Ryhmät 26.4.2021

Kertaus: $H \leq G$, $x \in G$ $\rightsquigarrow$ $xH = \{xh : h \in H\}$.
$Hx = \{hx : h \in H\}$.

(jos G kommut., niin $xH = Hx \; \forall x \in G$)

$H \trianglelefteq G$, jos $xH = Hx \quad \forall x \in G$.
normaali

Prop. jos $[G : H] = 2$, niin $H \triangleleft G$.

Prop. $H < G$. $H \triangleleft G \Leftrightarrow \boxed{ghg^{-1} \in H \quad \forall h \in H, g \in G.}$

Prop. $\varphi : G \to G'$ homomorfismi

1) $H \trianglelefteq G \Rightarrow \varphi(H) \trianglelefteq \varphi(G)$

2) $H' \trianglelefteq G' \Rightarrow \varphi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

$\ker \varphi \trianglelefteq G$

Esim. Olk. $H < G'$ s.e. H ei ole norm.
(Esim $\langle (12) \rangle = H$, $G' = S_3$)
Olk $\varphi : H \to G'$, $\varphi(h) = h$.
Tällöin $H \trianglelefteq H = G$.
Huom. $\varphi(H) = H$ ei ole G':n norm. aliryhmä

(1)

Esim. 1) Olk. $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ permutaation merkki. (homomorfismi)

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \tau \text{ parillinen} \\ -1, & \text{jos } \tau \text{ pariton.} \end{cases}$$

(tulo parillisesta määrästä vaihtoja)

$A_n = \ker \varepsilon \trianglelefteq S_n$.

2) $GL_n(\mathbb{R}) = \{$ kääntyvät reaaliset $n \times n$-matriisit $\}$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1 \} = \ker \det \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$

$\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ homomorfismi $\det(AB) = \det A \det B$

$H < G \leadsto G/H = \{ gH : g \in G \}$

$H \backslash G = \{ Hg : g \in G \}$.

Halutaan määritellä laskutoimitus joukossa G/H s.e. se liittyy "luonnollisesti" ryhmän G laskutoimitukseen.

Kokeillaan tätä:

$$\boxed{(xH)(yH) = (xy)H}$$

yleistää kongr. luokkien yhteenlaskun: $a, b \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

$q\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$. $\quad \underbrace{(a+q\mathbb{Z})}_{\pi(a)} + \underbrace{(b+q\mathbb{Z})}_{\pi(b)} = (a+b) + q\mathbb{Z}$. $= \pi(a+b)$

Kuvaus $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $\pi(a) = a + q\mathbb{Z}$ on surj. homomorfismi

Mikä voi mennä pieleen? Voisi käydä näin: $xH = x'H$ mutta $xyH \neq x'y'H$

$yH = y'H$

Esim. $H = \langle (12) \rangle < S_3$.

$x = (123)$, $x' = (13)$ Esim. 11.3: $xH = x'H$

$y = (132)$, $y' = (23)$ $\quad yH = y'H$.

$y = (132) = (123)^{-1}$

Lasku: $xy = id$ $\quad xyH = H = \{id, (12)\}$

$x'y' = (13)(23) = (132)$ $\quad x'y'H = (132)H = \{(132), (23)\} \neq H$.

Tässä tapauksessa lauseke ei määrittele laskutoimitusta joukossa $G/H = S_3/\langle(12)\rangle$

③

Ol. $H \trianglelefteq G$. $\quad xH = x'H \Rightarrow x = x'h_x$
$yH = y'H. \quad y = y'h_y$ joillain $h_x, h_y \in H$.

$$xy = x'h_x y'h_y = \boxed{x'y'h_x' h_y} \in (x'y')H$$

$Hy' = y'H \quad \in H$

$h_x y' = y'h_x'$ joillain $h_x' \in H$

$\Rightarrow (x'y')^{-1}(xy) = h_x' h_y \in H \quad$ Prop. 11.4: $x'y'H = xyH$

$\Rightarrow$ lauseke $(xH)(yH) = (xy)H$ määrittelee $\underbrace{\text{laskutoimituksen}}_{\text{tekijälaskutoimitus.}}$ G/H:ssa.

