Algebra 1: Ryhmät 2020

Harjoitus 6: Ratkaisuja

1. Olkoon $n \geq 3$. Olkoot $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, \ldots, n\}$ siten, että $a \neq b \neq c \neq a$ ja $d \neq e \neq f \neq d$. Osoita, että on $\sigma \in A_n$, jolle pätee $\{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\} = \{d, e, f\}$.

Ratkaisu. Määritellään permutaatio $\sigma_0 \in S_n$ valitsemalla $\sigma_0(a) = d$, $\sigma_0(b) = e$ ja $\sigma_0(c) = f$ ja laajentamalla kuvaus koko joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$ valitsemalla mikä tahansa bijektio joukosta $\{1, 2, \ldots, n\} - \{a, b, c\}$ joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\} - \{d, e, f\}$. Jos $\sigma_0 \in A_n$, olemme löytäneet halutun permutaation σ^{abc}_{def}. Muussa tapauksessa $(de)\sigma_0 \in A_n$ on haluttu permutaatio.

2. Osoita, että $Q_8/Z(Q_8) \cong K_4$.

Ratkaisu. Viidensien harjoitusten tehtävässä 12.3 osoitettiin, että $Z(Q_8) \trianglelefteq Q_8$, joten tekijäryhmä voidaan muodostaa. Kaavojen (4.2) nojalla $Z(Q_8) \leq \{1, -1\}$. Toisaalta selvästi $\{1, -1\} \leq Z(Q_8)$, joten $Z(Q_8) = \{1, -1\}$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi olkoon $Z = Z(Q_8)$. Tekijäryhmä Q_8/Z koostuu sivuluokista Z, iZ, jZ ja kZ ja sen laskutaulu on

$$\begin{array}{c|cccc}
\cdot & Z & iZ & jZ & kZ \\
\hline
Z & Z & iZ & jZ & kZ \\
iZ & iZ & Z & kZ & jZ \\
jZ & jZ & kZ & Z & iZ \\
kZ & kZ & jZ & iZ & Z
\end{array}.$$

Vertaamalla ryhmän $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong K_4$ laskutaulun

$$\begin{array}{c|cccc}
+ & (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\
\hline
(0,0) & (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\
(0,1) & (0,1) & (0,0) & (1,1) & (1,0) \\
(1,0) & (1,0) & (1,1) & (0,0) & (0,1) \\
(1,1) & (1,1) & (1,0) & (0,1) & (0,0)
\end{array}$$

kanssa näemme, että esimerkiksi kuvaus $Z \mapsto (0,0)$, $iZ \mapsto (0,1)$, $jZ \mapsto (1,0)$, $kZ \mapsto (1,1)$ on isomorfismi.

3. Olkoon $H \trianglelefteq A_n$ normaali aliryhmä, joka sisältää ainakin yhden 3-syklin. Osoita, että $H = A_n$.

Ratkaisu. Olkoon $(abc) \in H$. Tällöin myös $(acb) = (abc)^2 \in H$, joten molemmat 3-syklit, joissa alkiot a, b ja c esiintyvät ovat aliryhmässä H. Olkoot $d, e, f \in \{1, 2, \ldots, n\}$ siten, että $d \neq e \neq f \neq d$ ja olkoon $\sigma^{abc}_{def} \in A_n$ Tehtävässä 1 löydetty parillinen permutaatio. Tällöin $\left\{\sigma^{abc}_{def}(abc)(\sigma^{abc}_{def})^{-1}, \sigma^{abc}_{def}(acb)(\sigma^{abc}_{def})^{-1}\right\} = \{(def), (dfe)\}$. Oletuksen mukaan H on normaali, joten joten $\{(def), (dfe)\} \subset H$. Siis H sisältää kaikki 3-syklit. Lauseen 10.21 nojalla $H = A_n$.

4. Todista Propositio 12.16: Olkoon G ryhmä. Aliryhmä $H \leq G$ on normaali aliryhmä, jos ja vain jos se on jonkin ryhmässä G määritellyn ryhmähomomorfismin ydin.

Ratkaisu. Ryhmähomomorfismin ydin on normaali Seurauksen 12.8 nojalla. Jos $H \trianglelefteq G$, niin ryhmähomomorfismin $\pi\colon G \to G/H$ ydin on $H \leq G$, sillä $H \in G/H$ on tekijäryhmän neutraalialkio.

