Renkaat ja kunnat 2021

Harjoitus 1: ratkaisuja

1. Olkoot $(A, *)$ ja $(C, \circledast)$ laskutoimituksella varustettuja joukkoja ja olkoon $f\colon (A, *) \to (C, \circledast)$ homomorfismi. Osoita:

(a) Jos $B \subset A$ on vakaa, niin $f(B) \subset C$ on vakaa.

(b) Jos $B \subset C$ on vakaa ja $f^{-1}(B)$ ei ole tyhjä joukko, niin $f^{-1}(B) \subset A$ on vakaa.

Ratkaisu. (a) Olkoot $c_1, c_2 \in f(B)$. Tällöin on $b_1, b_2 \in B$, joille $f(b_1) = c_1$ ja $f(b_2) = c_2$. Koska B on vakaa, pätee $b_1 * b_2 \in B$. Siis $f(b_1) \circledast f(b_2) = f(b_1 * b_2) \in f(B)$, koska f on homomorfismi.

(b) Olkoot $a_1, a_2 \in f^{-1}(B)$. Tällöin $f(a_1), f(a_2) \in B$. Koska f on homomorfismi ja B on vakaa, pätee $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \circledast f(a_2) \in B$. Siis $a_1 * a_2 \in f^{-1}(B)$, joten$f^{-1}(B)$ on vakaa.

2. Osoita, että

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

on matriisien kertolaskulla varustetun joukon $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ vakaa osajoukko.

Osoita, että laskutoimituksella varustettu joukko $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ on isomorfinen matriisien kertolaskulla varustetun joukon $(A, \cdot)$ kanssa.

Ratkaisu. Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Tällöin

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1/a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1/(a_1 a_2) \end{pmatrix} \in A\,.$$

Siis A on vakaa.

Olkoon $\phi\colon \mathbb{R}^\times \to A$ kuvaus $\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$. Tällöin

$$\phi(a_1 a_2) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1/(a_1 a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1/a_2 \end{pmatrix} = \phi(a_1)\phi(a_2)\,,$$

joten ϕ on homomorfismi. Homomorfismi ϕ on surjektio, sillä määritelmänsä mukaan

$$A = \{\phi(a) : a \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \phi(\mathbb{R}^\times)\,.$$

Jos $\phi(a_1) = \phi(a_2)$, niin matriisien $\phi(a_1)$ ja $\phi(a_2)$ kertoimet ovat samat, joten erityisesti $a_1 = a_2$. Siis ϕ on injektio. Siis ϕ on isomorfismi.

3. Olkoot $f\colon (A, *) \to (B, \circledast)$ ja $g\colon (B, \circledast) \to (C, \cdot)$ laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismeja. Osoita, että $g \circ f$ on homomorfismi.

Ratkaisu. Olkoot $a_1, a_2 \in A$. Tällöin yhdistetyn kuvauksen määritelmän, kuvauksen f homomorfisuuden, kuvauksen g homomorfisuuden ja yhdistetyn kuvauksen määritelmän nojalla

$$g \circ f(a_1 * a_2) = g(f(a_1 * a_2)) = g(f(a_1) \circledast f(a_2)) = g(f(a_1)) \cdot g(f(a_2)) = g \circ f(a_1) \cdot g \circ f(a_2)\,.$$

Siis $g \circ f$ on homomorfismi.

4. Olkoon $(A,*)$ laskutoimituksella varustettu joukko ja olkoon $\mathrm{Hom}(A,A)$ kaikkien homomorfismien $\phi\colon (A,*) \to (A,*)$ joukko. Osoita, että homomorfismien yhdistäminen on laskutoimitus joukossa $\mathrm{Hom}(A,A)$.

Ratkaisu. Olkoot $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Hom}(A,a)$. Siis $\phi_1, \phi_2\colon A \to A$ ovat homomorfismeja. Tehtävän 3 nojalla $\phi_1 \circ \phi_2\colon A \to A$ on homomorfismi. Siis $\phi_1 \circ \phi_2 \in \mathrm{Hom}(A,A)$, joten kuvaus $(\phi_1\,\phi_2) \mapsto \phi_1 \circ \phi_2$ on joukon $\mathrm{Hom}(A,A)$ laskutoimitus.

