Ryhmät 12.4.2021

$H, J \leq G$. Ol. että

$$\left.\begin{aligned} HJ &= \{hj : h \in H, j \in J\} = G \\ H \cap J &= \{e\} \\ hj &= jh \quad \forall j \in J \ \forall h \in H \end{aligned}\right\}$$

Tällöin G on H:n ja J:n sis. suora tulo.

P. 9.30: $\Downarrow$ $G \cong H \times J$

Esim. 9.31.

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times} = \{1+8\mathbb{Z}, 3+8\mathbb{Z}, 5+8\mathbb{Z}, 7+8\mathbb{Z}\} = G$$

$$(3+8\mathbb{Z})^2 = 9+8\mathbb{Z} = 1+8\mathbb{Z} \quad \leadsto \langle 3+8\mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$(5+8\mathbb{Z})^2 = 25+8\mathbb{Z} = 1+8\mathbb{Z}. \qquad \langle 5+8\mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H = \langle 3+8\mathbb{Z}\rangle = \{1+8\mathbb{Z}, 3+8\mathbb{Z}\}$$

$$J = \langle 5+8\mathbb{Z}\rangle = \{1+8\mathbb{Z}, 5+8\mathbb{Z}\}.$$

$$\underbrace{(3+8\mathbb{Z})}_{\in H}\underbrace{(5+8\mathbb{Z})}_{\in J} = 15+8\mathbb{Z} = 7+8\mathbb{Z}$$

$$HJ = \{1+8\mathbb{Z}, 3+8\mathbb{Z}, 5+8\mathbb{Z}, 7+8\mathbb{Z}\} = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times} = G.$$

$$H \cap J = \{1+8\mathbb{Z}\}$$

① $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times}$ komm.

P. 9.30 $\Rightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times} \cong \langle 3+8\mathbb{Z}\rangle \times \langle 5+8\mathbb{Z}\rangle$

P. 8.19 $\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

K_4

10 Symmetriset ryhmät

kuvausten yhdistäminen.

$X \neq \emptyset$. $\quad \mathrm{Perm}(X) = (\{ b : X \circlearrowleft \text{ bijektio} \}, \circ)$

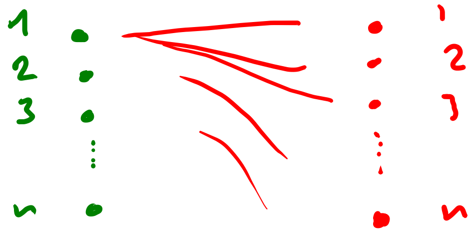
$F : X \to Y$ bijektio.

$$\mathrm{Perm}(X) \ni b \circlearrowleft X \xrightarrow{F} Y$$

$$F \circ b \circ F^{-1} \in \mathrm{Perm}(Y)$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Perm}(X) \cong \mathrm{Perm}(Y)$ $\quad \boxed{\text{Harj}}$

Määr. n alkion joukon / joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatioryhmä on symm. ryhmä S_n.

