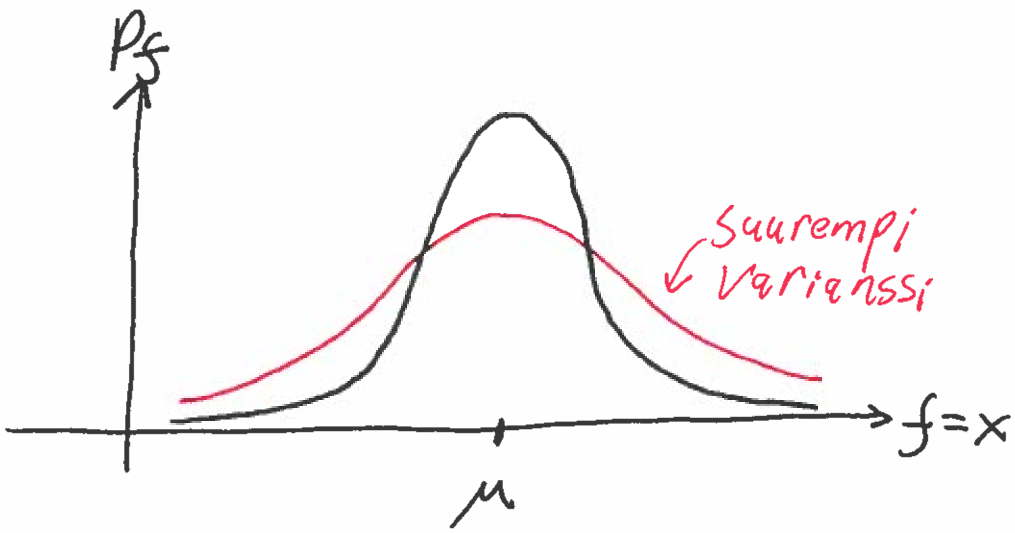
Esim $f \sim N(\mu, \sigma^2)$ eli normaalijakauma. Tiheysfunktio

$$p_f : \mathbb{R} \to [0,\infty),$$

$$p_f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(Gaussin jakauma)

$$\mathbb{E} f = \mu, \quad Var(f) = \sigma^2$$



Normaalijakauma on keskeinen esim. populaatioiden tilastollisessa mallintamisessa. Muita tärkeitä jakaumia esim eksponenttijakauma.

Vastaavasti yhteisjakaumille pätee:

Lause Olkoon $h: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelin funktio, f ja g satm ja $L_{f,g}$ yhteisjakauma.

$$\Rightarrow \mathbb{E}\, h(f,g) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, dL_{f,g}(x,y)$$

Seuraus Olkoon lisäksi $p_{f,g}: \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ yhteisjakauman tiheysfunktio. Tällöin

$$\mathbb{E}\, h(f,g) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, p_{f,g}(x,y)\, dx\,dy$$

Esim $\mathbb{E}(fg) = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, p_{f,g}(x,y)\, dx\,dy$, missä $\mathbb{E}fg$:in törmättiin kovarianssin yhteydessä.

Ehdollinen odotusarvo

Määr (signed measure, vaihtuvamerkkinen mitta)

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tn-avaruus.

(i) $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on vaihtumerkkinen (äärellinen) mitta, jos

$$\mu = \alpha \mu^+ - \beta \mu^-,$$

missä $\alpha, \beta \geq 0$ ja μ^+, μ^- ovat tn-mittoja

(ii) $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ suhteen, jos

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Merkitään

$$\mu \ll \mathbb{P}.$$

Esim Olkoon $f \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$.

$$\mu(A) := \int_A f \, d\mathbb{P} \quad \text{on vaiht. merk.}$$

mitta $\mu << \mathbb{P}$.