5. Olkoot $(E,*)$ ja $(E',\circledast)$ laskutoimituksella varustettuja joukkoja ja olkoon $*$ assosiatiivinen. Olkoon $h\colon (E,*) \to (E',\circledast)$ surjektiivinen homomorfismi. Osoita, että $\circledast$ on assosiatiivinen.

Ratkaisu. Olkoot $a', b', c' \in E'$. Koska f on surjektio, on $a, b, c \in E$, joille $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ ja $f(c) = c'$. Käyttämällä kahdesti kuvauksen f homomorfisuutta, sitten laskutoimituksen $*$ assosiatiivisuutta ja taas kahdesti kuvauksen f homomorfisuutta saamme yhtälöketjun

$$\begin{aligned}(a' \circledast b') \circledast c' &= (f(a) \circledast f(b)) \circledast f(c) = f(a*b) \circledast f(c) = f((a*b)*c) = f(a*(b*c))\\ &= f(a) \circledast f(b*c) = f(a) \circledast (f(b) \circledast f(c)) = a' \circledast (b' \circledast c')\,.\end{aligned}$$

Siis laskutoimitus $\circledast$ on assosiatiivinen.

6. Olkoon $*$ rationaalilukujen laskutoimitus, joka määritellään asettamalla

$$a * b = \frac{a+b}{2}.$$

Onko laskutoimitus $*$ assosiatiivinen? Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkio?

Ratkaisu. Laskutoimitus $*$ ei ole assosiatiivinen: Esimerkikksi

$$(0*0)*1 = \frac{\frac{0+0}{2}+1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \frac{0+\frac{0+1}{2}}{2} = 0*(0*1)\,.$$

Laskutoimituksella $*$ ei ole neutraalialkiota: Jos $n \in \mathbb{Q}$ on neutraalialkio ja $a \in \mathbb{Q}$, niin $a = n * a = \frac{n+a}{2}$, joten $n = a$, mutta tämä ei voi päteä kaikille $a \in \mathbb{Q}$.

7. Todista Propositio 1.19: Olkoon $X \neq \varnothing$ ja olkoon $*$ joukon X assosiatiivinen laskutoimitus. Jos alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, se on yksikäsitteinen.

Ratkaisu. Olkoon $g \in (X,*)$ alkio, jolla on käänteisalkio. Tällöin laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio $e \in (X,*)$. Jos $a, a' \in X$ ovat alkion g käänteisalkioita, niin $a*g = e = g*a'$. Tällöin assosiatiivisuuden nojalla

$$a = a*e = a*(g*a') = (a*g)*a' = e*a' = a'\,.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *vektoritulo* eli *ristitulo* on laskutoimitus, joka määritellään asettamalla kaikille $a = (a_1, a_2, a_3)$ ja $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b = \Big(\det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\Big)\,.$$

8. Osoita, että
(a) $\times$ on *antikommutatiivinen*: $b \times a = -a \times b$ kaikille $a, b \in \mathbb{R}^3$.
(b) $\times$ on distributiivinen vektorien yhteenlaskun suhteen.
(c) $\times$ ei ole assosiatiivinen.

Ratkaisu. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.
(a) Lasku osoittaa

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= -(b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1ba_2 - b_2a_1) = -b \times a\,. \end{aligned}$$

(b) Lasku osoittaa

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= (a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &\quad + (a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1) = a \times b + a \times c\,. \end{aligned}$$

Kohdan (a) nojalla

$$(b+c) \times a = -a \times (b+c) = -(a \times b + a \times c) = -a \times b - a \times c = b \times a + b \times c = (b+c) \times a\,.$$

(c) Lasku osoittaa, että

$$\big((1,0,0) \times (1,0,0)\big) \times (0,1,0) = (0,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,0)$$

ja

$$(1,0,0) \times \big((1,0,0) \times (0,1,0)\big) = (1,0,0) \times (0,0,1) = (0,-1,0)\,.$$

Siis

$$\big((1,0,0) \times (1,0,0)\big) \times (0,1,0) \neq (1,0,0) \times \big((1,0,0) \times (0,1,0)\big)\,.$$