Algebra 1: Ryhmät 2020

Harjoitus 7: Ratkaisuja

1. Olkoon G ryhmä, olkoon $I \neq \emptyset$ jokin indeksijoukko ja olkoot $H_i \trianglelefteq G$, $i \in I$. Osoita, että

$$\bigcap_{i\in I} H_i \trianglelefteq G\,.$$

Ratkaisu. Proposition 9.10 nojalla $\bigcap_{i\in I} H_i \leq G$. Olkoon $h \in \bigcap_{i\in I} H_i$ ja olkoon $g \in G$. Koska $H_j \trianglelefteq G$ kaikilla $j \in I$, pätee $ghg^{-1} \in H_j$ kaikilla $j \in I$. Siis $ghg^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Proposition 12.5 nojalla $\bigcap_{i\in I} H_i \trianglelefteq G$.

2. Osoita, että $\mathbb{C}^\times/\{-1,1\} \cong \mathbb{C}^\times$.

Ratkaisu. Väite seuraa ryhmien ensimmäisestä isomorfismilauseesta, kunhan osoitamme, että kuvaus $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $f(z) = z^2$ on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on $\{\pm 1\}$.

Kaikille $z, w \in \mathbb{C}^\times$ pätee

$$f(zw) = (zw)^2 = z^2w^2 = f(z)f(w)\,,$$

joten f on homomorfismi. Osoitetaan, että f on surjektio. Olkoon $w = c + di \in \mathbb{C}^\times$. Jos $z = x + yi$, niin $f(z) = c + di$, jos ja vain jos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c \\ 2xy = d \end{cases}$$

ratkaisu. Jos $d = 0$, niin yhtälön $f(z) = c$ ratkaisut ovat $z = \pm\sqrt{c} \in \mathbb{R}^\times$. Jos $d \neq 0$, niin $x \neq 0$ ja voimme ratkaista jälkimmäisestä yhtälöstä $y = \frac{d}{2x}$. Sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön saamme ratkaistua

$$x^2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + d^2}}{2} > 0\,.$$

Tästä saadaan kaksi ratkaisua luvulle $x \in \mathbb{R}^\times$ ja jälkimmäinen yhtälö antaa vastaavat luvut $y = \frac{d}{2x} \in \mathbb{R}^\times$. Siis f on surjektio. Edellä tehdystä laskusta saamme myös tarvittavan havainnon $\ker f = \{-1, 1\}$.

Homomorfismin f surjektiivisuuden voi osoittaa myös napakoordinaattien avulla: Proposition 1.22 nojalla kompleksilukujen moduli $|\cdot|\colon \mathbb{C}^\times \to \big(]0,\infty[,\cdot\big)$ on homomorfismi. Siis jokaiselle $w \in \mathbb{C}^\times$ pätee $\left|\frac{w}{|w|}\right| = \frac{|w|}{|w|} = 1$, joten $\frac{w}{|w|} \in \mathbb{S}^1$. Harjoitustehtävän 9.1 nojalla

$$w = |w|\Big(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\Big)$$

jollain $\phi \in \mathbb{R}$. Proposition 1.22 nojalla kaikille $z \in \mathbb{C}$ pätee $|z^2| = |z|^2$. Harjoitustehtävässä 9.2. osoitettiin, että kaikille $s, t \in \mathbb{R}$ pätee

$$\Big(\cos(s) + i\sin(s)\Big)\Big(\cos(t) + i\sin(t)\Big) = \cos(s+t) + i\sin(s+t)\,,$$

joten erityisesti

$$\Big(\cos(s) + i\sin(s)\Big)^2 = \cos(2s) + i\sin(2s)\,.$$

Siispä

$$w = (\sqrt{|w|}(\cos(\phi/2) + i\sin(\phi/2)))^2 = f\Big(\sqrt{|w|}(\cos(\phi/2) + i\sin(\phi/2)\Big)\,,$$

joten f on surjektio.