<u>Syy</u> $\mathbb{P}(A)=0 \Rightarrow \int_A f\,d\mathbb{P}=0$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j \Rightarrow \alpha\mu^+(\cup A_i) = \int_{\cup A_i} f^+ d\mathbb{P} \overset{HT}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^+ d\mathbb{P}$
$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\mu^+(A_i). \Rightarrow \mu^+$ on mitta. □

$$\boxed{\text{Aset. } \alpha = \int_\Omega f^+ d\mathbb{P} \text{ ja } \mu^+(A) = \frac{\int_A f^+ d\mathbb{P}}{\alpha}}$$

<u>Lause</u> (Radon-Nikodym) Olk. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tn-avaruus ja μ vaihtumerkkinen mitta $\mu << \mathbb{P}$.

$\Rightarrow \exists\ f: \Omega \to \mathbb{R}$ Satm, $f \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$

s.e. $\mu(A) = \int_A f\,d\mathbb{P}$ ja $\int_A g\,d\mu = \int_A gf\,d\mathbb{P}$, $\forall g$ $\mathcal{F}$-mit.

Satm on 1-käs. siinä mielessä, että jos $\tilde{f}$ myös kuten yllä

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{\tilde{f}=f\})=1$.

ei → 133

Todistukseen tarvitaan apukäsitteitä:

Määr. $\mathcal{P} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ on avaruuden $(\Omega, \mathcal{F})$ jako (partition), jos

(i) $E_i \cap E_j = \emptyset$, kun $i \neq j$

(ii) $E_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, m$.

(iii) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$.

$\mathcal{P}'$ on hienompi jako kuin $\mathcal{P}$, jos $\forall E' \in \mathcal{P}' \; \exists E \in \mathcal{P}$ s.e. $E' \subset E$.

Jakojen $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{G}$ yhteinen hienompi jako saadaan ottamalla kaikki joukot muotoa

$$E \cap F \quad \forall E \in \mathcal{P}, \forall F \in \mathcal{G}.$$

Määr

Olkoon ν ja μ äärellisiä mittoja $(\Omega, \mathcal{P})$:illä, joille

$$\nu(E) \leq \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{P}.$$

Määritellään fktio

$$h_{\mathcal{P}} : \Omega \to [0,1]$$

$$h_{\mathcal{P}}(x) = \begin{cases} \frac{\nu(E_k)}{\mu(E_k)}, & \text{jos } \mu(E_k) > 0 \\ 0, & \text{jos } \mu(E_k) = 0, \end{cases}$$

missä $x \in E_k \in \mathcal{P}$.

Voidaan kirjoittaa

$$h_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \frac{\nu(E_k)}{\mu(E_k)} \chi_{E_k}(x),$$

kun otetaan jaosta mukaan vain ne E_k joille $\mu(E_k) > 0$. ei

Esim $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ ja

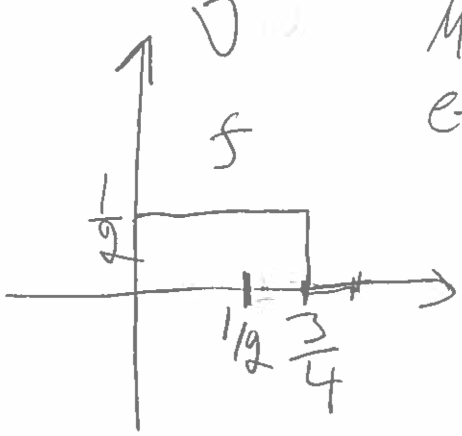
$\mathcal{P} = \{\underbrace{[0,\tfrac{1}{2})}_{E_1}, \underbrace{[\tfrac{1}{2},1]}_{E_2}\}$ ← avaruuden jako. Olkoon

$\nu(A) = \frac{1}{2} m([0,\tfrac{3}{4}] \cap A)$ ja $\underset{\mathbb{P}=}{\mu} = m$ = Leb. mitta.

Mutta millainen on yleinen menetelmä?

