Renkaat ja kunnat 2021

Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Olkoon $*$ kahden alkion joukon $X = \{a, b\}$ laskutoimitus, jonka laskutaulu on

$$\begin{array}{c|cc} * & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & a \end{array} \quad .$$

Onko laskutoimitus $*$ skommutatiivinen? Onko se assosiatiivinen?

Ratkaisu. Laskutaulusta näemme, että $a * b = b \neq a = b * a$, joten laakutoimitus ei ole kommutatiivinen. Lisäksi $a * (a * a) = a * b = b \neq a = b * a = (a * a) * a$, joten laskutoimitus ei ole myöskään assosiatiivinen.

2. Olkoon X joukko. Onko potenssijoukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimituksilla $\cap$ ja $\cup$ neutraalialkiot? Onko jokaisella $A \in \mathscr{P}(X)$ käänteisalkiot laskutoimitusten $\cap$ ja $\cup$ suhteen?

Ratkaisu. Molemmilla laskutoimituksilla on neutraalialkio: Alkio $X \in \mathscr{P}(X)$ on laskutoimituksen $\cap$ neutraalialkio, sillä $X \cap A = A = A \cap X$ kaikille $A \in \mathscr{P}(X)$ ja $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$ on laskutoimituksen $\cup$ neutraalialkio, sillä $\varnothing \cup A = A = A \cup \varnothing$ kaikille $A \in \mathscr{P}(X)$.

Ainoastaan alkiolla $X \in (\mathscr{P}(X), \cap)$ on käänteisalkio: Jos $A \cap B = X$, niin $X \subset A$ ja $X \subset B$. Tämä pätee vain, kun $A = B = X$. Ainoastaan alkiolla $\varnothing \in (\mathscr{P}(X), \cup)$ on käänteisalkio: Jos $A \cup B = \varnothing$, niin $A \subset \varnothing$ ja $B \subset \varnothing$. Tämä pätee vain, kun $A = B = \varnothing$.

3. Todista Lemma 1.22(2).

Ratkaisu. Olkoot $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$. Tällöin $zw = (ac - bd) + i(ad + bc) = 0$, jos ja vain jos

$$\begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \quad . \tag{1}$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö luvulla c ja toinen luvulla d. Laskemalla näin saatavat yhtälöt yhteen saadaan $a(c^2 + d^2) = 0$. Jos $c^2 + d^2 = 0$, niin $w = c + id = 0$. Muutoin täytyy olla $a = 0$. Tällöin yhtälöpari (1) on

$$\begin{cases} bd = 0 \\ bc = 0 \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Siis $b = 0$ tai $c = d = 0$. Jos $b = 0$, niin $z = a + ib = 0$. Muuten yhtälöparin (2) molemmat yhtälöt voidaan jakaa luvulla b ja saadaan $c = 0 = d$. Tällöin $w = c + id = 0$.

4. Osoita, että kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ ja $\mathbf{n}(\bar{z}) = \mathbf{n}(z)$.

Ratkaisu. Olkoot $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{z}} &= \overline{(\bar{z})} = \overline{a - ib} = a + ib = z\,,\\
\overline{z + w} &= \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d) = (a - ib) + (b - id) = \bar{z} + \bar{w}\,,\\
\overline{zw} &= (a - ib)(a - id) = (ad - bc) - i(ad + bc) = \bar{z}\bar{w} \text{ ja}\\
\mathbf{n}(\bar{z}) &= \mathbf{n}(a + (-b)i) = a^2 + b^2 = \mathbf{n}(z)\,.
\end{aligned}$$

5. Olkoon R rengas. Osoita, että

(1) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ kaikilla $x, y \in R$,

(2) $x(y - z) = xy - xz$ ja $(y - z)x = yx - zx$ kaikilla $x, y, z \in R$.

