Algebra 1: Ryhmät 2020

Harjoitus 3: Ratkaisuja

1. Osoita, että

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i\sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

on ryhmän $\mathbb{C}^\times$ aliryhmä.

Ratkaisu. Joukko $\mathbb{S}^1$ ei ole tyhjä, sillä esimerkiksi $1 \in \mathbb{S}^1$. Olkoot $z, w \in \mathbb{S}^1$. Proposition 1.22 nojalla $|zw| = |z||w| = 1$, joten $zw \in \mathbb{S}^1$. Lisäksi $z\bar{z} = \mathbf{n}(z) = |z|^2 = |\bar{z}| = 1$, joten $\bar{z} = z^{-1} \in \mathbb{S}^1$. Aliryhmätestin nojalla $\mathbb{S}^1 < \mathbb{C}^\times$.

Yhtälö $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i\sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$ on tunnettu aiemmilta kursseilta, esimerkiksi napakoordinaattien yhteydestä. Tällöinhän t on ympyrän kulmaparametri, kun kulmaa mitataan vastapäivään alkaen tason pisteestä $(1, 0) = 1 + 0i$.

2. Anna esimerkki surjektiivisesta homomorfismista $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$.

Ratkaisu. Kuvaus $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 < \mathbb{C}^\times$, $\phi(t) = \cos(t) + i\sin(t)$, on surjektio Harjoitustehtävän 1 nojalla. Lisäksi kaikille $s, t \in \mathbb{R}$ pätee trigonometristen funktioiden tunnettujen yhteenlaskusääntöjen nojalla

$$\phi(s+t) = \cos(s+t) + i\sin(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) + i\Big(\cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)\Big)\,.$$

Toisaalta kompleksilukujen laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned}\phi(s)\phi(t) &= \Big(\cos(s) + i\sin(s)\Big)\Big(\cos(t) + i\sin(t)\Big)\\ &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) + i\Big(\cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)\Big)\,,\end{aligned}$$

joten väite on todistettu.
Huomaa: Edellä käytetty ϕ ei ole ainoa oikea valinta surjektiiviseksi homomorfismiksi $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$. Samalla laskulla kuin edellä on helppo tarkastaa, että kuvaus $\phi_a\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$, $\phi_a(t) = \cos(at) + i\sin(at)$, on surjektiivinen homomorfismi kaikilla $a \in \mathbb{R}^\times$. Erityisen luonteva valinta olisi $a = 2\pi$.

3. Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että jokaisen alkion $g \in G$, joka ei ole neutraalialkio, kertaluku on 2. Osoita, että G on kommutatiivinen ryhmä.

Ratkaisu. Olkoon $e \in G$ neutraalialkio ja olkoot $g, h \in G$. Oletuksen mukaan $g = g^{-1}$ ja $h = h^{-1}$. Siis

$$g^{-1}h^{-1}gh = ghgh = (gh)^2 = e\,.$$

Kertomalla yhtälön molemmat puolet oikealta alkiolla hg saadaan $gh = hg$.

4. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \subset G$ äärellinen vakaa osajoukko, jossa on ainakin yksi alkio. Osoita, että $H \leq G$.

Ratkaisu. Koska H on vakaa, ryhmän G laskutoimitus indusoi assosiatiivisen laskutoimituksen joukossa H. Olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Olkoon $h \in H$. Joukko

$$\{h^k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\} \subset H$$

on äärellinen, joten on $k_2 > k_1 \geq 1$ siten, että $h^{k_1} = h^{k_2} = h^{k_2 - k_1}h^{k_1}$. Ryhmän G supistussäännön nojalla $h^{k_2-k_1} = e$, joten $e \in \{h^k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\} \subset H$. Lisäksi $k_2 - k_1 - 1 \geq 0$, joten $h^{k_2-k_1-1} \in H$ ja $h\, h^{k_2-k_1-1} = e$. Siis alkiolla h on käänteisalkio joukossa H. Aliryhmätestin (Propositio 9.3(2)) nojalla $H \leq G$.

5. Todista Propositio 9.24: Olkoon G aliryhmien H ja J sisäinen suora tulo. Tällöin $G \cong H \times J$.

Ratkaisu. Olkoon $\phi\colon H \times J \to HJ$, $\phi(h,j) = hj$. Osoitetaan, että ϕ on isomorfismi. Kuvaus ϕ on ryhmän $G = HJ$ määritelmän nojalla surjektio, joten riittää osoittaa, että se on injektiivinen homomorfismi.

Olkoot $(h_1, j_1), (h_2, j_2) \in H \times J$. Tällöin ryhmien tulon laskutoimituksen määritelmän, kuvauksen ϕ määritelmän, assosiatiivisuuden ja ehdon $hj = jh$ kaikille $h \in H$ ja $j \in J$, ja jälleen kuvauksen ϕ määritelmän nojalla

$$\phi((h_1, j_1), (h_2, j_2)) = \phi(h_1h_2, j_1j_2) = (h_1h_2)(j_1j_2) = (h_1j_1)(h_2j_2) = \phi((h_1, j_1))\phi((h_2, j_2))\,,$$

joten ϕ on homomorfismi.

Olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Olkoon $(h, j) \in \ker\phi$. Tällöin $hj = \phi(h, j) = e$, joten $j = h^{-1} \in H \cap J$. Sisäisen suoran tulon määritelmän nojalla $H \cap J = \{e\}$, joten $j = e$. Tällöin $he = e$, joten $h = e$. Siis $\ker\phi = \{(e, e)\}$ koostuu ryhmän $H \times J$ neutraalialkiosta. Proposition 9.9 nojalla ϕ on injektio.

Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ ortogonaaliryhmä on

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : {}^tAA = I_n\}\,,$$

missä ${}^tA$ on matriisin A transpoosi.

6. Todista Lemma 9.29: $\mathrm{O}(n) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ratkaisu. Identtinen matriisi I_n on osajoukon $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alkio, koska ${}^tI_nI_n = I_n^2 = I_n$. Siis $\mathrm{O}(n)$ ei ole tyhjä. Diagonaalimatriisin $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinantti on 2^n, joten $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Matriisi $D = {}^tD$ ei kuitenkaan ole oma käänteismatriisinsa, joten $D \notin \mathrm{O}(n)$. Siis $\mathrm{O}(n)$ on ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ aito osajoukko.

Olkoot $A, B \in \mathrm{O}(n)$. Tällöin

$${}^t(AB)(AB) = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBB = I_n\,,$$

joten $AB \in \mathrm{O}(n)$. Jos $A \in \mathrm{O}(n)$, niin ortogonaaliryhmän määritelmän nojalla ${}^tA = A^{-1}$. Siis

$${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = I_n\,,$$

joten $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$. Aliryhmätestin nojalla $\mathrm{O}(n)$ on aliryhmä.

7. Olkoot X ja Y epätyhjiä joukkoja ja olkoon $f\colon X \to Y$ bijektio. Osoita, että permutaatioryhmät $\mathrm{Perm}(X)$ ja $\mathrm{Perm}(Y)$ ovat isomorfisia.

Ratkaisu. Jos $b \in \mathrm{Perm}(X)$, niin $f \circ b \circ f^{-1}\colon Y \to Y$ on bijektioiden yhdistettynä kuvauksena bijektio, joten se on ryhmän $\mathrm{Perm}(Y)$ alkio. Kuvaus $\Phi\colon \mathrm{Perm}(X) \to \mathrm{Perm}(Y)$, $\Phi(b) = f \circ b \circ f^{-1}$ on homomorfismi, sillä kaikille $b_1, b_2 \in \mathrm{Perm}(X)$ pätee

$$\Phi(b_1 \circ b_2) = f \circ b_1 \circ b_2 \circ f^{-1} = f \circ b_1 \circ f^{-1} \circ f \circ b_2 \circ f^{-1} = \Phi(b_1) \circ \Phi(b_2)\,.$$

Olkoon $\tilde{b} \in \mathrm{Perm}(Y)$. Tällöin $f^{-1} \circ \tilde{b} \circ f \in \mathrm{Perm}(X)$ ja

$$\Phi(f^{-1} \circ \tilde{b} \circ f) = f \circ f^{-1} \circ \tilde{b} \circ f \circ f^{-1} = \tilde{b}\,,$$

joten Φ on surjektio. Jos $\Phi(b) = \mathrm{id}_Y$, niin $f \circ b \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$, joten

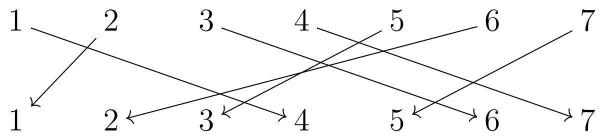
$$f \circ b = f \circ b \circ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_Y \circ f = f\,.$$

Siis

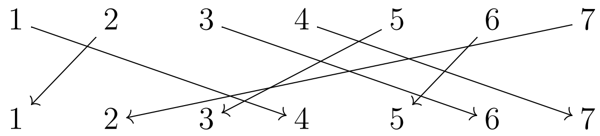
$$b = f^{-1} \circ f \circ b = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X\,,$$

joten $\ker \Phi = \{\mathrm{id}_X\}$. Proposition 9.9 nojalla Φ on injektio.

8. Kirjoita permutaatiot (123)(24) ja (1234)(235) ja kaavioita



ja



vastaavat permutaatiot erillisten syklien tuloina.

Ratkaisu. (123)(24) = (1243), (1234)(235) = (124)(35). Ensimmäinen kaavio antaa syklin (1475362) ja toinen kahden erillisen syklin tulon (1472)(365)