Ryhmät 2021

Harjoitus 7: ratkaisuja

1. Osoita, että $Q_8 \leqslant \mathbb{H}^\times$.

Ratkaisu. Koska $Q_8 \subset \mathbb{H}^\times$ on määritelty luettelemalla 8 alkiota, se ei ole tyhjä joukko ja selvästi Q_8 ei ole koko $\mathbb{H}^\times$. Luvussa 4.3. osoitettiin, että

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \tag{1}$$

ja

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}\,. \tag{2}$$

Siis kaikille $x, y \in Q_8$ pätee $xy \in Q_8$. Lisäksi yhtälöistä (1) seuraa

$$\mathbf{i}(-\mathbf{i}) = (-\mathbf{i})\mathbf{i} = \mathbf{j}(-\mathbf{j}) = (-\mathbf{j})\mathbf{j} = \mathbf{k}(-\mathbf{k}) = (-\mathbf{k})\mathbf{k} = 1\,, \tag{3}$$

joten $x^{-1} \in Q_8$ jokaiselle $x \in Q_8$. Aliryhmätestin nojalla $Q_8 < \mathbb{H}^\times$.

2. (a) Osoita, että ryhmän G keskus $Z(G)$ on normaali aliryhmä.

(b) Osoita, että ryhmän Q_8 kaikki aliryhmät ovat normaaleja.

Ratkaisu. (a) Toisissa harjoituksissa tehdyssä Harjoitustehtävässä 9.6 osoitettiin, että $Z(G) \leqslant G$. Olkoon $g \in G$ ja olkoon $h \in Z(G)$. Keskuksen määritelmän nojalla

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h\,,$$

joten Proposition 12.5 nojalla $Z(G) \trianglelefteqslant G$.

(b) Lagrangen lauseen nojalla mahdolliset aliryhmien kertaluvut ovat 1, 2, 4 ja 8. Ainoastaan alkion -1 kertaluku on 2, se virittää kertaluvun 2 syklisen ryhmän. Alkioiden $\mp\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ ja $\pm\mathbf{k}$ kertaluku on 4, ne virittävät yhteensä kolme kertaluvun 4 syklistä ryhmää. (Esimerkiksi $\langle \mathbf{i} \rangle = \{\mathbf{i}, -1, -\mathbf{i}, 1\} = \langle -\mathbf{i} \rangle$ ja vastaavasti alkioille $\pm\mathbf{j}$ ja $\pm\mathbf{k}$.) Lisäksi kaaviossa ovat triviaalit aliryhmät $\{1\}$ ja Q_8.

$$\begin{tikzcd}
& Q_8 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle \mathbf{i} \rangle \arrow[dr, dash] & \langle \mathbf{j} \rangle \arrow[d, dash] & \langle \mathbf{k} \rangle \arrow[dl, dash] \\
& \langle -1 \rangle \arrow[d, dash] & \\
& \{1\} &
\end{tikzcd}$$

Näimme, että

$$[Q_8 : \langle \mathbf{i} \rangle] = [Q_8 : \langle \mathbf{j} \rangle] = [Q_8 : \langle \mathbf{k} \rangle] = 2\,,$$

joten Proposition 12.3 nojalla $\langle \mathbf{i} \rangle \lhd Q_8$, $\langle \mathbf{j} \rangle \lhd Q_8$ ja $\langle \mathbf{k} \rangle \lhd Q_8$. On helppo tarkastaa, että $\{1, -1\} \leqslant Z(Q_8)$ ja yhtälöt (2) osoittavat, että ryhmän muut alkiot eivät ole keskuksessa. Siis (a)-kohdan nojalla $\{1, -1\} \lhd Q_8$. [1]

[1] Tämän tehtävän voi ratkaista myös tarkastelemalla aliryhmien sivuluokkia tai Proposition 12.5. avulla.