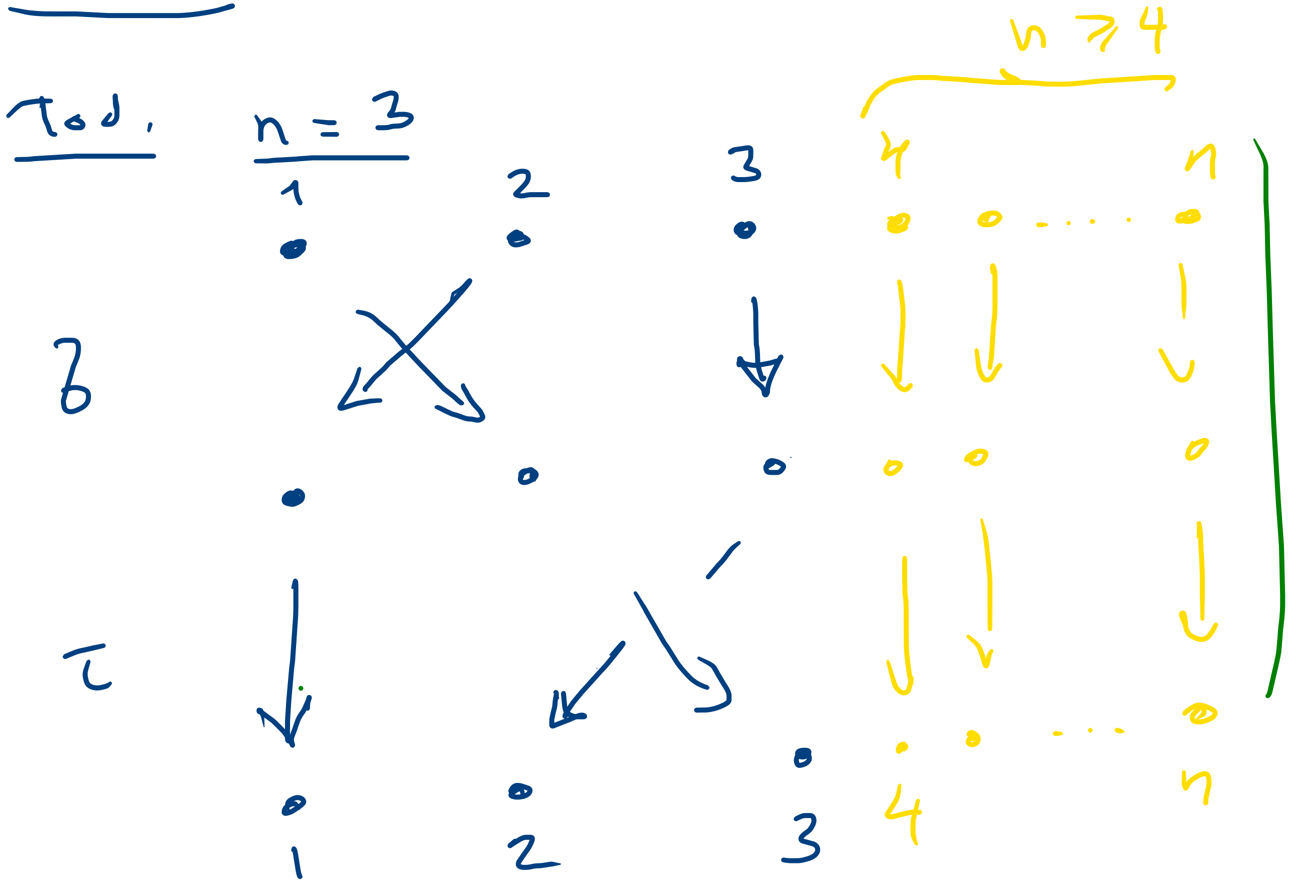


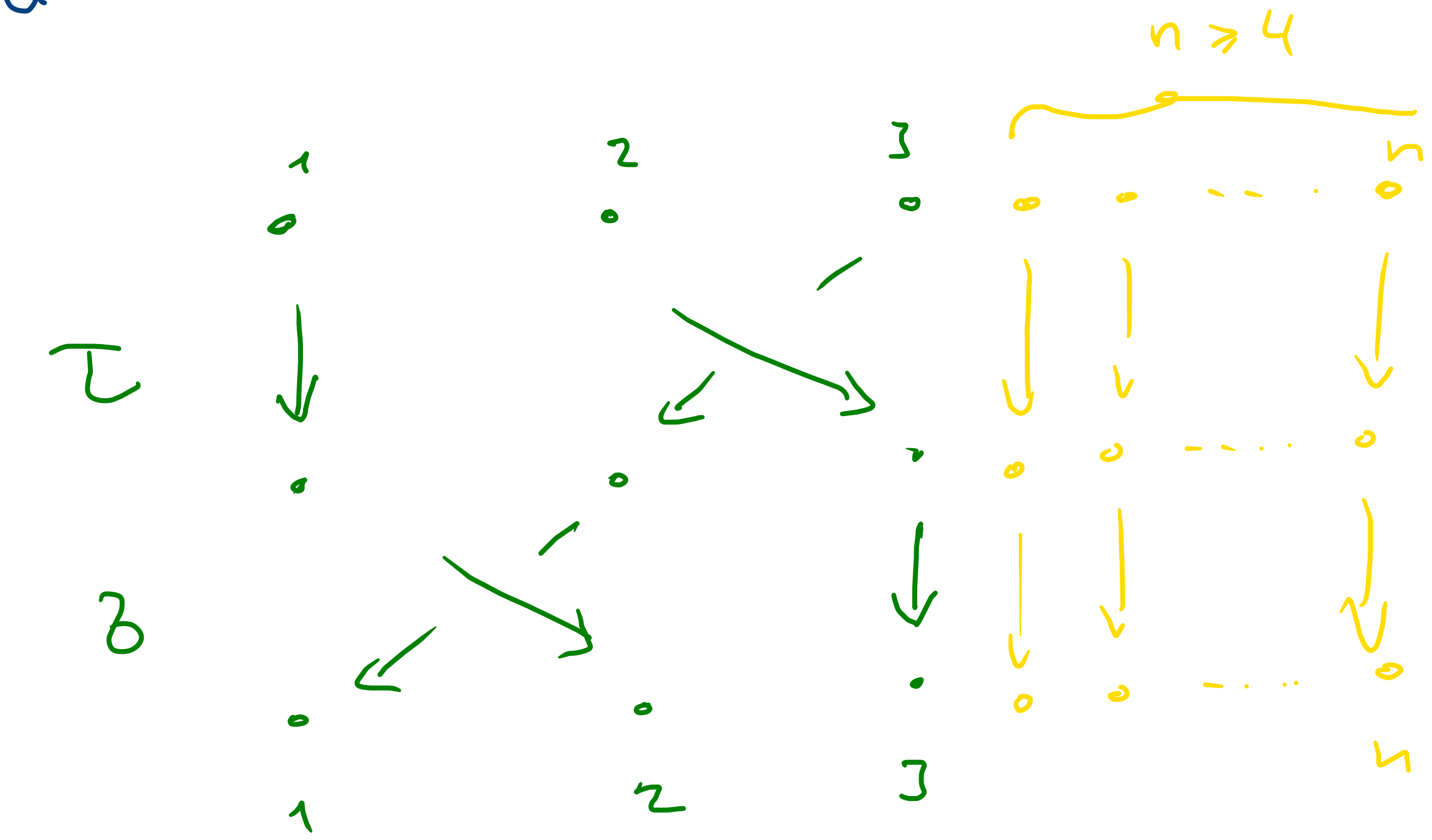
$\rightsquigarrow \#S_n = n!$

$\#S_1 = 1$
$\#S_2 = 2$
$\#S_3 = 6$

Prop. 10.1 (2) Jos $n \geq 3$, niin S_n ei ole kommutatiivinen.

Tod. $n = 3$





Olk. $\sigma \in S_3$: $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$

$\sigma = (12)$

$\tau \in S_3$: $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$

$\tau = (13)$

$\tau \circ \sigma$: $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$

$\tau \circ \sigma = (132)$

$\sigma \circ \tau$: $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$

$\sigma \circ \tau = (123)$

$\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$

Jos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad a_i \neq a_j \ \forall\ i \neq j$, $k \leq n$.

$(a_1 a_2 \cdots a_k) \in S_n$: $\quad a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3$, $\vdots$, $a_{k-1} \mapsto a_k$, $a_k \mapsto a_1$

k-sykli

$b \in \{1, \dots, n\} - \{a_1, \dots, a_k\}$

$b \mapsto b$.

Syklien yhdistettyä kuvausta sanotaan syklien tuloksi.

(ab) vaihto eli transpositio.

$(i\ (i+1))$ alkeisvaihto.

$\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ $\quad a_i \neq a_j \ \forall\ i, j$

