Ryhmät 2021

Harjoitus 3: ratkaisuja

1. Olkoon X joukko ja olkoon $x_0 \in X$. Olkoon

$$F = \{f \in \mathrm{Perm}(X) : f(x_0) = x_0\}$$

Osoita, että $F \leqslant \mathrm{Perm}(X)$.

Ratkaisu. Joukko F ei ole tyhjä, sillä $\mathrm{id}_X(x_0) = x_0$, joten $\mathrm{id}_X \in F$. Jos $f, g \in F$, niin $f \circ g(x_0) = f(g(x_0) = f(x_0) = x_0$, joten $f \circ g \in F$. Samoin, jos $f \in F$, niin $f^{-1}(x_0) = 0$, sillä $f(x_0) = x_0$. Siis $f^{-1} \in F$. Aliryhmätestin nojalla $F \leqslant \mathrm{Perm}(X)$.

2. Todista Lemma 9.22.

Ratkaisu. Olkoon

$$M = \min\{k \geqslant 1 : g^k = e\}\,.$$

Tällöin kaikilla $b \in \mathbb{Z}$ pätee $g^{bM} = (g^M)^b = e$. Jakoyhtälön nojalla kaikilla $K \in \mathbb{Z}$ pätee $K = K_0 + aM$ joillain $0 \leqslant K_0 \leqslant M - 1$ ja $a \in \mathbb{Z}$. Siis $g^K = g^{K_0} g^{aM} = g^{K_0}$, joten

$$\langle g \rangle \subset \{e = g^0, g, g^2, \ldots, g^{M-1}\}\,.$$

Jos joillekin $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant M - 1$ pätee $g^m = g^n$, niin $g^{n-m} = e$ ja $0 \leqslant n - m < M$. Luvun M määritelmän nojalla $n - m = 0$, joten $n = m$. Siis $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{M-1}\}$, joten $M = \mathrm{ord}\, g$.

3. Todista Lause 9.25(2).

Ratkaisu. Olkoon $\phi\colon \langle a \rangle \to G$ ryhmähomomorfismi. Jos $g \in \phi(\langle a \rangle)$, niin

$$g = \phi(a^k) = \phi(a)^k$$

jollain $k \in \mathbb{Z}$. Siis $\phi(\langle a \rangle) = \langle \phi(a) \rangle$.

4. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \subset G$ äärellinen vakaa osajoukko, jossa on ainakin yksi alkio. Osoita, että $H \leqslant G$.

Ratkaisu. Riittää osoittaa, että jokaisella $h \in H$ on käänteisalkio joukossa H. Olkoon $h \in H$. Koska G on äärellinen, joukko $\{h^k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\} \subset G$ on äärellinen. Siis joillain $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ pätee $h^n = h^m$. Oletetaan, että $m < n$. Tällöin $h^n = h^{n-m} h^m$, joten supistussäännön nojalla $h^{n-m} = e$. Siis $hh^{n-m-1} = h^{n-m} = e$, joten $h^{n-m-1} = h^{-1}$.

5. Todista Lemma 9.28.

Ratkaisu. Olkoon G kommutatiivinen ryhmä ja olkoot $S, T \leqslant G$. Tällöin $ST = \langle S \cup T \rangle$. Koska $S, T \subset ST \subset \langle S \cup T \rangle$, riittää osoittaa, että $ST \leqslant G$.

Olkoot $s_1 t_t, s_2 t_2 \in ST$. Kommutatiivisuuden nojalla $(s_1 t_1)(s_2 t_2) = (s_1 s_2)(t_1 t_2) \in ST$. Lisäksi kaikille $st \in ST$ pätee kommutatiivisuuden nojalla $(st)^{-1} = t^{-1} s^{-1} = s^{-1} t^{-1} \in ST$. Aliryhmätestin nojalla $ST \leqslant G$.

6. Todista Propositio 9.30

Ratkaisu. Kuvaus $\phi\colon S \times T \to ST$, $\phi(st) = st$, on homomorfismi: Jos $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in S \times T$, niin kommutatiivisuuden nojalla

$$\phi((s_1, t_1)(s_2, t_2)) = \phi(s_1 s_2, t_1 t_2) = s_1 s_2 t_1 t_2 = (s_1 t_1)(s_2 t_2) = \phi(s_1, t_1)\phi(s_2, t_2)\,.$$

Kuvaus ϕ on selvästi surjektio. Osoitetaan vielä, että se on injektio: Jos $(s, t) \in \ker \phi$, niin $st = e \in G$. Siis $s = t^{-1}$. Tällöin $s \in S \cap T = \{e\}$, joten $s = e$ ja $t = s^{-1} = e$. Siis ϕ on isomorfismi.

7. Olkoon $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, 7\} \to \{1, 2, \ldots, 7\}$ permutaatio, jolle pätee

$$\sigma(1) = 3,\quad \sigma(2) = 5,\quad \sigma(3) = 7,\quad \sigma(4) = 1,\quad \sigma(5) = 6,\quad \sigma(6) = 2,\quad \sigma(7) = 4\,.$$

Kirjoita permutaatio σ erillisten syklien tulona.

Ratkaisu. (1374)(256).

8. Olkoot $\alpha = (13457)$ ja $\beta = (2645)$. Määritä permutaatio $\alpha^{-1}\beta^{-1}$ erillisten syklien tulona. Määritä permutaation $\alpha^{-1}\beta^{-1}$ kertaluku.

Ratkaisu. $\alpha^{-1}\beta^{-1} = (17543)(2546) = (1753)(246)$. Kertaluku on lukujen 3 ja 4 pienin yhteinen jaettava 12.