3. Olkoon $H \trianglelefteqslant A_n$ normaali aliryhmä, joka sisältää ainakin yhden 3-syklin. Osoita, että $H = A_n$.

Ratkaisu. Olkoon $(abc) \in H$. Tällöin myös $(acb) = (abc)^2 \in H$, joten molemmat 3-syklit, joissa alkiot a, b ja c esiintyvät ovat aliryhmässä H.

Harjoitustehtävässä 10.14(1) osoitettiin, että $(ab)(cd)(abc)(cd)(ab) = (adb)$. Normaaluden nojalla $(adb) \in H$. Siis mikä tahansa 3-syklissä esiintyvä alkio voidaan vaihtaa konjugoimalla sellaiseen, joka ei siinä esiinny. Toistamalla tätä nähdään, että kaikki 3-syklit ovat aliryhmässä H. Proposition 10.21 nojalla $H = A_n$.

4. Osoita, että A_5 on yksinkertainen ryhmä.

Ratkaisu. Olkoon $N \lhd A_5$, $\#N \geqslant 2$. Harjoitustehtävän 12.5 nojalla riittää osoittaa, että aliryhmässä N on 3-sykli.

Harjoitustehtävän 10.13 nojalla aliryhmässä N on 3-sykli, 5-sykli tai kahden erillisen syklin tulo. Jos $(abcde) \in H$, niin Proposition 10.14 kohtien (2) ja (3) nojalla $N \ni (acb)(abcde)(abc) = (abdec)$ ja siten $N \ni (abcde)(abdec) = (abcde)(acedb) = (adc)$. Jos $(ab)(cd) \in N$, niin Proposition 10.14 kohtien (4) ja (5) nojalla $N \ni (aeb)(ab)(cd)(abe) = (ae)(cd)$ ja siten $N \ni (ab)(cd)(ae)(cd) = (aeb)$.

5. Osoita, että $D_6 \cong S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Ratkaisu. Geometriasta näkee, että $D_3 < D_6$. Kertalukujen perusteella näemme, että $[D_6 : D_3] = 2$, joten Proposition 12.3 nojalla $D_3 \lhd D_6$.

Olkoon $H = \langle -\operatorname{id} \rangle < D_6$. Proposition 12.22 nojalla $D_3 H \leqslant D_6$. Koska $-\operatorname{id} \in D_6 - D_3$, Lagrangen lauseen nojalla pätee $D_6 = D_3 H$. Lisäksi $-\operatorname{id} \in Z(\mathrm{O}(2))$, joten D_6 on alityhmiensä D_2 ja H sisäinen suora tulo. Propositioiden 9.30 ja 8.19 nojalla

$$D_6 = D_3 \times H \cong D_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .$$

6. Osoita, että $\mathrm{E}(n)$ on ryhmä.

Ratkaisu. Aloitamme osoittamalla, että $\mathrm{E}(n) \subset \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$. Tarkastetaan siis, että kuvaukset $E_{A,b}$ ovat bijektioita. Olkoot $A \in \mathrm{O}(n)$ ja $b \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$E_{A,b}(A^{-1}(y-b)) = A(A^{-1}(y-b)) + b = y .$$

Siis $E_{A,b}$ on surjektio. Oletetaan sitten, että $E_{A,b}(x) = E_{A,b}(y)$ joillain $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$Ax + b = Ay + b ,$$

joten $A(x-y) = 0$. Koska $A \in \mathrm{O}(n)$ on kääntyvä, saadaan $x - y = 0$. Siis $E_{A,b}$ on injektio.

