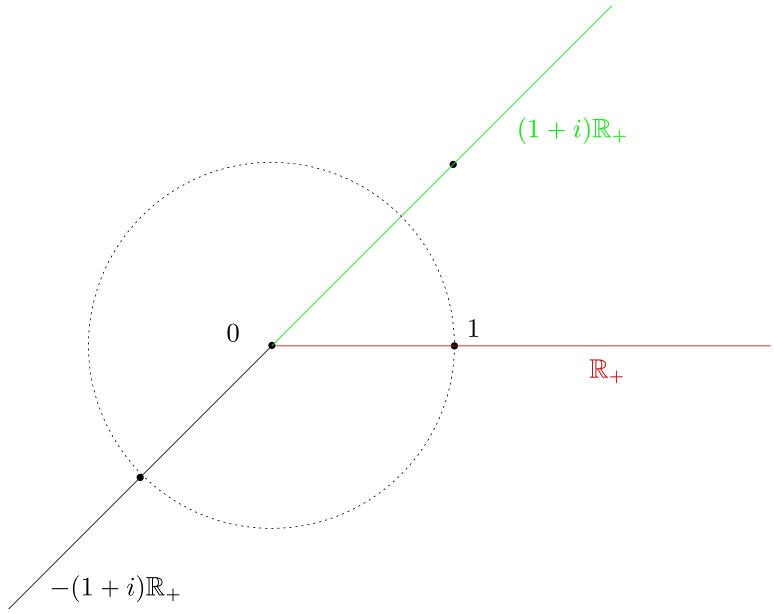
Ryhmät 2021

Harjoitus 5: ratkaisuja

1. Osoita, että $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$ ja määritä aliryhmän $\mathbb{R}_+$ sivuluokat ryhmässä $\mathbb{C}^\times$. Piirrä kuva, joka havainnollistaa sivuluokkien määräämää ositusta.

Ratkaisu. Positiivisten reaalilukujen tulo on positiivinen reaaliluku ja positiivisen reaaliluvun käänteisluku on positiivinen reaaliluku. Aliryhmätestin nojalla siis $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$.

Kompleksiluvun $a \in \mathbb{C}^\times$ sivuluokka $a\mathbb{R}_+ = \{at : t \in \mathbb{R}_+\}$ on luvun a kautta kulkeva puolisuora. Proposition 11.4 mukaan $a\mathbb{R}_+ = b\mathbb{R}_+$, jos ja vain jos $a/b \in \mathbb{R}_+$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että on $t_0 \in \mathbb{R}_+$, jolle $a = bt_0$.



2. Todista Propositio 11.4.

Ratkaisu. (1) Olkoot $x, y \in G$. Oletetaan, että $xH = yH$. Tällöin jokaisella $h \in H$ pätee $xh \in yH$, joten samaan tapaan on $k \in H$ siten, että $xh = yk$. Siis $y^{-1}x = kh^{-1} \in H$.

Oletetaan sitten, että $y^{-1}x \in H$. Olkoon $h \in H$. Tällöin

$$xh = x(x^{-1}yy^{-1}x)h = (xx^{-1})y(y^{-1}x)h = y(y^{-1}xh) \in yH\,,$$

joten $xH \subset yH$. Toisaalta myös $x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in H$, joten

$$yh = y(y^{-1}xx^{-1}y)h = x(x^{-1}yh) \in xH\,.$$

Siis $xH = yH$.

Kohta (2) todistetaan samaan tapaan.

3. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H < G$. Osoita, että kuvaus $b : G/H \to H\backslash G$, $b(aH) = Ha^{-1}$ on bijektio.

Ratkaisu. Proposition 11.4 kohdan (1) nojalla $xH = yH$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$ ja kohdan (2) nojalla $Hx^{-1} = Hy^{-1}$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Siis

$$b(yH) = Hy^{-1} = Hx^{-1} = b(xH)\,, \tag{1}$$

jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Siis kuvaus b on hyvin määritelty.

Edellä tehty lasku (1) osoittaa myös, että b on injektio: Jos $b(yH) = b(xH)$, niin $y^{-1}x \in H$, joten $xH = yH$. Olkoon $Ha \in H\backslash G$. Tällöin $b(a^{-1}H) = Ha$, joten b on surjektio. Siis b on bijektio.

4. Määritä kaikki ryhmien $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ ja $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ aliryhmät.

