Ryhmät 10.5.2021.

Automorfismiryhmä.

Määr. Olk. G ryhmä. $\underbrace{\text{Bijektiivinen homomorfismi}}_{\text{isomorfismi}}$ $\varphi : G \to G$ on ryhmän G automorfismi.

$$\mathrm{Aut}(G) = \{ \varphi : G \to G \text{ automorfismi} \} < \mathrm{Perm}(G)$$

(laskutoimitus kuvausten yhdist.)

on ryhmän G automorfismiryhmä.

Lemma. $\mathrm{Aut}(G) < \mathrm{Perm}(G)$.

Tod.

- $\mathrm{id} : G \to G$ on automorfismi. (bijektio OK, $\mathrm{id}(gh) = gh = \mathrm{id}(g)\mathrm{id}(h)$)

  $\Rightarrow \mathrm{Aut}(G) \neq \emptyset$.

- $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$. φ_1, φ_2 homom. $\overset{\text{Prop. 8.16}}{\Rightarrow}$ $\varphi_1 \circ \varphi_2$ on homomorfismi; bijektio $\Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2$ on bijektio $\Big\} \Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$.

- ① $\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \overset{\text{Prop. 1.8}}{\Rightarrow} \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$:

  Olk. $g, h \in G$. $\varphi(\varphi^{-1}(g))\varphi(\varphi^{-1}(h)) = gh$

  $\varphi(\varphi^{-1}(g)\varphi^{-1}(h)) \underset{\varphi \text{ homom.}}{=} \ldots$ $\Rightarrow \varphi^{-1}(g)\varphi^{-1}(h) = \varphi^{-1}(gh)$. □

  Aliryhmätesti $\Rightarrow$ OK. □

<u>Esim.</u> 1) Olk. $a \in G$ $\leadsto$ $\underline{\varphi_a : G \to G}$, $\varphi_a(g) = aga^{-1}$ $\forall g \in G$.

Ryhmän G <u>sisäinen</u> <u>automorfismi</u>

<u>Harj. 8.13</u>: $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$.

$\left(\underline{\varphi_a^{-1} = \varphi_{a^{-1}}} \right)$

2) $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\underbrace{m(k) = -k}_{\text{bijektio}}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. $\underline{m(k+l)} = -(k+l) = -k-l$

komm.

$= \underline{m(k)+m(l)}$.

$\boxed{\text{ei sisäinen}}$

Matriisia A vastaava lin. kuvaus

3) $A \in \underbrace{GL_n(\mathbb{R})} \Rightarrow A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$. $A(x+y) = A(x) + A(y)$ (LAG)

($\cong \{$bij. lin. kuv $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\} = GL(\mathbb{R}^n)$)

kääntyvät $n \times n$-matriisit

$\leadsto GL(\mathbb{R}^n) \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{\text{ei sisäinen paitsi, jos } A = I_n}$

komm.

<u>Huom.</u> Jos G <u>komm</u>, niin $\forall a \in G$ pätee $\underline{\varphi_a(g)} = aga^{-1} = aa^{-1}g = g = \underline{id(g)}$

Siis vain id. on sis. automorfismi.

Olk. $\rho : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $\rho(a) = \varphi_a$. = ryhmän G keskus : $Z(G) = \{z \in G : zg = gz \ \forall g \in G\}$

Prop. ρ on homomorfismi, $\ker \rho = Z(G)$.

$\rho(G) = \mathrm{Inn}(G)$

Tod. Olk. $a, b \in G$.

$$(\rho(ab))(g) = \varphi_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a\underbrace{bgb^{-1}}_{\varphi_b(g)}a^{-1} = \varphi_a(\varphi_b(g)) = \varphi_a \circ \varphi_b(g)$$

$$= (\rho(a) \circ \rho(b))(g) \quad \forall g \in G$$

$\Rightarrow \rho(ab) = \rho(a) \circ \rho(b)$. Siis ρ on homomorfismi.

Olk. $z \in Z(G)$. Tällöin $\underbrace{\rho(z)(g)}_{} = \varphi_z(g) = zgz^{-1} \overset{z \in Z(G)}{=} zz^{-1}g = g = \mathrm{id}(g) \ \forall g \in G$.

$\Rightarrow \rho(z) = \mathrm{id} \Rightarrow z \in \ker \rho$.

Jos $y \in \ker \rho$ $\quad g = \mathrm{id}(g) = \rho(y)(g) = ygy^{-1} \Rightarrow gy = yg \ \forall g \in G$.

$\Rightarrow y \in Z(G)$. $\square$

Prop. $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

Tod. $\mathrm{Inn}(G) = \rho(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ Prop 9.11 (1) nojalla.
(Voisi tehdä myös aliryhmätestillä).

Olk. $\varphi_a \in \mathrm{Inn}(G)$, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$. Os. että $\underline{\underline{\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)}}$.
Tällöin Prop. 12.5 $\Rightarrow \mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

Olk. $g \in G$. Tällöin

$$\underline{\underline{\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1}(g)}} = \psi\left(a\, \psi^{-1}(g)\, a^{-1}\right) \overset{\psi \text{ homom.}}{=} \psi(a)\, \underbrace{\psi(\psi^{-1}(g))}_{g}\, \underbrace{\psi(a^{-1})}_{\substack{\psi(a)^{-1} \\ \text{Prop. 8.17}}}$$

$$= \psi(a)\, g\, \psi(a)^{-1} = \underline{\underline{\varphi_{\psi(a)}(g)}}$$

$$\Rightarrow \psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)} \in \mathrm{Inn}(G). \qquad \square$$

Ryhmän G ulkoinen automorfismiryhmä on

$$\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G) / \mathrm{Inn}(G).$$

$\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$

$\parallel$

Esim. $K_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\# K_4 = 4$, komm.

$\mathrm{Inn}(K_4) = \{id\}$.

Lemma 9,22

$\mathrm{ord}\, g = 2 \quad \forall g \in K_4 - \{(0,0)\}$ ($\mathrm{ord}\, g = \# \langle g \rangle = \min\{k \geq 1 : g^k = e\}$)

$\varphi \in \mathrm{Aut}(K_4)$, $\varphi((0,0)) = \varphi((0,0))$.

$\Rightarrow \varphi \in \mathrm{Perm}(\underbrace{K_4 - \{(0,0)\}}_{\# = 3}) \cong S_3$.

$\Rightarrow \# \mathrm{Aut}(K_4) \leq \# S_3 = 6$.

Voi os. että on 6 automorfismia $\Rightarrow \mathrm{Aut}(K_4) \cong S_3$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ← näitä on 6 kpl.

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

ja $ad - bc = 1 + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}$

Kuvaus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on automorfismi.

$\Rightarrow$ löydetään 6 automorfismia.