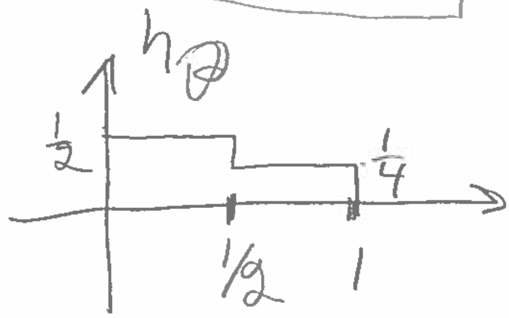
$$h_{\mathcal{P}}(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu(E_1)}{\mu(E_1)}, & x \in E_1 \\ \dfrac{\nu(E_2)}{\mu(E_2)}, & x \in E_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1/4, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

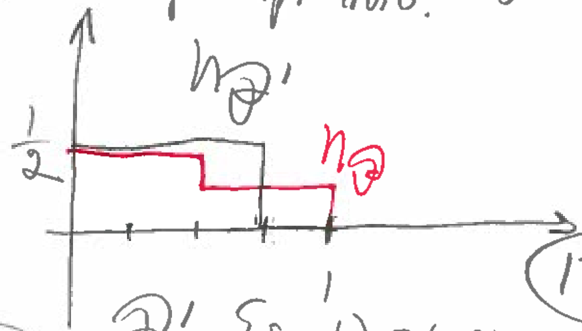


Mitta ν on nyt niin yksink. että tiedetään, että

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad f(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \omega \in [0, \frac{3}{4}] \\ 0, & \omega \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$



→ tiheämpi avaruuden jako.
⇒ parempi arvio.



$\mathcal{P}' = \{[0,\tfrac{1}{4}), [\tfrac{1}{4},\tfrac{2}{4}), \ldots, [\tfrac{3}{4},1]\}$

ei → s.142

__Lemma__ $E \in \mathcal{P}$

$$\Rightarrow \nu(E) = \int_E h_{\mathcal{P}} \, d\mu = \int_E h_{\mathcal{P}'} \, d\mu$$

ja

$$\int_E h_{\mathcal{P}'}^2 \, d\mu = \int_E h_{\mathcal{P}}^2 \, d\mu + \int_E (h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}})^2 \, d\mu \geq \int_E h_{\mathcal{P}}^2 \, d\mu$$

__Esim__ (jatkoa...)

$$E = [\tfrac{1}{2}, 1]$$

$$\nu(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\int_E h_{\mathcal{P}} \, d\mu \underset{\uparrow}{=} \underbrace{\frac{\nu([\frac{1}{2},1])}{\mu([\frac{1}{2},1])}}_{h_{\mathcal{P}}} \cancel{\mu(E)}$$

$h_{\mathcal{P}}$ yks. kert funktio

$$\int_E h_\theta^2 \, d\mu = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

$$\int_E (h_{\theta'} - h_\theta)^2 \, d\mu = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ \int_E h_\theta^2 \, d\mu &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}.$$

Tod Lemmalle

$$\int_E h_{\mathcal{Q}} d\mu \underset{E=\cup E_i}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{E_i'} h_{\mathcal{Q}'} d\mu = \sum_{i=1}^{k} \frac{\nu(E_i)}{\cancel{\mu(E_i)}} \cancel{\mu(E_i)}$$

$= \nu(E)$. Sama lasku $h_{\mathcal{Q}}$:ille.

$$\int_E h_{\mathcal{Q}'}^2 d\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_{E_i'} h_{\mathcal{Q}'}^2 d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\nu(E_i)}{\mu(E_i)}\right)^2 \mu(E_i) = \sum \frac{\nu(E_i)^2}{\mu(E_i)}.$$

$$\int_E h_{\mathcal{Q}}^2 d\mu + \int_E (h_{\mathcal{Q}'} - h_{\mathcal{Q}})^2 d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\nu(E)}{\mu(E)}\right)^2 \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\nu(E_i)}{\mu(E_i)} - \frac{\nu(E)}{\mu(E)}\right)^2 \mu(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{\nu(E)}{\mu(E)}\right)^2 \mu(E_i) + \frac{\nu(E_i)^2}{\mu(E_i)} - 2 \frac{\nu(E_i)}{\cancel{\mu(E_i)}} \frac{\nu(E)}{\mu(E)} \cancel{\mu(E_i)} \right.$$

