Ryhmät 27.4.2021

$H \trianglelefteq G \rightsquigarrow G/H = \{ gH : g \in G \}$

laskutoimitus $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$

} tekijäryhmä.

Esim. $q\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ja kongruenssiluokkien yhteenlasku.

Lause 12.17. (Ryhmien 1. isomorfismilause) Jos $\varphi : G \to G'$ on ryhmähomomorfismi, niin $\underline{\mathrm{Im}(\varphi)} = \varphi(G) \cong \underline{G/\ker\varphi}$

(vertaa L. 9.25(1):n tod.)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G/\ker\varphi \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{Im}(\varphi) < G' \end{tikzcd}$$

$\ker\varphi \trianglelefteq G$.

Prop. 12.16: Jokainen normaali aliryhmä on jonkin ryhmähomomorfismin ydin.
Tod. Haj.

1

<u>Seuraus</u>. Jos $\varphi : G \to G'$ on surj. homomorfismi, niin

$$G/\ker\varphi \cong G'.$$

<u>Tod.</u> Määr $\psi : G/\ker\varphi \to G'$,

$$\psi(x\ker\varphi) = \varphi(x).$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G/\ker\varphi \arrow[r, "\psi"'] & G' \end{tikzcd}$$

$$\varphi = \psi \circ \pi$$

Jos $x\ker\varphi = y\ker\varphi$, niin $y = xh$ jollain $h \in \ker\varphi$.

Tällöin $\varphi(y) = \varphi(xh) = \varphi(x)\underbrace{\varphi(h)}_{=e'} = \varphi(x)$,

joten ψ on hyvin määritelty.

Os. että ψ on homomorfismi: Olk. $x, y \in G \rightsquigarrow x\ker\varphi,\ y\ker\varphi \in G/\ker\varphi$

$$\psi(x\ker\varphi\ y\ker\varphi) = \psi(xy\ker\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \psi(x\ker\varphi)\,\psi(y\ker\varphi).$$

Jos $y \in \operatorname{Im} \varphi$, niin $y = \varphi(x) = \psi(x \ker \varphi)$ jollain $x \in G$.

$\Rightarrow \psi(G/\ker\varphi) = \varphi(G) = \operatorname{Im}(\varphi)$. Siis ψ on surjektio.

Os. että ψ on injektio. Olk. $g\ker\varphi \in \ker\psi$. Tällöin

$\underline{\varphi(g)} = \psi(g\ker\varphi) = \underline{\underline{e'}} \Rightarrow \underline{\underline{g \in \ker\varphi}} \Rightarrow g\ker\varphi = \ker\varphi$

$\Rightarrow \ker\psi = \{\ker\varphi\} \xRightarrow[\text{P.9.14.}]{} \psi$ on injektio.

Siis $\psi : G/_{\ker\varphi} \to \operatorname{Im}\varphi$ on isomorfismi. $\square$

$\underline{\text{Esim.}}$ $f: \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $\underline{ad-bc} \neq 0$ Möbius-kuvaus.

on $\underline{\text{bijektio}}$, kun sovitaan, että $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ ja $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Osoittautuu, että tällaiset kuvaukset muodostavat ryhmän $\operatorname{Perm}(\mathbb{C}\cup\{\infty\})$ aliryhmän $\mathcal{M}$.

$\varphi : GL_2\mathbb{C} \to \mathcal{M}$, $\Big(\underbrace{\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}}\Big)(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, on ~~homomorfismi~~ surj.

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad-bc \neq 0$.

$\mathcal{M}$:n n.a. on id, $id(z) = \dfrac{1z+0}{0\cdot z+1} = \dfrac{az+0}{0\cdot z+a}$, $a \neq 0$.

$\Rightarrow \ker\varphi = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}^\times\right\} \cong \mathbb{C}^\times$

Isom. lause : $\mathcal{M} = GL_2\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times$.

Lause 12.24 (Toinen isomorfismilause). Olk. $T \leq G$, $N \trianglelefteq G$. Tällöin

$$T/(N\cap T) \cong NT/N.$$

Seuraus 12.25 Jos $a,b \in \mathbb{Z}$, niin $\mathrm{syt}(a,b)\,\mathrm{pyj}(a,b) = ab$.

(4) Tod. idea: Os. että $\mathrm{syt}(a,b)\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong a\mathbb{Z}/\mathrm{pyj}(a,b)\mathbb{Z}$ | $\mathrm{pyj}(a,b) = a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}$, $\mathrm{syt}(a,b) = a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$

Lause 12.24 (Toinen isomorfismilause). Olk. $T \le G$, $N \trianglelefteq G$. Tällöin

$$T/(N \cap T) \cong NT/N.$$

$$\begin{tikzcd}
 & NT \arrow[dl, dash, "\trianglelefteq"'] \arrow[dr, dash] & \\
N \arrow[dr, dash] & & T \arrow[dl, dash, "\trianglelefteq"] \\
 & N\cap T &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Harj}}$: $NT = \langle N \cup T \rangle = TN \le G$.

Huom. Jos $H \le G$, $N \le H \le G$, $N \trianglelefteq G$ $\Big\}$ $\overset{L.12.1}{\Rightarrow}$ $N \trianglelefteq H$.

$gN = Ng \ \forall g \in G \Rightarrow gN = Ng \ \forall g \in H \le G$.

Prop. 12.23. Jos $T \le G$, $N \trianglelefteq G$, niin $N \cap T \trianglelefteq T$.

Tod. Olk. $\pi : G \to G/N$ luonn. homomorfismi, $\ker \pi = N$.

$\pi|_T : T \to G/N$ $\quad \ker \pi|_T = T \cap N \overset{S.12.8}{\Rightarrow} T \cap N \trianglelefteq T$.

L.12.24:n tod. 1. isom. lause. $T/T\cap N \cong \pi(T)$. $\quad \pi(nt) = \pi(n)\pi(t) = \pi(t)$, $n \in N, t \in T$

$\ker \pi|_{NT} = N$. 1. isom. lause: $NT/N \cong \pi(NT) = \pi(T)$ $\square$

Lause 12.26 (3. isomorfismilause) Olk. $K, H \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$.

Tällöin $\quad G/H \cong (G/K)/(H/K)$.

$a, b, c \in \mathbb{R}$
$b \neq 0 \neq c$.

$$\frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{b}$$

Tod. Olk. $\varphi : G/K \to G/H$, $\varphi(gK) = gH$.

Os. että φ on surj. homomorfismi ja $\ker \varphi = H/K$.

1. isom. lause $\Rightarrow$ väite.

$$\varphi(xK\,yK) = \varphi(xyK) = xyH = xH\,yH = \varphi(xK)\varphi(yK).$$

Surj. OK.

Määr φ:n ydin: Olk. $h \in H$. Tällöin $\varphi(hK) = hH = H$

$\Rightarrow H/K \leq \ker \varphi$. Olk. $g \in G - H$, Tällöin $\varphi(gK) = gH \neq H$.

$\Rightarrow H/K = \ker \varphi$.