Ratkaisu. Lagrangen lauseen nojalla ryhmällä $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ voi koko ryhmän $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ja aliryhmän $\{0 + 6\mathbb{Z}\}$ lisäksi olla aliryhmiä, joiden kertaluvut ovat 2 tai 3. Tällaiset aliryhmät ovat syklisiä, koska mahdolliset kertaluvut 2 ja 3 ovat alkulukuja. Ryhmä $\langle 3 + 6\mathbb{Z}\rangle$ on ainoa kahden alkion aliryhmä, sillä $\langle 3 + 6\mathbb{Z}\rangle$ on ainoa alkio, jonka kertaluku on 2. Kertaluvun 3 alkioita on 2, alkiot $2+6\mathbb{Z}$ ja $4+6\mathbb{Z}$, ja ne virittävät saman aliryhmän $\langle 2+6\mathbb{Z}\rangle = \langle 4+6\mathbb{Z}\rangle$.

Lagrangen lauseen nojalla ryhmällä $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ on vain triviaalit aliryhmät $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ja $\{0 + 7\mathbb{Z}\}$, koska 7 on alkuluku.

5. Olkoon G äärellinen ryhmä. Olkoot $K < H < G$. Osoita Lagrangen lauseen avulla, että indekseille pätee:

$$[G : K] = [G : H][H : K]\,.$$

Ratkaisu. Lagrangen lauseen nojalla

$$[G : H][H : K] = \frac{\#G}{\#H}\frac{\#H}{\#K} = \frac{\#G}{\#K} = [G : K]\,.$$

6. Olkoon G ryhmä, jossa on korkeintaan 5 alkiota. Osoita, että G on kommutatiivinen.

Ratkaisu. Kertalukujen 1, 2, 3 ja 5 ryhmät ovat syklisiä Seurauksen 11.14 nojalla. Siis ne ovat kommutatiivisia esimerkiksi Lauseen 9.25(1) nojalla, koska ryhmät $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ovat kommutatiivisia.

Olkoon G ryhmä, jossa on 4 alkiota. Jos G on syklinen, niin se on kommutatiivinen kuten edellä. Oletetaan, että G ei ole syklinen. Seurauksen 11.13 nojalla jokaisen alkion $g \in G$, joka ei ole neutraalialkio, kertaluku on 2. Harjoitustehtävän 9.14 nojalla G on kommutatiivinen. [1]

7. Osoita, että $S_4 = \langle (12), (1234)\rangle$.

Ratkaisu. Ryhmässä S_4 on $4! = 24$ alkiota, joten Lagrangen lauseen nojalla riittää osoittaa, että aliryhmässä $\langle (12), (1234)\rangle$ on vähintään 13 alkiota. Tällaisen 13 alkion osajoukon voi löytää monella eri tavalla, esimerkiksi näin: Virittäjien virittämissä syklisissä aliryhmissä on yhteensä 5 alkiota id, (12), (1234), $(1234)^2 = (13)(24)$ ja $(1234)^3 = (4321)$. Muita alkioita ovat esimerkiksi $(12)(1234) = (234)$ ja $(234)^2 = (432)$, $(1234)(12) = (134)$,

[1] Itse asiassa se on Kleinin neliryhmä Propositioiden 9.30 ja 8.19 nojalla, mutta tätä ei pyydetty todistamaan.

$(134)^2 = (431)$ ja $(12)(1234)(12) = (1342)$. Sen potensseista saadaan $(14)(23)$ ja (2431), jolloin on löydetty 12 alkiota. Kun huomataan vielä, että esimerkiksi $(12)(1234)^4 = (12)(13)(24) = (1324)$ ei ole aiemmassa luettelossa, niin tarvittavat 13 alkiota on löydetty.

8. Todista Propositio 12.7(2): Olkoon $\phi\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Olkoon $H' \trianglelefteq G'$. Tällöin $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Ratkaisu. Proposition 9.11(2) nojalla $\phi^{-1}(H') \leqslant G$. Olkoon $g \in G$ ja olkoon $h \in \phi^{-1}(H')$. Tällöin $\phi(h) \in H'$. Proposition 8.19 nojalla $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$, joten

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1} \in H' ,$$

koska $H' \trianglelefteq G'$. Siis $ghg^{-1} \in \phi^{-1}(H')$, joten Proposition 12.5 nojalla $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.