136

$$+\left(\frac{\nu(E)}{\mu(E)}\right)^2 \mu(E_i)\Bigg]$$

$$= \cancel{\frac{\nu(E)^2}{\mu(E)}} + \left[\sum \frac{\nu(E_i)^2}{\mu(E_i)}\right] - \cancel{\frac{\nu(E)^2}{\mu(E)}}. \quad \square$$

<u>Lause</u> Olkoon $\nu(E) \le \mu(E)$ äärellisiä mittoja $\forall E \in \mathfrak{A}$.
Tällöin $\exists\, h : \Omega \to [0,1]$ satm
s.e. a) $\nu(E) = \int_E h \, d\mu \quad \forall E \in \mathfrak{A}$ ja

b) $\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega hg \, d\mu$, kun

$g \ge 0$ mitallinen funktio.

<u>Syy</u> Olkoon

$$M = \sup_{\mathcal{P}} \int_\Omega h_{\mathcal{P}} \, d\mu,$$ missä

sup otetaan kaikkien jakojen

yli. Olemassa, koska

Lemma $\int \eta_{\Theta} d\mu = \int \eta_{\Theta'} d\mu$ ja

$|\eta_{\Theta}| \leq 1$ $(\nu \leq \mu)$.

Valitse Θ_i, $i = 1, 2, \ldots$ s.e.

$\int_{\Omega} \eta_{\Theta_i} d\mu \to M$.

Aseta

$\Theta'_k = \Theta_1, \ldots, \Theta_k$:n yhteinen

hienompi jako.

Lemma $\Rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} \eta_{\Theta_k} d\mu}_{\to M} \leq \int_{\Omega} \eta_{\Theta'_k} d\mu \leq M$

$\Rightarrow \lim \int_{\Omega} \eta_{\Theta'_k} d\mu = M$

Lemma $\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega h_{\Theta_m'}^2}_{\to M} = \underbrace{\int_\Omega h_{\Theta_k'}^2}_{\to M} + \int (h_{\Theta_k'} - h_{\Theta_m'})^2$

$\Rightarrow \int_\Omega (h_{\Theta_k'} - h_{\Theta_m'})^2 d\mu$ pieni kunhan $k, m > N$.

$\Rightarrow$ $h_{\Theta_k'}$ Cauchyn jono L^2:ssa.

$\Rightarrow \exists\ h_{\Theta_k'} \xrightarrow{L^2} h \in L^2(\Omega, \mu)$

Vastaavasti ottamalla Θ_k' ja $\{E, \Omega \setminus E\}$ generoima hienompi jako saadaan h_k s.e.

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (h_{\Theta_k'} - h_k)^2 d\mu = 0, \quad (1)$$

koska

$$\underbrace{\int_\Omega h_k^2 d\mu}_{\to M} \overset{\text{Lemma: } h_k \text{ hienommalla jaolla}}{=} \underbrace{\int_\Omega h_{\Theta_k'}^2}_{\to M} + \underbrace{(h_{\Theta_k'} - h_k)^2}_{\to 0} d\mu$$

$$\nu(E) \overset{\text{Lemma}}{=} \int_E h_k \, d\mu = \lim_k \int_E h_k \, d\mu$$

$$= \int_E h \, d\mu$$

$$\lim \int_E h_k \, d\mu = \lim \overbrace{\int_E (h_k - h_{\vartheta_k}) \, d\mu}^{=0} + \lim \int_E h_{\vartheta_k} \, d\mu = \int_E h \, d\mu$$

käytettiin

$$\left| \int_E h_k - h_{\vartheta_k} \, d\mu \right| \le \int_E |h_k - h_{\vartheta_k}|$$

$$\le \left(\int_E |h_k - h_{\vartheta_k}|^2 \, d\mu \right)^{1/2} (\mu(E))^{1/2} \xrightarrow[(1)]{} 0$$

ja

$$\left| \int h_{\vartheta_k} - h \, d\mu \right| \le \left(\int |h_{\vartheta_k} - h|^2 \, d\mu \right)^{1/2} (\mu(E))^{1/2}$$

$$\xrightarrow[(140)]{} 0. \quad \square$$

Olkoon $\tilde{g} = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} \alpha_i$

$$\int_E \tilde{g}\,d\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i)\alpha_i \overset{\boxed{a}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f\,d\mu\,\alpha_i \overset{\text{int lin}}{=} \int_E \tilde{g} f\,d\mu.$$

Yleinen tulos ottamalla

$\tilde{g} \nearrow g$, $\tilde{g}$ yksink. ja

käyttämällä MON.

