Algebra 1: Ryhmät 2020

Harjoitus 2: Ratkaisuja

Kolmeulotteinen Heisenbergin ryhmä on joukko

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

varustettuna matriisien kertolaskulla.

1. Osoita, että H_3 on ryhmä.

Ratkaisu. Huomataan, että kaikkien joukon H_3 matriisien determinantti on 1, joten $H_3 \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Osoitetaan, että $H_3 \leq \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Joukko H_3 ei ole tyhjä, koska kaikki määritelmässä annetut matriisit ovat tietenkin sen alkioita. Olkoot

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3 \,.$$

Tällöin

$$XA = \begin{pmatrix} 1 & x+a & z+c+xb \\ 0 & 1 & y+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3 \qquad \text{ja} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3 \,,$$

joten aliryhmätestin[1] nojalla $H_3 \leq \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

2. Osoita, että ryhmä H_3 ei ole isomorfinen ryhmän $(\mathbb{R}^3, +)$ kanssa.

Ratkaisu. Jos ryhmät olisivat isomorfisia, niin H_3 olisi kommutatiivinen Proposition 1.10 nojalla, koska $\mathbb{R}^3$ on kommutatiivinen esimerkiksi proposition 8.12 nojalla. Kuitenkin pätee esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

joten H_3 ei ole kommutatiivinen.

Ryhmän G keskus on

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \text{ kaikilla } g \in G\}.$$

3. Olkoon G ryhmä. Osoita, että $Z(G) \leq G$.

Ratkaisu. Neutraalialkio on keskuksessa, joten $Z(G)$ ei ole tyhjä. Olkoot $z, w \in Z(G)$. Tällöin assosiatiivisuuden ja keskuksen määritelmän nojalla kaikille $g \in G$ pätee

$$(zw)g = z(wg) = z(gw) = (zg)w = (gz)w = g(zw) \,,$$

[1] Propositio 9.3(1)

joten $zw \in Z(G)$. Lisäksi Proposition 8.4(4) ja oletuksen $z \in Z(G)$ nojalla saadaan

$$z^{-1}g = (g^{-1}z)^{-1} = (zg^{-1})^{-1} = gz^{-1}\,,$$

joten $z^{-1} \in Z(G)$. Aliryhmätestin nojalla $Z(G) \leq G$.

4. Todista Propositio 9.7(2): Olkoon $\phi\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Tällöin $\phi^{-1}(H') \leq G$ kaikilla $H' \leq G'$. Erityisesti $\ker\phi \leq G$.

Ratkaisu. Olkoot $e \in G$ ja $e' \in G'$ ryhmien G ja G' neutraalialkiot. Olkoon $H' \leq G'$. Tällöin $e' \in H'$ ja $\phi(e) = e'$, joten $e \in \phi^{-1}(H')$. Olkoot $g, h \in \phi^{-1}(H')$. Tällöin siis $\phi(g), \phi(h) \in H'$. Proposition 8.19(2) nojalla

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(g)\phi(h)^{-1} \in H'\,,$$

koska $H' \leq G'$. Aliryhmätestin nojalla $\phi^{-1}(H') \leq G$.

Erityisesti ydin $\ker\phi = \phi^{-1}(\{e'\})$ on edellä osoitetun nojalla ryhmän H aliryhmä.

5. Todista Propositio 9.10: Olkoon G ryhmä, olkoon $I \neq \emptyset$ jokin indeksijoukko ja olkoot $H_i \leq G$ kaikilla $i \in I$. Tällöin

$$\bigcap_{i\in I} H_i \leq G.$$

Ratkaisu. Ryhmän G neutraalialkio on aliryhmässä H_i jokaisella $i \in I$, joten $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$. Olkoot $g, h \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Tällöin $g, h \in H_i$ kaikilla $i \in I$, joten $gh^{-1} \in H_i$ kaikilla $i \in I$. Siis $gh^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Väite seuraa aliryhmätestistä.

6. Osoita, että ryhmät $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ovat isomorfisia.

Ratkaisu. Alkion $(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ monikerrat ovat

$$\begin{aligned}
2(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}) &= (0 + 2\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z})\,,\\
3(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}) &= (1 + 2\mathbb{Z}, 0 + 3\mathbb{Z})\,,\\
4(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}) &= (0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z})\,,\\
5(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}) &= (1 + 2\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}) \quad \text{ja}\\
6(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}) &= (0 + 2\mathbb{Z}, 0 + 3\mathbb{Z})\,.
\end{aligned}$$

Siis $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ovat kuuden alkion syklisiä ryhmiä. Ne ovat isomorfiset Lauseen 9.20 nojalla.

7. Osoita, että $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times$ ja $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$ ovat syklisiä ryhmiä.

Ratkaisu. Luvun 8.4. tulosten nojalla

$$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times = \{1 + 6\mathbb{Z}, 5 + 6\mathbb{Z}\} = \langle 5 + 6\mathbb{Z}\rangle\,.$$

Tämä on kahden alkion syklinen ryhmä, jonka virittää $5+6\mathbb{Z}$, nythän $(5+6\mathbb{Z})^2 = 1+6\mathbb{Z}$.

Luvun 8.4. tulosten nojalla

$$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times = \{1 + 10\mathbb{Z}, 3 + 10\mathbb{Z}, 7 + 10\mathbb{Z}, 9 + 10\mathbb{Z}\}\,.$$

Nyt $(3 + 10\mathbb{Z})^2 = 9 + 10\mathbb{Z}$, $(3 + 10\mathbb{Z})^3 = 7 + 10\mathbb{Z}$ ja $(3 + 10\mathbb{Z})^4 = 1 + 10\mathbb{Z}$, joten $3 + 10\mathbb{Z}$ on syklisen ryhmän $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$ virittäjä. Samaan tapaan nähdään, että myös $7 + 10\mathbb{Z} = -(3 + 10\mathbb{Z})$ on virittäjä.

8. Määritä luvun $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}^{\times}$ kertaluku. Mitkä kompleksiluvut muodostavat aliryhmän $\langle\omega\rangle$?

Ratkaisu. $\omega^2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\omega^3 = -1$, $\omega^4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $\omega^5 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ja $\omega^6 = 1$. Lemman 9.17 nojalla luvun ω kertaluku on 6 ja

$$\langle\omega\rangle = \{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6\}.$$

Aliryhmän $\langle\omega\rangle < \mathbb{C}^{\times}$ pisteet ovat kaikki yksikköympyrällä.

Huomaa: Tehtävässä 8 oli painovirhe maanantaihin 30.4. saakka: ryhmän $\mathbb{C}^{\times}$ tilalla oli vain $\mathbb{C}$, jolloin laskutoimitukseksi on ollut luonnollista valita $+$. Tällöin luvun ω kertaluku on ∞ ja sen virittämä syklinen aliryhmä koostuu luvun ω monikerroista. Tällä muotoilulla tehtävä on myös toimiva vaikkakaan ei ehkä yhtä mielenkiintoinen.