Ratkaisu. (1) Olkoot $x, y \in R$. Distributiivisuuden ja Proposition 3.9(1) nojalla

$$xy + x(-y) = x(y - y) = x\,0 = 0\,.$$

Koska yhteenlasku on kommutatiivinen, tästä seuraa $x(-y) = -(xy)$. Samalla tavalla nähdään, että

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0\,y = 0\,,$$

joten $(-x)y = -(xy)$.
(2) Olkoot $x, y, z \in R$. Distributiivisuuden ja kohdan (1) nojalla

$$x(y - z) = xy + x(-z) = xy - xz$$

ja

$$(y - z)x = yx + (-z)x = yx - zx\,.$$

6. Todista Propositio 3.11(2).

Ratkaisu. Jos $r \in R$ on alkio, jolle pätee $r\,0 = 1$, niin Proposition 3.9(1) nojalla

$$0 = r\,0 = 1\,.$$

Tämä on mahdotonta Proposition 3.11(1) nojalla.

7. Olkoon $(R, \oplus, \cdot)$ kahdella laskutoimituksella varustettu joukko siten, että $\oplus$ ja $\cdot$ ovat assosiatiivisia ja

(1) $(R, \oplus)$ on ryhmä,

(2) kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen ja

(3) kertolaskulla on neutraalialkio $1 = 1_R \in R$.

Osoita, että $(R, \oplus, \cdot)$ on rengas.

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in R$. Tällöin distributiivisuuden ja assosiatiivisuuden nojalla[1]

$$(1 \oplus 1)(x \oplus y) = (1 \oplus 1)x \oplus (1 \oplus 1)y = (1x \oplus 1x) \oplus (1y \oplus 1y) = x \oplus \big((x \oplus y) \oplus y\big)$$

[1]Assosiatiivisuuden nojalla $(a + b) + (c + d) = a + (b + (c + d)) = a + ((b + c) + d)$

ja toisaalta

$$(1 \oplus 1)(x \oplus y) = 1(x \oplus y) \oplus 1(x \oplus y) = x \oplus \big((y \oplus x) \oplus y\big)\,.$$

Yhtälöstä $x \oplus \big((x \oplus y) \oplus y\big) = x \oplus \big((y \oplus x) \oplus y\big)$ saadaan käyttämällä kahdesti supistussääntöä $x \oplus y = y \oplus x$. Siis yhteenlasku on kommutatiivinen, joten R on rengas.

8. Todista Propositio 3.15.

Ratkaisu. Olkoon R rengas ja olkoon $S \subset R$ alirengas. Tällöin S on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(S, +)$ ja $(S, \cdot)$ vakaa osajoukko. Siis (1) pätee. Koska jokaisella $s \in (S, +)$ on vasta-alkio, erityisesti tämä pätee alkiolle $1_R = 1_S \in S$. On siis alkio $x \in S \subset R$, jolle pätee $x + 1_R = 0_S = 0_R$. Vasta-alkion yksikäsitteisyyden nojalla $x = -1_R$. Siis ehto (2) pätee.

Oletetaan, että $S \subset R$ on osajoukko, jolle pätee ehdot (1) ja (2). Ehdon (1) nojalla S on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(S, +)$ ja $(S, \cdot)$ vakaa osajoukko. Siis $+$ ja $\cdot$ indusoivat laskutoimitukset joukkoon S. Molemmat laskutoimitukset ovat assosiatiivisia, koska ne ovat assosiatiivisia renkaassa R, jonka osajoukko S on. Samasta syystä $+$ on kommutatiivinen ja $\cdot$ on distributiivinen yhteenlaskun suhteen. Oletusten (1) ja (2) ja Proposition 3.9(2) nojalla $1_R = (-1_R)(-1_R) \in R$. Siis laskutoimituksella varustetussa joukossa $(S, \cdot)$ on neutraalialkio.

Olkoon $s \in S$. Oletusten (1) ja (2) nojalla $(-1_R)s \in S$ ja pätee $s + (-1_R)s = 0_R = 0_S$, joten alkiolla $s \in (S, +)$ on vasta-alkio $-s = (-1_R)s \in S$. Samalla näimme myös, että $0_R \in S$, joten $(S, +)$ on kommutatiivinen ryhmä. Siis S on rengas, jolle pätee $1_S = 1_R$.