$\boxed{b}$ ei

<u>Määr</u> Funktiota f kutsutaan ν:n R-D derivaataksi μ:n suhteen. Merkitään

$$f =: \frac{d\nu}{d\mu}, \text{ joten}$$

edellinen lause:

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu.$$

ei → s.144

<u>Tod R-Dille</u>

Olk. $\nu, \mu \geq 0$ ja $\nu << \mu$.

$\nu(E) \leq \nu(E) + \mu(E)$ ja

$\mu(E) \leq$ —— " ——

Ed. lause

$$\Rightarrow \exists \; f_\nu := \frac{d\nu}{d(\nu+\mu)}, f_\mu = \frac{d\mu}{d(\nu+\mu)}.$$

Aset:

$$A = \Omega \cap \{f_\mu > 0\}, \quad B = \Omega \cap \{f_\mu = 0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{f_\nu(x)}{f_\mu(x)}, & x \in A \\ 0, & x \in B \end{cases}$$

Olk. $E \subset A$, $E \in \tilde{\mathcal{A}}$.

$$\Rightarrow \nu(E) = \int_E f_\nu \, d(\nu+\mu) = \int_E f \cdot f_\mu \, d(\nu+\mu)$$

$$\underset{\text{ed. lause } \boxed{b}}{=} \int_E f \, d\mu \qquad (1)$$

Toisaalta

$$\mu(B) = \int_B \overbrace{f_\mu}^{=0 \text{ B:llä}} d(\nu+\mu) = 0$$

$$(2)$$

$$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu(B) = 0$$

$$(1)\&(2) \Rightarrow \nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \tilde{\mathcal{A}}$$

Vaihtumerkkiselle mitalle tulos saadaan käsitt. + ja − osat erikseen. □

Radon-Nikodym todistuksen idea

Haluttiin Annettu $\nu \ll \mathbb{P}$ ja etsitään $f \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ s.e.

$$\int_A f \, d\mathbb{P} = \nu(A).$$

Idea
- Muodostetaan fktio $h_{\mathcal{P}}$ kuten sivun 133 esimerkissä ($h_{\mathcal{P}}(x) = \begin{cases} \frac{\nu(E_i)}{\mathbb{P}(E_i)}, & x \in E_i,\ \mathbb{P}(E_i) \neq 0 \\ 0, & \mathbb{P}(E_i) = 0 \end{cases}$);
- Idea $\nu(A) \sim \int_A h_{\mathcal{P}} \, d\mathbb{P}$

$h_{\mathcal{P}} \xrightarrow[\text{jakoja}]{\text{tihennetään}} f$, saadaan sopiva f.

$\square$

(Ehdollinen odotusarvo)

Esim. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$X, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ satm s.e.

X saa arvoja $x_1 \ldots x_m$

Z —〃— $z_1 \ldots z_n$

Ehdollinen tn on

$$\mathbb{P}(X = x_i \mid Z = z_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i ; Z = z_j)}{\underbrace{\mathbb{P}(Z = z_j)}_{\neq 0}}$$

ja ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{E}(X \mid Z = z_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i \mid Z = z_j)$$

Ehdollinen odotusarvo on satunnaismuuttuja

Siis

$$Z(\omega) = z_j \Rightarrow Y(\omega) := \mathbb{E}(X \mid Z = z_j) =: y_j$$

Voidaan ajatella, että jaetaan Ω "Z-atomeihin"

Ω | $Z=z_1$ | $Z=z_2$ | ... | ... | $Z=z_n$ |

Y on vakio Z-atomeilla eli erit.

