Algebra 1: Ryhmät 2020

Harjoitus 4: Ratkaisuja

1. Täydennä Proposition 10.5 todistus induktiotodistukseksi.

Propositio 10.5. Jokainen sykli on vaihtojen tulo.

Ratkaisu. Sykli, jonka pituus on 2 on vaihto. Oletetaan, että kaikki syklit, joiden pituus on korkeintaan $m-1$ ovat vaihtojen tuloja. Olkoon $(a_1 a_2 \cdots a_m)$ sykli, jonka pituus on m. Tällöin on vaihdot $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ siten, että $(a_1 a_2 \cdots a_{m-1}) = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n$. Proposition 10.5. todistusideassa olleen vihjeen perusteella huomaamme, että

$$(a_1 a_2 \cdots a_m) = (a_1 a_m)(a_1 a_2 \cdots a_{m-1}) = (a_1 a_m)\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n \,,$$

joten $(a_1 a_2 \cdots a_m)$ on vaihtojen tulo. Väite seuraa induktioperiaatteesta.

2. Osoita, että $S_3 = \langle (12), (23) \rangle$.

Ratkaisu. Koska (12) ja (23) ovat kaikki ryhmän S_3 alkeisvaihdot, väite seuraa suoraan Lauseesta 10.8.

Toinen tapa: Molemmat virittäjäalkiot ovat ryhmässä S_3, samoin id $= (12)(12)$ ja alkiot $(123) = (12)(23)$, $(132) = (123)^2$ ja $(13) = (12)(23)(12)$. Olemme löytäneet kaikki 6 ryhmän S_3 alkiota, joten $S_3 = \langle (12), (23) \rangle$.

3. Olkoot $\alpha_n = (123 \cdots n)$ ja $\beta = (123)$. Määritä permutaatiot

$$\sigma_1 = \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \quad \text{ja} \quad \sigma_2 = \beta^{-1} \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \beta$$

jokaiselle $3 \le x < n$.

Ratkaisu. Jos $y \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{2, 3, x+1\}$, niin $\alpha_n^{-1}(y) \notin \{1, 2, x\}$ ja selvästi $\sigma_1(y) = y$. Jäljelle jäävät alkiot muodostavat 3-syklin ja $\sigma_1 = (2\,3\,x+1)$. Siis

$$\sigma_2 = (321)\sigma_1(123) = (321)(2\,3\,x+1)(123) = (1\,2\,x+1)\,.$$

4. Määritä permutaatiot

- $(1y2)(12x)(12y)$ kaikille $x, y \ge 3$, $x \ne y$ ja
- $(1xt)(1yz)(1tx)$ kaikille $x, y, t, z > 1$, kun $\#\{x, y, t, z\} = 4$.

Ratkaisu. $(1y2)(12x)(12y) = (1\,x\,y)$ ja $(1xt)(1yz)(1tx) = (x\,y\,z)$.

5. Osoita, että jokaiselle parittomalle $n \ge 5$ pätee $A_n = \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$.

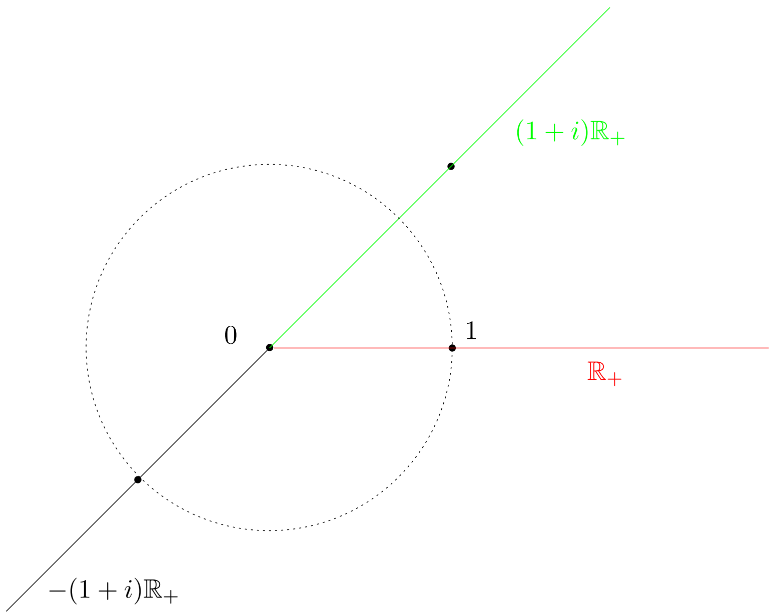
Huomaa: Jälkimmäisen kohdan ehto $\#\{x, y, t, z\} = 4$ tarkoittaa, että mitkään kaksi alkioista x, y, t, z eivät ole samoja.