3. Olkoot $N_1 \trianglelefteq G_1$ ja $N_2 \trianglelefteq G_2$. Osoita, että $N_1 \times N_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ ja

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)\,.$$

Ratkaisu. Olkoon $\pi_i \colon G_i \to G_i/N_i$ luonnollinen homomorfismi, kun $i \in \{1,2\}$. Tällöin kuvaus $\phi\colon G_1 \times G_2 \to (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$, $\phi(g_1, g_2) = (\pi_1(g_1), \pi_2(g_2))$ on homomorfismi: Kaikille $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$ pätee

$$\begin{aligned}\phi((g_1,g_2)(h_1,h_2)) &= \phi((g_1h_1, g_2h_2)) = (\pi_1(g_1h_1), \pi_2(g_2h_2)) \\ &= (\pi_1(g_1)\pi_1(h_1), \pi_2(g_2)\pi_2(h_2)) \\ &= (\pi_1(g_1), \pi_2(g_2))(\pi_1(h_1), \pi_2(h_2)) = \phi((g_1,g_2))\phi((h_1,h_2))\,.\end{aligned}$$

Homomorfismi ϕ on surjektio, koska luonnolliset homomorfismit π_1 ja π_2 ovat surjektioita, katso Propositio 2.7.

Olkoot $e_1 \in G_1$ ja $e_2 \in G_2$ neutraalialkiot. Tällöin $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$ on neutraalialkio. Ryhmän $(G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ neutraalialkio on $\phi(e_1, e_2) = (N_1, N_2)$. Proposition 11.4 nojalla $\phi(g_1, g_2) = (N_1, N_2)$, jos ja vain jos $g_1 \in N_1$ ja $g_2 \in N_2$. Siis $\ker \phi = N_1 \times N_2$. Väite seuraa ryhmien isomorfismilauseesta.

4. Todista Propositio 12.22: Olkoon G ryhmä ja olkoot $N \trianglelefteq G$ ja $T \leq G$. Tällöin

$$NT = TN = \langle N \cup T \rangle \leq G\,.$$

Ratkaisu. Huomataan ensin, että $NT = TN$: Olkoon $nt \in NT$. Koska $N \trianglelefteq G$ ja $T \leq G$, pätee $Nt = tN$. Siis on $n' \in N$, jolle $nt = tn' \in TN$, mistä saadaan $NT \subset TN$. Vastaavasti on $n'' \in N$, jolle $tn = n't \in NT$, joten $TN \subset NT$.

Osoitetaan, että NT on ryhmä. Ryhmän G neutraalialkio e on molempien ryhmien N ja T (neutraali)alkio, joten $e \in NT$. Olkoot $n_1, n_2 \in N$ ja $t_1, t_2 \in T$. Koska $N \triangleleft G$ ja $T \leq G$, pätee $t_1N = Nt_1$. Erityisesti on $n_3 \in N$ siten, että $t_1n_2 = n_3t_1$.[1] Siis

$$n_1t_1n_2t_2 = n_1n_3t_1t_2 \in NT\,.$$

Samoin, koska N on normaali on $n_4 \in N$, jolle $t_1^{-1}n_1^{-1} = n_4t^{-1}$, joten

$$(n_1t_1)^{-1} = t_1^{-1}n_1^{-1} = n_4t_1^{-1} \in NT\,.$$

Aliryhmätestin nojalla $NT \leq G$.

Proposition 9.12 nojalla

$$N \cup T \subset NT = \{nt : n \in N,\ t \in T\} \subset \langle N \cup T \rangle\,.$$

Määritelmästä seuraa,[2] että $\langle N \cup T \rangle$ on pienin ryhmän G aliryhmä, joka sisältää joukon $N \cup T$. Siis $NT \supset \langle N \cup T \rangle$, joten $NT = \langle N \cup T \rangle$.

5. Osoita, että $D_n \leq \mathrm{O}(2)$.

Ratkaisu. Osajoukko $D_n \subset \mathrm{O}(2)$ ei ole tyhjä, sillä $\mathrm{id}(P_n) = P_n$. Jos $A, B \in D_n$, niin

$$(AB)(P_n) = A(B(P_n)) = A(P_n) = P_n\,.$$

Siis $AB \in D_n$. Ortogonaalimatriisit ovat kääntyviä ja kaikille $A \in D_n$ pätee $A(P_n) = P_n$, joten $P_n = A^{-1}(P_n)$. Siis $A^{-1} \in D_n$ kaikilla $A \in D_n$. Aliryhmätestin[3] nojalla $D_n \leq \mathrm{O}(2)$.