$\boxed{Y \text{ on } \sigma(Z)\text{-mitallinen satm.}}$

Lisäksi

$$\boxed{\int_{\{Z=z_j\}} Y\,dP =} \; y_j\,P(Z=z_j)$$

$$= \sum_i x_i \underbrace{P(X=x_i \mid Z=z_j)\,P(Z=z_j)}_{=P(X=x_i\,;\,Z=z_j)}$$

$$= \sum_i x_i\,P(X=x_i\,;\,Z=z_j)$$

$$\boxed{= \int_{\{Z=z_j\}} X\,dP}$$

$u=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \chi_{A_i},\ E\in\mathcal{F}$

$\int_E u\,dP := \sum_{i=1}^{k}\alpha_i P(E\cap A_i)$

määritelmä

Jokainen $G\in\sigma(Z)$ on yhdiste

!!
G

joukoista $\{Z=z_j\}$, joten vastaavasti

$$\boxed{\int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G X \, d\mathbb{P} \quad \forall G \in \mathcal{G}}$$

Yleistetään idea:

Olkoon annettu $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ $\mathcal{F}$-mit. satunnaismuuttuja, sekä $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ali-σ-algebra.

Tällöin

$$\nu(A) := \int_A X \, d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$$

on mitta ja

$$\nu \ll \mathbb{P} \quad \mathcal{G}\text{:llä}$$

R-D lause $\Rightarrow \exists \; Y \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$-mitallinen satm. s.e.

$$\nu(A) = \int_A Y \, d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

HUOMAA (i) X on $\mathcal{F}$-mitallinen, ei välttämättä $\mathcal{G}$-mitallinen

(ii) $G \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$\int_G Y \, d\mathbb{P} = \nu(A) := \int_G X \, d\mathbb{P}.$$

On siis olemassa Y, jolle:

Määr (Ehdollinen odotusarvo)

Olkoon $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ satm, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ annettu, ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-mitallinen satm. Olk.

(i) Y on $\mathcal{G}$-mitallinen

(ii) $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$

(iii) $\int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G X \, d\mathbb{P} \quad \forall G \in \mathcal{G}.$

Tällöin Y on X:n ehdollinen

odotusarvo ehdolla $\mathcal{G}$ (eräs versio). Merkitään

$$Y(\omega) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \text{ melkein varmasti,}$$

HUOMAA (i) Edellisen R-D laskun perusteella Y olemassa. (ii) R-D sanoo yksikäsitteisyydestä, jos $\tilde{Y}$ on toinen ehdollinen odotusarvo niin