5. Osoita, että $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{S}^1$.

Ratkaisu. Kuvaus $\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{S}^1$, $\phi(z) = \frac{z}{|z|}$ on homomorfismi, sillä kaikille $z, w \in \mathbb{C}^\times$ pätee

$$\phi(zw) = \frac{zw}{|zw|} = \frac{zw}{|z||w|} = \frac{z}{|z|}\frac{w}{|w|} = \phi(z)\phi(w)\,.$$

Homomorfismi ϕ on surjektio, sillä $\phi(z) = z$ kaikille $z \in \mathbb{S}^1$. Lisäksi

$$\ker\phi = \{z \in \mathbb{C}^\times : z = |z|\} = \mathbb{R}_+\,,$$

joten väite seuraa ryhmien isomorfismilauseesta

6. Olkoon H_3 3-ulotteinen Heisenbergin ryhmä.Olkoon $\psi\colon H_3 \to (\mathbb{R}^2, +)$,

$$\psi\Big(\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big) = (a, b)\,.$$

Osoita, että ψ on homomorfismi ja määritä sen ydin. Osoita, että $H_3/\ker\psi \cong (\mathbb{R}^2, +)$.

Ratkaisu. Olkoot $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\psi\Big(\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a' & c'\\ 0 & 1 & b'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big) &= \psi\Big(\begin{pmatrix}1 & a+a' & c+ab'+c'\\ 0 & 1 & b+b'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big)\\ &= (a+a', b+b') = (a,b) + (a'+b')\\ &= \psi\Big(\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big) + \psi\Big(\begin{pmatrix}1 & a' & c'\\ 0 & 1 & b'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big)\,,\end{aligned}$$

joten ψ on homomorfismi. Ryhmän H_3 määritelmästä näkee suoraan, että ψ on surjektio, joten ryhmien isomorfismilauseen (Seuraus 12.18) nojalla $H_3/\ker\psi \cong (\mathbb{R}^2, +)$. Homomorfismin ψ ydin on

$$\ker\psi = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & c\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : c \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Olkoon G ryhmä. Alkioiden $a, b \in G$ kommutaattori on $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Ryhmän G kommutaattorialiryhmä $[G, G]$ on kaikkien kommutaattorien $[a, b]$, $a, b \in G$ virittämä aliryhmä

$$[G, G] = \langle [a, b] : a, b \in G\rangle.$$

7. Osoita, että $[G, G] \trianglelefteq G$.

Ratkaisu. Määritelmänsä mukaan $[G, G] \le G$. Proposition 9.12 nojalla $[G, G]$ koostuu alkioista $[a_1, b_1]^{\pm}[a_2, b_2]^{\pm}\cdots[a_k, b_k]^{\pm}$, missä $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k \in G$. Tarkastelua helpottaa, kun huomaa, että kommutaattorin käänteisalkio on kommutaattori:

$$[a, b][b, a] = aba^{-1}b^{-1}bab^{-1}a^{-1} = e\,,$$

missä $e \in G$ on neutraalialkio. Siis ryhmän $[G, G]$ alkiot ovat muotoa $[a_1, b_1][a_2, b_2]\cdots[a_k, b_k]$, missä $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k \in G$.

Huomataan, että

$$g[a, b]g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) = [gag^{-1}, gbg^{-1}]\,.$$

Siispä alkioille $[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k] \in [G, G]$ ja $g \in G$ pätee

$$\begin{aligned} g[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k]g^{-1} &= (g[a_1, b_1]g^{-1})(g[a_2, b_2]g^{-1}) \cdots (g[a_k, b_k]g^{-1}) \\ &= [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}][ga_2g^{-1}, gb_2g^{-1}] \cdots [ga_kg^{-1}, gb_kg^{-1}] \\ &= [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}][ga_2g^{-1}, gb_2g^{-1}] \cdots [ga_kg^{-1}, gb_kg^{-1}] \in [G, G] \,. \end{aligned}$$

Proposition 12.5 nojalla $[G, G] \trianglelefteq G$.

8. Osoita, että $G/[G, G]$ on kommutatiivinen ryhmä.

Ratkaisu. Olkoot $g, h \in G$. Tällöin alkioille $g[G, G], h[G, G] \in G/[G, G]$ pätee

$$\begin{aligned} g[G, G]h[G, G](g[G, G])^{-1}(h[G, G])^{-1} &= g[G, G]h[G, G]g^{-1}[G, G]h^{-1}[G, G] \\ &= ghg^{-1}h^{-1}[G, G] = [G, G] \,, \end{aligned}$$

joten $g[G, G]h[G, G] = h[G, G]g[G, G]$.