Algebra 1: Ryhmät 2020

Harjoitus 5: Ratkaisuja

1. Määritä kaikki ryhmien $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ ja $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ aliryhmät.

Ratkaisu. Lagrangen lauseen nojalla ryhmällä $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ voi koko ryhmän $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ja aliryhmän $\{0 + 6\mathbb{Z}\}$ lisäksi olla aliryhmiä, joiden kertaluvut ovat 2 tai 3. Tällaiset aliryhmät ovat syklisiä, koska mahdolliset kertaluvut 2 ja 3 ovat alkulukuja. Ryhmä $\langle 3 + 6\mathbb{Z}\rangle$ on ainoa kahden alkion aliryhmä, sillä $\langle 3 + 6\mathbb{Z}\rangle$ on ainoa alkio, jonka kertaluku on 2. Kertaluvun 3 alkioita on 2, alkiot $2+6\mathbb{Z}$ ja $4+6\mathbb{Z}$, ja ne virittävät saman aliryhmän $\langle 2+6\mathbb{Z}\rangle = \langle 4+6\mathbb{Z}\rangle$.

Lagrangen lauseen nojalla ryhmällä $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ on vain triviaalit aliryhmät $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ja $\{0 + 7\mathbb{Z}\}$, koska 7 on alkuluku.

2. Osoita, että $Q_8 \leq \mathbb{H}^\times$.

Ratkaisu. Koska $Q_8 \subset \mathbb{H}^\times$ on määritelty luettelemalla 8 alkiota. Luvussa 4.3. osoitettiin, että

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \tag{1}$$

ja

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}\,. \tag{2}$$

Siis kaikille $x, y \in Q_8$ pätee $xy \in Q_8$. Lisäksi yhtälöistä (1) seuraa

$$\mathbf{i}(-\mathbf{i}) = (-\mathbf{i})\mathbf{i} = \mathbf{j}(-\mathbf{j}) = (-\mathbf{j})\mathbf{j} = \mathbf{k}(-\mathbf{k}) = (-\mathbf{k})\mathbf{k} = 1\,, \tag{3}$$

joten $x^{-1} \in Q_8$ jokaiselle $x \in Q_8$. Aliryhmätestin nojalla $Q_8 < \mathbb{H}^\times$.

3. Piirrä ryhmän Q_8 aliryhmäkaavio.

Ratkaisu. Lagrangen lauseen nojalla mahdolliset aliryhmien koot ovat 1, 2, 4 ja 8. Ainoastaan alkion -1 kertaluku on 2, se virittää kertaluvun 2 syklisen ryhmän. Alkioiden $\mp\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ ja $\pm\mathbf{k}$ kertaluku on 4, ne virittävät yhteensä kolme kertaluvun 4 syklistä ryhmää. (Esimerkiksi $\langle \mathbf{i}\rangle = \{\mathbf{i}, -1, -\mathbf{i}, 1\} = \langle -\mathbf{i}\rangle$ ja vastaavasti alkioille $\pm\mathbf{j}$ ja $\pm\mathbf{k}$.) Lisäksi kaaviossa ovat triviaalit aliryhmät $\{1\}$ ja Q_8.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & Q_8 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\langle \mathbf{i}\rangle \arrow[dr] & \langle \mathbf{j}\rangle \arrow[d] & \langle \mathbf{k}\rangle \arrow[dl] \\
 & \langle -1\rangle \arrow[d] & \\
 & \{1\} &
\end{tikzcd}$$

4. Olkoon G ryhmä, jossa on korkeintaan 5 alkiota. Osoita, että G on kommutatiivinen.[1]

Ratkaisu. Kertalukujen 1, 2, 3 ja 5 ryhmät ovat syklisiä Seurauksen 11.14 nojalla. Siis ne ovat kommutatiivisia esimerkiksi Lauseen 9.20(1) nojalla, koska ryhmät $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ovat kommutatiivisia.

[1] Kertaluku 4 teettää eniten työtä.

Olkoon G ryhmä, jossa on 4 alkiota. Jos G on syklinen, niin se on kommutatiivinen kuten edellä. Oletetaan, että G ei ole syklinen. Seurauksen 11.13 nojalla jokaisen alkion $g \in G$, joka ei ole neutraalialkio, kertaluku on 2. Harjoitustehtävän 9.14 nojalla G on kommutatiivinen. [2]

5. Osoita, että $S_4 = \langle (12), (1234) \rangle$.

Ratkaisu. Ryhmässä S_4 on $4! = 24$ alkiota, joten Lagrangen lauseen nojalla riittää osoittaa, että aliryhmässä $\langle (12), (1234) \rangle$ on vähintään 13 alkiota. Tällaisen 13 alkion osajoukon voi löytää monella eri tavalla, esimerkiksi näin: Virittäjien virittämissä syklisissä aliryhmissä on yhteensä 5 alkiota id, (12), (1234), $(1234)^2 = (13)(24)$ ja $(1234)^3 = (4321)$. Muita alkioita ovat esimerkiksi $(12)(1234) = (234)$ ja $(234)^2 = (432)$, $(1234)(12) = (134)$, $(134)^2 = (431)$ ja $(12)(1234)(12) = (1342)$. Sen potensseista saadaan $(14)(23)$ ja (2431), jolloin on löydetty 12 alkiota. Kun huomataan vielä, että esimerkiksi $(12)(1234)^4 = (12)(13)(24) = (1324)$ ei ole aiemmassa luettelossa, niin tarvittavat 13 alkiota on löydetty.

6. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon $\mathscr{R}_n$ niiden laskutoimitusten $*$ joukko, joille laskutoimituksella varustettu joukko $(\{1, 2, \ldots, n\}, *)$ on ryhmä. Osoita, että relaatio $\sim$, joka määritellään asettamalla $* \sim \circledast$, jos ja vain jos $(\{1, 2, \ldots, n\}, *) \cong (\{1, 2, \ldots, n\}, \circledast)$, on ekvivalenssirelaatio.[3]

Ratkaisu. Tarkastetaan, että ekvivalenssirelaation määrittelevät ominaisuudet ovat voimassa:

(1) Olkoon $* \in \mathscr{R}_n$. Identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon ((\{1, 2, \ldots, n\}, *) \to (\{1, 2, \ldots, n\}, *))$ on isomorfismi, joten $* \sim *$.

(2) Olkoot $*, \circledast \in \mathscr{R}_n$. Jos $* \sim \circledast$, niin on isomorfismi

$$\phi\colon (\{1, 2, \ldots, n\}, *) \to (\{1, 2, \ldots, n\}, \circledast))\,.$$

Proposition 8.18/Proposition 1.8 nojalla $\phi^{-1}\colon ((\{1, 2, \ldots, n\}, \circledast) \to (\{1, 2, \ldots, n\}, *))$ on isomorfismi, joten $\circledast \sim *$.

(3) Olkoot $*, \circledast, \boxtimes \in \mathscr{R}_n$. Jos $* \sim \circledast$ ja $\circledast \sim \boxtimes$, niin on isomorfismit

$$\phi\colon (\{1, 2, \ldots, n\}, *) \to (\{1, 2, \ldots, n\}, \circledast))$$

ja

$$\psi\colon (\{1, 2, \ldots, n\}, \circledast) \to (\{1, 2, \ldots, n\}, \boxtimes))\,.$$

Kuvaus $\psi \circ \phi\colon (\{1, 2, \ldots, n\}, *) \to (\{1, 2, \ldots, n\}, \boxtimes))$ on bijektioiden yhdistettynä kuvauksena bijektio ja lisäksi se on homomorfismi: Kaikille $1 \le i, j \le n$ pätee

$$\psi \circ \phi(i * j) = \psi(\phi(i * j)) = \psi(\phi(i) \circledast \phi(j)) = \psi(\phi(i)) \boxtimes \psi(\phi(j)) = \psi \circ \phi(i) \boxtimes \psi \circ \phi(j)\,.$$

Siis $* \sim \boxtimes$.[4]

Seuraava esimerkki havainnollistaa tehtävän joukkoa $\mathscr{R}_n$ tapauksessa $n = 2$: Joukossa $\{1, 2\}$ on esimerkiksi seuraavat kaksi laskutoimitusta

$$\begin{array}{c|cc} * & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \qquad \text{ja} \qquad \begin{array}{c|cc} \circ & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\,.$$

[2] Itse asiassa se on Kleinin neliryhmä Proposition 9.24 nojalla, mutta tätä ei pyydetty todistamaan.

[3] $\cong$ on ryhmien isomorfismi, katso luku 8.3

[4] Tämä väite on Propositio 8.18(3).

Laskutoimituksella varustetut joukot $(\{1,2\},*)$ ja $(\{1,2\},\circ)$ ovat ryhmiä. Siis $*$ ja $\circ$ ovat joukon $\mathscr{R}_2$ alkioita, jälkimmäisen ryhmän neutraalialkio on siis 2 eikä 1. Permutaatio $(12)\colon (\{1,2\},*) \to (\{1,2\},\circ)$ on isomorfismi.

7. Todista Propositio 12.7(2): Olkoon $\phi\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Olkoon $H' \trianglelefteq G'$. Tällöin $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Ratkaisu. Proposition 9.7(2) nojalla $\phi^{-1}(H') \leq G$. Olkoon $g \in G$ ja olkoon $h \in \phi^{-1}(H')$. Tällöin $\phi(h) \in H'$. Proposition 8.19 nojalla $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$, joten

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1} \in H',$$

koska $H' \trianglelefteq G'$. Siis $ghg^{-1} \in \phi^{-1}(H')$, joten Proposition 12.5 nojalla $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

8. (a) Osoita, että ryhmän G keskus $Z(G)$ on normaali aliryhmä.

(b) Osoita, että ryhmän Q_8 kaikki aliryhmät ovat normaaleja.

Ratkaisu. (a) Toisissa harjoituksissa tehdyssä Harjoitustehtävässä 9.6 osoitettiin, että $Z(G) \leq G$. Olkoon $g \in G$ ja olkoon $h \in Z(G)$. Keskuksen määritelmän nojalla

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h,$$

joten Proposition 12.5 nojalla $Z(G) \trianglelefteq G$.

(b) Tehtävässä 3 näimme, että

$$[Q_8 : \langle \mathbf{i} \rangle] = [Q_8 : \langle \mathbf{j} \rangle] = [Q_8 : \langle \mathbf{k} \rangle] = 2,$$

joten Proposition 12.3 nojalla $\langle \mathbf{i} \rangle \lhd Q_8$, $\langle \mathbf{j} \rangle \lhd Q_8$ ja $\langle \mathbf{k} \rangle \lhd Q_8$. On helppo tarkastaa, että $\{1,-1\} \leq Z(Q_8)$ ja yhtälöt (2) osoittavat, että ryhmän muut alkiot eivät ole keskuksessa. Siis (a)-kohdan nojalla $\{1,-1\} \lhd Q_8$.

Tämän tehtävän voi ratkaista myös tarkastelemalla aliryhmien sivuluokkia tai Proposition 12.5. avulla.