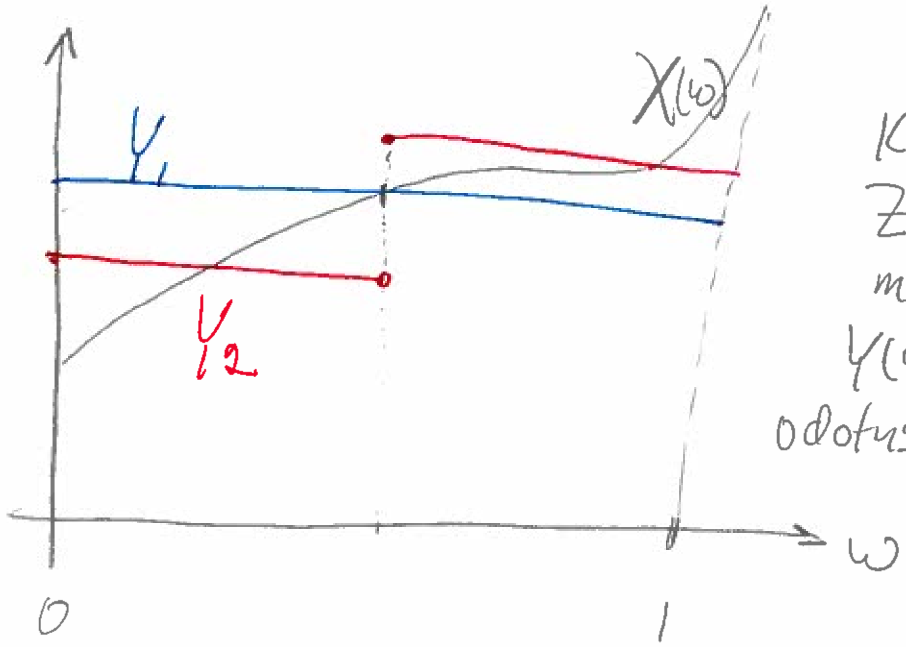
$$\mathbb{P}(Y = \tilde{Y}) = 1.$$

Eri versiot voivat kuitenkin poiketa 0-millaisessa joukossa. Myöhemmin m.v. saatetaan jättää pois.

Merkintä

$$\mathbb{E}(X|Z_1, Z_2 \ldots Z_n) := \mathbb{E}(X|\sigma(Z_1, \ldots Z_n))$$

Esim $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$



Intuitiivinen merkitys

Koe suoritettu ja $Z(\omega)$:n arvo tiedossa, mutta ω ei. Tällöin $Y(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(Z))$ on odotusarvo annettuna tämä tieto.

$$\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, [0,1]\}, \quad Y_1 = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_1) \text{ m.v.}$$

Ehto: $\int_{[0,1]} Y_1 \, dm = \int_{[0,1]} X \, dm$, missä

Y_1 $\mathcal{G}_1$-mitallinen

$$\Rightarrow \quad Y_1(\omega) = \int_{[0,1]} X \, dm \quad \forall \omega \in [0,1] \text{ kelpaa.}$$

Olkoon

$$\mathcal{G}_2 = \{\emptyset, [0,1], [1, \tfrac{1}{2}), [\tfrac{1}{2}, 1]\}$$

$$Y_2(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_2) \text{ m.v.}$$

Ehto: Y_2 $\mathcal{G}_2$-mitallinen ja

$$\int_{[0,1]} Y_2 \, dm = \int_{[0,1]} X \, dm \,;$$

$\boxed{\text{Merkitään int. kaita } \fint_{[a,b)} X\,dm = \frac{1}{(b-a)} \int_{[a,b)} X\,dm}$

$$\int_{[0,\frac{1}{2})} Y_2 \, dm = \int_{[0,\frac{1}{2})} X \, dm \,, \quad \int_{[\frac{1}{2},1]} Y_2 \, dm = \int_{[\frac{1}{2},1]} X \, dm$$

$$\Rightarrow Y_2(\omega) = \begin{cases} \fint_{[0,\frac{1}{2})} X \, dm \,, & \omega \in [0,\frac{1}{2}) \\ \fint_{[\frac{1}{2},1]} X \, dm \,, & \omega \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$ kelpaa.

Esim. $$\int_{[0,1]} Y_2 \, dm = \frac{1}{2} \fint_{[0,\frac{1}{2})} X \, dm + \frac{1}{2} \fint_{[\frac{1}{2},1]} X \, dm$$

$$= \frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}} \int_{[0,\frac{1}{2})} X \, dm + \frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}} \int_{[\frac{1}{2},1]} X \, dm$$

$$= \int_{[0,1]} X \, dm$$

$$\int_{[0,\frac{1}{2})} Y_2 \, dm = \int_{[0,\frac{1}{2})} \fint_{[0,\frac{1}{2})} X \, dm \, dm = \int_{[0,\frac{1}{2})} X \, dm .$$

<u>Idea</u> Mitä karkeampi σ-alg., sitä vähemmän tietoa.

Y_1 integraalikeskiarvo koko alueessa

Y_2 lisätieto, että joku $\mathcal{G}_2$:n tapaus sattunut, joten nyt saadaan parempi arvio.

<u>Lause</u> Olkoon $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$. Tällöin

(i) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$

(ii) $Y = \mathbb{E}(1/\mathcal{G}) = 1$ m.v.