[1] Alkioksi n_3 voidaan ottaa $t_1n_2t_1^{-1}$, sillä $t_1n_2 = t_1n_2t_1^{-1}t_1$ ja koska N on normaali, pätee $t_1n_2t_1^{-1} \in N$.
[2] Katso luku 9.3
[3] Propositio 9.3(2)

6. Todista Lemma 13.4: Olkoon $n \geq 3$, olkoon $\theta \in \mathbb{R}$ ja olkoon $P_n^\theta = r_\theta(P_n)$. Ryhmät D_n ja $\{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n^\theta = P_n^\theta\}$ ovat isomorfiset.

Ratkaisu. Olkoon $D_n' = \{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n^\theta = P_n^\theta\}$. Kuvaus $\phi\colon D_n \to D_n'$, $\phi(A) = r_\theta A r_\theta^{-1}$ on isomorfismi:

$$\phi(AB) = r_\theta AB r_\theta^{-1} = r_\theta A r_\theta^{-1} r_\theta B r_\theta^{-1} = \phi(A)\phi(B)\,,$$

joten ϕ on homomorfismi.

Oletetaan, että $\phi(A) = \mathrm{id}$. Tällöin $r_\theta A = r_\theta$, joten $A = \mathrm{id}$. Siis ϕ on injektio.

Jos $B \in D_n'$, niin

$$(Br_\theta)(P_n) = BP_n^\theta = P_n^\theta = r_\theta P_n\,.$$

Siis $(r_\theta^{-1} B r_\theta)P_n = P_n$, joten $r_\theta^{-1} B r_\theta \in D_n$. Mutta nyt $\phi(r_\theta^{-1} B r_\theta) = B$. Siis ϕ on surjektio.

Olkoon $A \in \mathrm{O}(n)$ ja olkoon $b \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $E_{A,b}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$E_{A,b}(x) = Ax + b$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Joukko

$$\mathrm{E}(n) = \{E_{A,b} : A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

varustettuna kuvausten yhdistämisellä on n-ulotteisen avaruuden Eukleideen ryhmä. Eukleideen ryhmän aliryhmä

$$\mathrm{T}(n) = \{T_b = E_{I_n,b} \in \mathrm{E}(n) : b \in \mathbb{R}^n\}$$

on n-ulotteisen avaruuden siirtojen ryhmä.

7. Osoita, että $\mathrm{E}(n)$ on ryhmä.

Ratkaisu. Aloitamme osoittamalla, että $\mathrm{E}(n) \subset \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$. Tarkastetaan siis, että kuvaukset $E_{A,b}$ ovat bijektioita. Olkoot $A \in \mathrm{O}(n)$ ja $b \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$E_{A,b}(A^{-1}(y-b)) = A(A^{-1}(y-b)) + b = y\,.$$

Siis $E_{A,b}$ on surjektio. Oletetaan sitten, että $E_{A,b}(x) = E_{A,b}(y)$ joillain $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$Ax + b = Ay + b\,, \tag{1}$$

joten $A(x-y) = 0$. Koska $A \in \mathrm{O}(n)$ on kääntyvä, saadaan $x - y = 0$. Siis $E_{A,b}$ on injektio.