$b_r \neq b_s \ \forall\ r, s$

$\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$

$\longrightarrow$ syklit $(a_1 \cdots a_k)$ ja $(b_1 \cdots b_m)$ ovat erillisiä.

(disjoint)

(4) **Lemma** Erilliset syklit kommutoivat.

Huom. 1) $(a_1\, a_2 \cdots a_k) \circ (a_k\, a_{k-1} \cdots a_1) = id.$

2) $\operatorname{ord}(a_1 \cdots a_k) = k$:

$$(a_1 \cdots a_k)^2 = (a_1 a_2 a_3 \cdots a_k)(a_1 a_2 \cdots a_k) = (a_1\, a_3 \cdots\ )$$

$(a_1 \cdots a_k)^l \neq id$, jos $1 \leq l \leq k-1$

$(a_1 \cdots a_k)^k = id.$

3) $(a_1 a_2 \cdots a_k) = (a_2\, a_3 \cdots a_k\, a_1) = (a_3 \cdots a_k\, a_1\, a_2) \cdots$

Prop. 10.5 Jokainen sykli on vaihtojen tulo.

Tod. $(1\,4)(1\,3)(1\,2) = (1\,2\,3\,4)$

Harj..

Prop. 10.6. Jokainen vaihto on alkeisvaihtojen pariton tulo.

Tod. $1 \le k, m \le n$, $k \neq m$.

$$(1\,k)(1\,m)(1\,k) = \underline{\underline{(k\,m)}}$$

$$(1\ (k-1))((k-1)\ k)(1\ (k-1)) = (1\,k)$$

$\vdots$

$\square$

Prop. Jokainen S_n:n alkio void. kirjoittaa erillisten syklien tulona.

Tod. Olk. $\tau \in S_n$.
Tark. alkiota $1 \in \{1, \dots, n\}$.

$$1 \xmapsto{\tau} \tau(1) \mapsto \tau^2(1)$$

$\# S_n = n! \to \operatorname{ord} \tau^n < \infty$.