(iii) Jos $X \geq 0 \Rightarrow Y \geq 0$ m.v.

(iv) $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$ melkein varm.

$\mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2/\mathcal{G}) = \alpha \mathbb{E}(X_1/\mathcal{G}) + \beta \mathbb{E}(X_2/\mathcal{G})$

ei [(v) $\int_\Omega |Y| d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X| d\mathbb{P}$]

ei [(vi) Jos Z on $\mathcal{G}$-mitallinen, rajoitettu

$\Rightarrow \mathbb{E}(ZX/\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$]

(vi) Jos $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$, niin

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_1) \mid \mathcal{G}_2)$$

Tod $\boxed{i}$ $\Omega \in \mathcal{G} \overset{\text{määr.}}{\Longrightarrow} \int_\Omega Y \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$

$\boxed{ii}$ $Y = \mathbb{E}(1 \mid \mathcal{G})$ jolloin

$$\int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G 1 \, d\mathbb{P} \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

$$\Rightarrow \int_G Y - 1 \, d\mathbb{P} = 0 \; \forall \; G \in \mathcal{G}$$

$$A = \{Y \geq 1\} = Y^{-1}(\underbrace{[1,\infty)}_{\in \mathcal{B}}) \in \mathcal{G}$$

Y $\mathcal{G}$-mitallinen

$$\Rightarrow \int_{\{Y \geq 1\}} Y - 1 \, d\mathbb{P} = 0$$

4.6.T5

$$\Rightarrow Y - 1 = 0 \quad \text{m.v. } \{Y \geq 1\}\text{:ssa}$$

Vastaavasti joukolle $\{Y \leq 1\}$.

1.3.2012, luentojen loppu

$\boxed{iii}$ HT

$\boxed{iv}$ HT

ei $\lceil$ $\boxed{v}$

$$\int_\Omega |X| \, d\mathbb{P} = \sup_{A \in \mathcal{Q}} \int_A X^+ \, d\mathbb{P}$$

$$\underbrace{- \inf_{A \in \mathcal{Q}} \int_A X^- \, d\mathbb{P}}_{\geq 0}$$

$$= \sup_{A \in \mathcal{Q}} \int_A X \, d\mathbb{P} - \inf_{A \in \mathcal{Q}} \int_A X \, d\mathbb{P}$$

$$\underset{\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}}{\geq} \sup_{A \in \mathcal{G}} \int_A X \, d\mathbb{P} - \inf_{A \in \mathcal{G}} \int_A X \, d\mathbb{P}$$

$$= \sup_{A \in \mathcal{G}} \int_A Y \, d\mathbb{P} - \inf_{A \in \mathcal{G}} \int_A Y \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_A |Y| \, d\mathbb{P}. \quad \rfloor \text{ei}$$

ei

$\lceil$ (vi) $Z = \chi_A$, $A \in \mathcal{G}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\chi_A X | \mathcal{G}) \underset{HT}{=} \chi_A \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$$

Yleistyy standardikoneistolla yl. ehtoille ja
raj. mitallisille ehtoille

Idea: $\mathcal{G}$:n info tiedossa ja
Z $\mathcal{G}$-mitallinen $\Rightarrow Z$ ei vaikuta
odotusarvoon. ⌟ ei

ei
⌜ (VI) $G_2 \in \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$: $\int_{G_2} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2)\,d\mathbb{P}$

$$\underset{\text{määr}}{=} \int_{G_2} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)\,d\mathbb{P} \underset{G_2 \in \mathcal{G}_1}{\overset{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)\ \text{määr}}{=}} \int_{G_2} X\,d\mathbb{P}$$

$$\underset{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)\ \text{määr.}}{=} \int_{G_2} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)\,d\mathbb{P} \quad \forall\, G_2 \in \mathcal{G}_2,$$ ja

$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2)$; $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)$ $\mathcal{G}_2$-mitallisia.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2) \text{ m.v.} \quad \square$$ ⌟ ei

ehdollinen
odotusarvo yksik. m.v.
s. 149