Renkaat ja kunnat 2021

Harjoitus 5: ratkaisuja

1. (1) Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoon $u \in K^\times$ ja olkoon $a \in K$. Osoita, että $a \in K^\times$, jos $a \mid u$.
(2) Olkoon K kokonaisalue. Jos $a \mid b$ ja $b \mid a$, niin $a = ub$ jollain $u \in K^\times$.

Ratkaisu. (1) Olkoon $u \in K^\times$ ja olkoot $a, b \in K$ siten, että $u = ab$. Kertolaskun assosiatiivisuuden nojalla
$$a(bu^{-1}) = (ab)u^{-1} = uu^{-1} = 1\,,$$
joten a on yksikkö.
(2) Olkoot $a, b, c, d \in K$ siten, että $b = ac$ ja $a = bd$. Tällöin $a = (ac)d = a(cd)$. Jos $a \neq 0$, niin supistussäännön nojalla saadaan $cd = 1$, joten c ja d ovat yksiköitä. Jos taas $a = 0$, niin $b = ac = 0$, joten mille tahansa yksikölle u pätee $a = 0 = u0 = ub$.

2. Osoita, että $\mathbb{Z}[i]$ on kokonaisalue. Osoita, että $1 + i$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Z}[i]$.

Ratkaisu. Renkaan $\mathbb{Z}[i]$ alkiot ovat kompleksilukuja. Jos renkaassa $\mathbb{Z}[i]$ olisi nollan jakaja, niin se olisi nollan jakaja kompleksilukujen kunnassa. Seurauksen 5.5 nojalla tämä on mahdotonta.

Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ siten, että $ab = 1 + i$. Koska $\mathbf{n}$ on homomorfismi kertolaskulle, saamme yhtälön $\mathbf{n}(a)\mathbf{n}(b) = \mathbf{n}(1+i) = 2$ kokonaislukujen renkaassa. Koska 2 on alkuluku, saamme $\mathbf{n}(a) = 1$ tai $\mathbf{n}(b) = 1$. Jos $1 = \mathbf{n}(a) = a\overline{a}$, niin a on yksikkö. Siis $1 + i$ on jaoton.

3. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ yksiköt ja nollan jakajat.

Ratkaisu. Proposition 5.16 nojalla $a + 14\mathbb{Z}$ on yksikkö, jos ja vain jos $\mathrm{syt}(a, 14) = 1$. Tämä pätee, kun $a \in \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$. Muut nollasta poikkeavat alkiot $2, 4, 6, 7, 8, 10, 12$ ovat nollan jakajia.

Renkaan R alkio x on *idempotentti*, jos $x^2 = x$.

4. Osoita, että kokonaisalueen K ainoat idempotentit alkiot ovat 0 ja 1.

Ratkaisu. Jos $x^2 = x$, niin assosiatiivisuuden nojalla saadaan $x(x - 1) = x^2 - x = 0$. Koska K on kokonaisalue pätee $x = 0$ tai $x = 1$.

5. Määritä polynomien $X^2+X+1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, $X^2+X+1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ja $X^3+2X+1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ juuret.

Ratkaisu. $0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ja $1^2 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, joten polynomilla $X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ ei ole juuria.

$0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $1^2 + 1 + 1 = 0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ja $2^2 + 2 + 1 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, joten $1 + 3\mathbb{Z}$ on polynomin $X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ainoa juuri.

$0^3 + 2\,0 + 1 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $1^3 + 2 + 1 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ja $2^3 + 2\,2 + 1 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, joten polynomilla $X^3 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ei ole juuria.

6. Osoita, että $1 + 2\mathbb{Z}$ on polynomin $P(X) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ juuri, jos ja vain jos polynomilla $P(X)$ on parillinen määrä nollasta poikkeavia kertoimia.

Ratkaisu. Olkoon $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, missä $a_k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$. Olkoon

$$m = \#\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n \text{ ja } a_k = 1\}.$$

Kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $(1 + 2\mathbb{Z})^k = 1 + 2\mathbb{Z}$, joten

$$P(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k = m + 2\mathbb{Z} = 0 + 2\mathbb{Z}\,,$$

jos ja vain jos m on parillinen.

7. Todista Propositio 6.5.

Ratkaisu. Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoot $P(X), Q(X) \in K[X]$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{ja} \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k\,.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fun}(P(X) + Q(X))(c) &= \mathrm{Fun}\Big(\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k\Big)(c) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) c^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k c^k + \sum_{k=0}^{n} b_k c^k = \mathrm{Fun}(P(X))(c) + \mathrm{Fun}(Q(X))(c) \\
&= (\mathrm{Fun}(P(X)) + \mathrm{Fun}(Q(X)))(c)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fun}(P(X)Q(X))(c) &= \mathrm{Fun}\Big(\sum_{k=0}^{2n} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big) X^k\Big)(c) = \mathrm{Fun}\Big(\sum_{k=0}^{2n} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big) c^k\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k c^k \sum_{k=0}^{n} b_k c^k = \mathrm{Fun}(P(X))(c)\,\mathrm{Fun}(Q(X))(c) \\
&= (\mathrm{Fun}(P(X))\,\mathrm{Fun}(Q(X)))(c)
\end{aligned}$$

kaikille $c \in K$. Lisäksi vakiopolynomi $1_{K[X]}$, $1_{K[X]} = 1_K X^0$, kuvautuu vakiokuvaukseksi $1_{\mathscr{F}(K,K)} \colon K \to K$, koska

$$\mathrm{Fun}(1_{K[X]})(c) = \mathrm{Fun}(1_K X^0)(c) = 1_K c^0 = 1_K = 1_{\mathscr{F}(K,K)}(c)$$

kaikilla $c \in K$. Siis Fun on rengashomomorfismi.

8. Laske $(4X + 1)(X^3 + 2X + 3)$ polynomirenkaissa $\mathbb{Z}[X]$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ ja $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

Ratkaisu. Kokonaislukukertoimisena polynomina

$$(4X + 1)(X^3 + 2X + 3) = 4X^4 + X^3 + 8X^2 + 14X + 3\,,$$

joten renkaassa $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ pätee

$$(4X + 1)(X^3 + 2X + 3) = 4X^4 + X^3 + 3X^2 + 4X + 3$$

ja renkaassa $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ pätee

$$(4X + 1)(X^3 + 2X + 3) = 4X^4 + X^3 + X^2 + 3\,.$$