Olk. $\pi: G \to G/H$, $\pi(x) = xH$, luonnollinen homomorfismi.

π on homomorfismi: $\pi(xy) = xyH \underset{\text{tekijälask. määr.}}{=} xHyH = \pi(x)\pi(y)$.

$\left.\begin{array}{l} H\,xH = eH\,xH = xH \\ xH\,H = xH \end{array}\right\} \Rightarrow H$ on tekijälaskutoim. neutraali alkio

$$\left.\begin{array}{l} xH\,x^{-1}H = xx^{-1}H = eH = H \\ x^{-1}H\,xH = x^{-1}xH = H \end{array}\right\}$$ $\forall\, xH \in G/H$ on käänteisalkio $x^{-1}H$.

$$xH(yH\,zH) = xH\,yzH = x(yz)H \underset{\substack{\uparrow \\ G\text{:n laskut. assos.}}}{=} (xy)zH = xyH\,zH$$

$$= (xH\,yH)zH$$

$\Rightarrow$ tekijälaskut. on assos.

$\therefore$ G/H tekijälaskutoimitukselle on ryhmä $\Rightarrow$ aliryhmän H määräämä <u>tekijäryhmä</u>.

<u>Esim.</u> $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on tekijäryhmä.

Esim. $\# A_4 = 12$. Lagrange: A_4:n aliryhmien mahd. kertaluvut ovat

1, 2, 3, 4, 6 ja 12.

$\#\underbrace{\{id\}}_{< A_4} = 1, \quad A_4 \leq A_4$ ja $\# A_4 = 12$.

$((12)(34))^2 = (12)(34)(12)(34) = (12)^2(34)^2 = id. \rightsquigarrow \#\langle (12)(34)\rangle = 2.$

$(123) \in A_4 \qquad \#\langle (123)\rangle = 3.$

$\mathrm{ord}((12)(34)) = 2 \qquad \langle (12)(34), (13)(24)\rangle = \{ id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = G$

$\mathrm{ord}((13)(24)) = 2. \qquad (12)(34)(13)(24) = (14)(23)$

$\underset{H}{\underset{\|}{\langle (12)(34)\rangle}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \underset{J}{\underset{\|}{\langle (13),(24)\rangle}}.$

$\left.\begin{array}{l} HJ = G \\ H \cap J = \{id\} \\ A_4 \text{ kommu} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{P. 9.30} \\ \Longrightarrow \\ \text{P. 8.19} \end{array} \quad G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = K_4$

Os. että että A_4:llä ei ole 6. alkion aliryhmää. Ol. että $H < A_4$ ja $\# H = 6 \rightsquigarrow [A_4 : H] = 2 \rightsquigarrow \# G/H = 2$

$\Rightarrow H \triangleleft A_4 \qquad G/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$

Olk. $g \in G$. Tällöin $g^2 H = gHgH = (gH)^2 = H$ (neutr. alkio)

$\uparrow$

$G/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow g^2 \in H$.

Jos g_1 on 3-sykli, niin $g_1^3 = id$

$\Rightarrow g_1 = g_1 g_1^3 = g_1^4 = (g_1^2)^2 \in H$

Mutta A_4:ssä on 8 3-sykliä,

siis $\# H \geq 8 \Rightarrow \# H = 12$

$\lightning$ ol. että $\# H = 6$.

Siis A_4:llä ei ole 6 alkion aliryhmää.

Huom, C on komm. $\Rightarrow H \triangleleft C$,

Prop. 12.14 Jos C on syklinen ryhmä ja $H < C$, niin C/H on syklinen ryhmä.

Tod, $C = \langle c \rangle$. Olk. $gH \in C/H$. $g \in C \Rightarrow g = c^k$ jollain $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow gH = c^k H = (cH)^k \Rightarrow C/H = \langle cH \rangle$. $\square$