöin yhtälöpari (1) on

$$\begin{cases} bd = 0 \\ bc = 0 \end{cases} . \tag{2}$$

Siis $b = 0$ tai $c = d = 0$. Jos $b = 0$, niin $z = a + ib = 0$. Muuten yhtälöparin (2) molemmat yhtälöt voidaan jakaa luvulla b ja saadaan $c = 0 = d$. Tällöin $w = c + id = 0$.

5. Muodosta yhteen- ja kertolaskun laskutaulut kongruenssiluokilla modulo 3 ja modulo 9.

Ratkaisu.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

.

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

6. Olkoon R rengas. Osoita, että

(1) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ kaikilla $x, y \in R$,

(2) $x(y - z) = xy - xz$ ja $(y - z)x = yx - zx$ kaikilla $x, y, z \in R$.

Ratkaisu. (1) Olkoot $x, y \in R$. Distributiivisuuden ja Proposition 3.9(1) nojalla

$$xy + x(-y) = x(y - y) = x\,0 = 0\,.$$

Koska yhteenlasku on kommutatiivinen, tästä seuraa $x(-y) = -(xy)$. Samalla tavalla nähdään, että

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0\,y = 0\,,$$

joten $(-x)y = -(xy)$.
(2) Olkoot $x, y, z \in R$. Distributiivisuuden ja kohdan (1) nojalla

$$x(y - z) = xy + x(-z) = xy - xz$$

ja

$$(y - z)x = yx + (-z)x = yx - zx\,.$$

7. Todista Propositio 3.11(2).

Ratkaisu. Jos $r \in R$ on alkio, jolle pätee $r\,0 = 1$, niin Proposition 3.9(1) nojalla

$$0 = r\,0 = 1\,.$$

Tämä on mahdotonta Proposition 3.11(1) nojalla.

8. Olkoon $(R, \oplus, \cdot)$ kahdella laskutoimituksella varustettu joukko siten, että $\oplus$ ja $\cdot$ ovat assosiatiivisia ja

(1) $(R, \oplus)$ on ryhmä,

(2) kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen ja

(3) kertolaskulla on neutraalialkio $1 = 1_R \in R$.

Osoita, että $(R, \oplus, \cdot)$ on rengas.

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in R$. Tällöin distributiivisuuden ja assosiatiivisuuden nojalla[1]

$$(1 \oplus 1)(x \oplus y) = (1 \oplus 1)x \oplus (1 \oplus 1)y = (1x \oplus 1x) \oplus (1y \oplus 1y) = x \oplus \big((x \oplus y) \oplus y\big)$$

ja toisaalta

$$(1 \oplus 1)(x \oplus y) = 1(x \oplus y) \oplus 1(x \oplus y) = x \oplus \big((y \oplus x) \oplus y\big) .$$

Yhtälöstä

$$x \oplus \big((x \oplus y) \oplus y\big) = x \oplus \big((y \oplus x) \oplus y\big)$$

saadaan käyttämällä kahdesti supistussääntöä $x \oplus y = y \oplus x$. Siis yhteenlasku on kommutatiivinen, joten R on rengas.

[1] Assosiatiivisuuden nojalla $(a + b) + (c + d) = a + (b + (c + d)) = a + ((b + c) + d)$