Osoitetaan sitten, että $\mathrm{E}(n) \leqslant \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$. Määritelmänsä nojalla $\mathrm{E}(n)$ ei ole tyhjä. Olkoot sitten $E_{A,a}, E_{B,b} \in \mathrm{E}(n)$. Tällöin

$$E_{A,a} \circ E_{B,b}(x) = A(Bx + b) + a = ABx + Ab + a = E_{AB,Ab+a}(x)$$

kaikille $x \in \mathbb{R}^n$, joten

$$E_{A,a} \circ E_{B,b} = E_{AB,Ab+a} \in \mathrm{E}(n) . \tag{4}$$

Yhtälön (4) avulla huomataan, että

$$E_{A,b} \circ E_{A^{-1},-A^{-1}b} = E_{I_n,0} = \mathrm{id}\ .$$

Proposition 8.4(3) nojalla

$$E_{A,b}^{-1} = E_{A^{-1},A^{-1}b} \in \mathrm{E}(n)\,. \tag{5}$$

Aliryhmätestin nojalla $\mathrm{E}(n) \leqslant \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$.

7. Osoita, että $\mathrm{T}(n) \lhd \mathrm{E}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n) \cong \mathrm{O}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$.

Ratkaisu. Olkoon $P_0\colon \mathrm{E}(n) \to \mathrm{O}(n)$, $P_0(E_{A,b}) = A$. Yhtälön (4) nojalla P_0 on homomorfismi. Jokaiselle $A \in \mathrm{O}(n)$ pätee $P_0(E_{A,0}) = A$, joten P_0 on surjektio. Lisäksi

$$\ker P_0 = \{F \in \mathrm{E}(n) : P_0(F) = I_n\} = \{E_{I_n,b} : b \in b\} = \mathrm{T}(n)\,,$$

joten ryhmien isomorfismilauseen nojalla $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n) \cong \mathrm{O}(n)$.

Kuvaus $\phi\colon\ \mathrm{O}(n) \to \mathrm{E}(n)$, $\phi(A) = E_{A,0}$ on homomorfismi yhtälön (4) nojalla. Se on määritelmänsä nojalla injektio, joten ryhmät $\mathrm{O}(n)$ ja $\underline{\mathrm{O}}(n) = \phi(\mathrm{O}(n))$ ovat isomorfisia.

Osoitetaan, että $\mathrm{E}(n)$ on aliryhmiensä $\mathrm{T}(n)$ ja $\underline{\mathrm{O}}(n)$ sisäinen puolisuora tulo. Olkoon $E_{A,b} \in \mathrm{E}(n)$. Tällöin $E_{A,b} = T_b \circ E_{A,0}$, joten $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n)\underline{\mathrm{O}}(n)$ Jos $E_{A,b} \in \underline{\mathrm{O}}(n) \cap \mathrm{T}(n)$, niin $b = 0$ ja $A = I_n$, joten $E_{A,b}$ on identtinen kuvaus. Siis $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \underline{\mathrm{O}}(n)$ sisäisenä puolisuorana tulona, joten $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$ abstraktina puolisuorana tulona.

Huomaa: Aliryhmän $\mathrm{T}(n)$ normaaliuden voi tarkastaa ilman homomorfismin P_0 käyttöäkin, mutta tällöin ei päästä suoraan kiinni tekijäryhmään: Yhtälöistä (4) ja (5) seuraa, että $\mathrm{T}(n) \leqslant \mathrm{E}(n)$. Tämä on toki helppo tarkastaa suoraankin.

Olkoot $A \in \mathrm{O}(n)$ ja $T_b \in \mathrm{T}(n)$. Tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$A \circ T_b \circ A^{-1}(x) = A(A^{-1}(x) + b) = x + Ab = T_{Ab}(x)\,,$$

joten $A \circ T_b \circ A^{-1} = T_{Ab} \in \mathrm{T}(n)$. Siis $\mathrm{T}(n) \lhd \mathrm{E}(n)$.

8. Osoita, että S_n on ryhmien A_n ja $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puolisuora tulo.

Ratkaisu. Esimerkin 12.8(a) nojalla $A_n \lhd S_n$. Olkoon $H = (12)$. Tällöin $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ja $H \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$. Proposition 12.22 nojalla $A_n < A_nH \leqslant S_n$ ja $[S_n : A_n] = 2$, joten $A_nH = S_n$. Siis $S_n = A_n \rtimes H \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.