Osoitetaan sitten, että $\mathrm{E}(n) \leq \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$. Määritelmänsä nojalla $\mathrm{E}(n)$ ei ole tyhjä. Olkoot sitten $E_{A,a}, E_{B,b} \in \mathrm{E}(n)$. Tällöin

$$E_{A,a} \circ E_{B,b}(x) = A(Bx + b) + a = ABx + Ab + a = E_{AB,Ab+b}(x)$$

kaikille $x \in \mathbb{R}^n$, joten

$$E_{A,a} \circ E_{B,b} = E_{AB,Ab+b} \in \mathrm{E}(n)\,. \tag{2}$$

Yhtälön (1) avulla huomataan, että

$$E_{A,b} \circ E_{A^{-1},-A^{-1}b}(x) = A(A^{-1}x - A^{-1}b) + b = x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Proposition 8.4(3) nojalla

$$E_{A,b}^{-1} = E_{A^{-1},A^{-1}b} \in \mathrm{E}(n)\,. \tag{3}$$

Aliryhmätestin nojalla $\mathrm{E}(n) \leq \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$.

Olkoon H ryhmän G aliryhmä ja N ryhmän G normaali aliryhmä siten, että $G = NH$, Jos $N \lhd G$ ja $N \cap H = \{\mathrm{id}\}$.Tällöin G on ryhmien N ja H sisäinen puolisuora tulo, jolloin käytetään merkintää $G = N \rtimes H$.

Jos $\widetilde{N} \cong N$ ja $\widetilde{H} \cong H$ ja $G = N \rtimes H$, niin G on ryhmien $\widetilde{N}$ ja $\widetilde{H}$ (abstrakti) puolisuora tulo, $G \cong \widetilde{N} \rtimes \widetilde{H}$.

8. Osoita, että $\mathrm{T}(n) \lhd \mathrm{E}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n) \cong \mathrm{O}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$.

Ratkaisu. Olkoon $P_0 \colon \mathrm{E}(n) \to \mathrm{O}(n)$, $P_0(E_{A,b}) = A$. Yhtälön (2) nojalla P_0 on homomorfismi. Jokaiselle $A \in \mathrm{O}(n)$ pätee $P_0(E_{A,0}) = A$, joten P_0 on surjektio. Lisäksi

$$\ker P_0 = \{F \in \mathrm{E}(n) : P_0(F) = I_n\} = \{E_{I_n,b} : b \in b\} = \mathrm{T}(n)\,,$$

joten ryhmien isomorfismilauseen nojalla $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n) \cong \mathrm{O}(n)$.

Kuvaus $\phi \colon \mathrm{O}(n) \to \mathrm{E}(n)$, $\phi(A) = E_{A,0}$ on homomorfismi yhtälön (2) nojalla. Se on määritelmänsä nojalla injektio, joten ryhmät $\mathrm{O}(n)$ ja $\underline{\mathrm{O}}(n) = \phi(\mathrm{O}(n))$ ovat isomorfisia.

Osoitetaan, että $\mathrm{E}(n)$ on aliryhmiensä $\mathrm{T}(n)$ ja $\underline{\mathrm{O}}(n)$ sisäinen puolisuora tulo. Olkoon $E_{A,b} \in \mathrm{E}(n)$. Tällöin $E_{A,b} = T_b \circ E_{A,0}$, joten $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n)\underline{\mathrm{O}}(n)$ Jos $E_{A,b} \in \underline{\mathrm{O}}(n) \cap \mathrm{T}(n)$, niin $b = 0$ ja $A = I_n$, joten $E_{A,b}$ on identtinen kuvaus. Siis $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \underline{\mathrm{O}}(n)$ sisäisenä puolisuorana tulona, joten $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$ abstraktina puolisuorana tulona.

Huomaa: Aliryhmän $\mathrm{T}(n)$ normaaliuden voi tarkastaa ilman homomorfismin P_0 käyttöäkin, mutta tällöin ei päästä suoraan kiinni tekijäryhmään: Yhtälöistä (2) ja (3) seuraa, että $\mathrm{T}(n) \leq \mathrm{E}(n)$. Tämä on toki helppo tarkastaa suoraankin.

Olkoot $A \in \mathrm{O}(n)$ ja $T_b \in \mathrm{T}(n)$. Tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$A \circ T_b \circ A^{-1}(x) = A(A^{-1}(x) + b) = x + Ab = T_{Ab}(x)\,,$$

joten $A \circ T_b \circ A^{-1} = T_{Ab} \in \mathrm{T}(n)$. Siis $\mathrm{T}(n) \lhd \mathrm{E}(n)$.