Ratkaisu. 3-syklit ovat parillisia ja koska n on pariton, myös n-sykli $(123 \cdots n)$ on pariton. Siis $\langle (123), (123 \cdots n) \rangle \le A_n$. Tehtävän 3 nojalla $(12x) \in \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$ kaikilla $3 \le x \le n$. Tehtävän 4 nojalla kaikki muutkin 3-syklit ovat aliryhmässä $\langle (123), (123 \cdots n) \rangle$, joten Proposition 10.21 nojalla $\langle (123), (123 \cdots n) \rangle = A_n$

6. Osoita, että $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$ ja määritä aliryhmän $\mathbb{R}_+$ sivuluokat ryhmässä $\mathbb{C}^\times$. Piirrä kuva, joka havainnollistaa sivuluokkien määräämää ositusta.

Ratkaisu. Esimerkkien 9.1 ja 9.4 nojalla $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$. Toisaalta tämä on helppo tarkastaa aliryhmätestillä, koska positiivisten reaalilukujen tulo on positiivinen reaaliluku ja positiivisen reaaliluvun käänteisluku on positiivinen reaaliluku.

Kompleksiluvun $a \in \mathbb{C}^\times$ sivuluokka $a\mathbb{R}_+ = \{at : t \in \mathbb{R}_+\}$ on luvun a kautta kulkeva puolisuora. Proposition 11.4 mukaan $a\mathbb{R}_+ = b\mathbb{R}_+$, jos ja vain jos $a/b \in \mathbb{R}_+$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että on $t_0 \in \mathbb{R}_+$, jolle $a = bt_0$.



7. Todista Propositio 11.4: Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Tällöin
(1) $xH = yH$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Erityisesti $xH = H$, jos ja vain jos $x \in H$.
(2) $Hx = Hy$, jos ja vain jos $xy^{-1} \in H$. Erityisesti $Hx = H$, jos ja vain jos $x \in H$.

Ratkaisu. (1) Olkoot $x, y \in G$. Oletetaan, että $xH = yH$. Tällöin jokaisella $h \in H$ pätee $xh \in yH$, joten samaan tapaan on $k \in H$ siten, että $xh = yk$. Siis $y^{-1}x = kh^{-1} \in H$.

Oletetaan sitten, että $y^{-1}x \in H$. Olkoon $h \in H$. Tällöin

$$xh = x(x^{-1}yy^{-1}x)h = (xx^{-1})y(y^{-1}x)h = y(y^{-1}xh) \in yH\,,$$

joten $xH \subset yH$. Toisaalta myös $x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in H$, joten

$$yh = y(y^{-1}xx^{-1}y)h = x(x^{-1}yh) \in xH\,.$$

Siis $xH = yH$.

Kohta (2) todistetaan samaan tapaan.

8. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H < G$. Osoita, että tekijäjoukkojen välinen kuvaus $b : G/H \to H\backslash G$, $b(aH) = Ha^{-1}$ on bijektio.

Ratkaisu. Proposition 11.4 kohdan (1) nojalla $xH = yH$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$ ja kohdan (2) nojalla

$$b(yH) = Hy^{-1} = Hx^{-1} = b(xH)\,, \tag{1}$$

jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Siis kuvaus b on hyvin määritelty.

Edellä tehty lasku (1) osoittaa myös, että b on injektio: Jos $b(yH) = b(xH)$, niin $y^{-1}x \in H$, joten $xH = yH$. Olkoon $Ha \in H\backslash G$. Tällöin $b(a^{-1}H) = Ha$, joten b on surjektio. Siis b on bijektio.