Renkaat ja kunnat 2025

Harjoitus 1: ratkaisuja

1. Olkoon
$$\Gamma = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$
Osoita, että matriisien kertolasku indusoi laskutoimituksen joukossa Γ. Miten matriisien yhteenlasku käyttäytyy?

Ratkaisu. Olkoot $A, B \in \Gamma$. Lineaarialgebrasta muistamme, että
$$\det(AB) = \det A \, \det B = 1 \cdot 1 = 1\,,$$
joten $AB \in \Gamma$. Siis Γ on vakaa, joten kertolasku indusoi siihen laskutoimituksen.

Toisaalta $I_2 \in \Gamma$, mutta $\det(I_2 + I_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 1$, joten Γ ei ole vakaa yhteenlaskun suhteen.

2. Osoita, että
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$
on matriisien kertolaskulla varustetun joukon $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ vakaa osajoukko.

Osoita, että laskutoimituksella varustettu joukko $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ on isomorfinen matriisien kertolaskulla varustetun joukon $(A, \cdot)$ kanssa.

Ratkaisu. Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Tällöin
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1/a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1/(a_1 a_2) \end{pmatrix} \in A\,.$$
Siis A on vakaa.

Olkoon $\phi \colon \mathbb{R}^\times \to A$ kuvaus $\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$. Tällöin
$$\phi(a_1 a_2) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1/(a_1 a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1/a_2 \end{pmatrix} = \phi(a_1)\phi(a_2)\,,$$
joten ϕ on homomorfismi. Homomorfismi ϕ on surjektio, sillä määritelmänsä mukaan
$$A = \{\phi(a) : a \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \phi(\mathbb{R}^\times)\,.$$
Jos $\phi(a_1) = \phi(a_2)$, niin matriisien $\phi(a_1)$ ja $\phi(a_2)$ kertoimet ovat samat, joten erityisesti $a_1 = a_2$. Siis ϕ on injektio. Siis ϕ on isomorfismi.

3. Olkoot $f \colon (A, *) \to (B, \circledast)$ ja $g \colon (B, \circledast) \to (C, \cdot)$ laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismeja. Osoita, että $g \circ f$ on homomorfismi.

Ratkaisu. Olkoot $a_1, a_2 \in A$. Tällöin yhdistetyn kuvauksen määritelmän, kuvauksen f homomorfisuuden, kuvauksen g homomorfisuuden ja yhdistetyn kuvauksen määritelmän nojalla
$$g \circ f(a_1 * a_2) = g(f(a_1 * a_2)) = g(f(a_1) \circledast f(a_2)) = g(f(a_1)) \cdot g(f(a_2)) = g \circ f(a_1) \cdot g \circ f(a_2)\,.$$
Siis $g \circ f$ on homomorfismi.

4. Ovatko laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathscr{P}(\{0,1\}),\cap)$ ja $(\mathscr{P}(\{0,1\}),\cup)$ isomorfisia?

Ratkaisu. Olkoon $F\colon (\mathscr{P}(\{0,1\}),\cap) \to (\mathscr{P}(\{0,1\}),\cup)$, $F(A) = \{0,1\} - A$. Kuvaus F on bijektio, koska $A = B$, jos ja vain jos $\{0,1\} - A = \{0,1\} - B$. De Morganin lain nojalla

$$F(A \cap B) = \{0,1\} - (A \cap B) = \big(\{0,1\} - A\big) \cup \big(\{0,1\} - B\big) = F(A) \cup F(B)\,.$$

joten F on homomorfismi. Siis F on isomorfismi.

Saman voi havaita järjestelemällä luentojen Esimerkin 1.4 oikeanpuoleisen laskutaulun alkiot samaan järjestykseen, jossa niiden alkukuvat ovat vasemmanpuoleisessa laskutaulussa:

$\cap$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{0\}$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\varnothing$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{0,1\}$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$

ja

$\cup$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\varnothing$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$
$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\varnothing$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\varnothing$

.

Huomaamme, että laskutoimituksien tulokset oikeanpuoleisessa taulukossa ovat vastaavalla paikalla vasemmanpuoleisessa taulukossa olevien alkioiden kuvat.

5. Olkoon $*$ kahden alkion joukon $X = \{a, b\}$ laskutoimitus, jonka laskutaulu on

$*$	a	b
a	b	b
b	a	a

.

Onko laskutoimitus $*$ kommutatiivinen? Onko se assosiatiivinen?

Ratkaisu. Laskutaulusta näemme, että $a * b = b \neq a = b * a$, joten laskutoimitus ei ole kommutatiivinen. Lisäksi $a * (a * a) = a * b = b \neq a = b * a = (a * a) * a$, joten laskutoimitus ei ole myöskään assosiatiivinen.

6. Olkoot $(E, *)$ ja $(E', \circledast)$ laskutoimituksella varustettuja joukkoja ja olkoon $*$ assosiatiivinen. Olkoon $h\colon (E, *) \to (E', \circledast)$ surjektiivinen homomorfismi. Osoita, että $\circledast$ on assosiatiivinen.

Ratkaisu. Olkoot $a', b', c' \in E'$. Koska f on surjektio, on $a, b, c \in E$, joille $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ ja $f(c) = c'$. Käyttämällä kahdesti kuvauksen f homomorfisuutta, sitten laskutoimituksen $*$ assosiatiivisuutta ja taas kahdesti kuvauksen f homomorfisuutta saamme yhtälöketjun

$$\begin{aligned}(a' \circledast b') \circledast c' &= (f(a) \circledast f(b)) \circledast f(c) = f(a * b) \circledast f(c) = f((a * b) * c) = f(a * (b * c)) \\ &= f(a) \circledast f(b * c) = f(a) \circledast (f(b) \circledast f(c)) = a' \circledast (b' \circledast c')\,.\end{aligned}$$

Siis laskutoimitus $\circledast$ on assosiatiivinen.

7. Olkoon $*$ rationaalilukujen laskutoimitus, joka määritellään asettamalla

$$a * b = \frac{a + b}{2}.$$

Onko laskutoimitus $*$ assosiatiivinen? Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkio?

Ratkaisu. Laskutoimitus $*$ ei ole assosiatiivinen: Esimerkikksi

$$(0 * 0) * 1 = \frac{\frac{0+0}{2} + 1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \frac{0 + \frac{0+1}{2}}{2} = 0 * (0 * 1)\,.$$

Laskutoimituksella $*$ ei ole neutraalialkiota: Jos $n \in \mathbb{Q}$ on neutraalialkio ja $a \in \mathbb{Q}$, niin $a = n * a = \frac{n+a}{2}$, joten $n = a$, mutta tämä ei voi päteä kaikille $a \in \mathbb{Q}$.

8. Todista Propositio 1.20: Olkoon $X \neq \varnothing$ ja olkoon $*$ joukon X assosiatiivinen laskutoimitus. Jos alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, se on yksikäsitteinen.

Ratkaisu. Olkoon $g \in (X, *)$ alkio, jolla on käänteisalkio. Tällöin laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio $e \in (X, *)$. Jos $a, a' \in X$ ovat alkion g käänteisalkioita, niin $a * g = e = g * a'$. Tällöin assosiatiivisuuden nojalla

$$a = a * e = a * (g * a') = (a * g) * a' = e * a' = a'\,.$$