liittyen σ-algebraan

$\tilde{\mathcal{F}} = \sigma(X_i : i \in \mathbb{N})$. Tällöin

$\exists!\ \mathbb{P} : \tilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ s.e.

$$\mathbb{P}(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots)$$
$$= \mathbb{P}_1(B_1)\mathbb{P}_2(B_2)\ldots\mathbb{P}_n(B_n).$$

Merkitään

$$(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P}) = \prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_i).$$

Joskus merkitään myös

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

<u>Syy</u> Perustuu Carathéodoryn laajennukseen

$\tilde{\mathcal{F}}_n := \sigma(X_1, \ldots X_n)$, jonka

tyypillinen elementti on

muotoa

$$F_n = G_n \times \prod_{k>n} \mathbb{R}, \quad G_n \in \prod_{1\le k\le n} \mathcal{B}(\mathbb{R}). \qquad (= \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Algebralla

$$\mathcal{F}^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

voidaan määritellä

$$\mathbb{P}^- : \mathcal{F}^- \to [0,1]$$

$$\mathbb{P}^-(F_n) = (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \times \ldots \times \mathbb{P}_n)(G_n).$$

Osoitettava että $\mathbb{P}^-$ on numeroituvasti additiivinen $\mathcal{F}^-$:lla. $\square$

ei ~~HUOMAA~~

$$\underbrace{B_1 \times \prod_{k>1} \mathbb{R}}_{A_1} \supset \underbrace{B_1 \times B_2 \times \prod_{k>2} \mathbb{R}}_{A_2} \supset \ldots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B_1 \times B_2 \times B_3 \times \ldots$$

$$\mathbb{P}(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \dots)$$
$$= \mathbb{P}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(B_n)$$
$\Rightarrow$
$$\mathbb{P}(B_1 \times B_2 \times \dots) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n(B_n)$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_n(B_n).$$

$\boxed{\mathbb{P}(\prod B_n) = \prod \mathbb{P}(B_n)}$ ei

<u>Lause</u>

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mathbb{P})$ kuten yllä. Yllä määritelyt

$$X_i : \Omega \to \mathbb{R}.$$

ovat riippumattomia satm s.e.

$$L_{X_i} = \mathbb{P}_i$$

$$(L_{X_i}(B) := \mathbb{P}(X_i^{-1}(B)) = \mathbb{P}_i(B))$$

Tod $\quad B_1, B_2, \dots B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1) \cap \dots \cap X_n^{-1}(B_n))$$

$$= \mathbb{P}(B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \dots) = \mathbb{P}_1(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n(B_n)$$

$$X_1^{-1}(B_1) = B_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$$

$$X_2^{-1}(B_2) = \mathbb{R} \times B_2 \times \mathbb{R} \times \dots$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}_1(B_1) \overbrace{\prod_{k>1} \mathbb{P}_k(\mathbb{R})}^{1}}_{\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1))} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\overbrace{\prod_{\substack{1 \le k \le n-1 \\ k > n}} \mathbb{P}_k(\mathbb{R})}^{1} \mathbb{P}_n(B_n)}_{\mathbb{P}(X_n^{-1}(B_n))} \quad \square$$

Häntä-σ-algebra

Määritelmä

Olkoot $X_1, X_2, X_3 \dots$ satunnaismuuttujia.

$$\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$$

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$$

$\mathcal{T}$:aa kutsutaan häntä-σ-algebraksi jonolle $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

<u>Esim</u> (i) Olkoon

$$F_1 := \{\omega \in \Omega : \lim_{i \to \infty} X_i(\omega) \text{ olemassa}\}$$

$$\Rightarrow F_1 \in \mathcal{T}$$

<u>Syy</u> (Yksityiskohdat HT)

$$\{\lim X_i \text{ olemassa}\} = \{\limsup X_i = \liminf X_i\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : \lim_{k \to \infty} \underbrace{\sup_{i \ge k} X_i}_{} = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\inf_{i \ge k} X_i}_{}\}$$

$\sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$ - mitallinen

(ii) $H =$ "apina tuottaa äärettömän määrän Kalevalan kopioita" $\in \mathcal{T}$

ei

Syy $X_i =$ "#Kalevalaa aikaan i mennessä"

kaikki mahdolliset äärettömät merkkijonot

$$\{\omega \in \Omega : \lim X_i(\omega) = \infty\}$$

$$= \{\liminf X_i = \infty\}$$

perustellaan tarkemmin kurssilla mitta- ja integraalit

$$= \{\lim_{k\to\infty} \underbrace{\inf_{i\geq k} X_i}_{\sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)\text{-mitallinen}} = \infty\} \in \mathcal{T}$$

ei

Lause (Kolmogorovin 0-1 laki)

Olkoot X_i, $i = 1, 2, \ldots$ riippumattomia satunnaismuuttujia, ja $\mathcal{T}$ niiden häntä-σ-algebra. Tällöin

$$F \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathbb{P}(F) = 0 \text{ tai } 1.$$

TOD (hahmotelma)

1° $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, \dots X_n)$ ja $\tilde{\mathcal{Q}}_n = \sigma(X_{n+1}, \dots)$ ovat riippumattomia.

Syy Palautuu X_i:n riippumattomuuteen katsomalla π-systeemejä
$$\{\omega : X_i^{-1}(-\infty, a_i],\ i = 1, \dots n\}$$ jne.

π-syst rtmia $\Rightarrow$ $\mathcal{G}_n, \tilde{\mathcal{Q}}_n$ rtmia.

2° $\mathcal{G}_n$ ja $\tilde{\mathcal{Q}}$ rtmia, koska $\tilde{\mathcal{Q}} \subset \tilde{\mathcal{Q}}_n$.

3° $\mathcal{G}_\infty := \sigma(X_i : i \in \mathbb{N})$ ja $\tilde{\mathcal{Q}}$ rtmia

Syy Taas π-systeemitodistus.

4° $F \in \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{G}_\infty$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \cap F) = \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}(F)$$

$F \in \mathcal{G}_\infty$ riippumaton $\tilde{\mathcal{Q}} \ni F$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(F) = 0 \text{ tai } 1. \quad \square$$

vrt. apinaesimerkki

<u>Esim</u>

$\mathbb{P}(\{\lim_i X_i \text{ olemassa}\}) = 0$ tai 1

jos X_i:it riippumattomia.

Integrointi / odotusarvot

Otamme valtaosan tuloksista käyttöön ilman todistuksia. Todistukset tulevat kurssilla "Mitta- ja integraaliteoria".

<u>Määritelmä</u> Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tn avaruus ja f <u>satunnaismuuttuja</u>. Odotusarvo on integraali

$$\mathbb{E} f = \int_\Omega f \, d\mathbb{P} = \int_\Omega f(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega).$$

<u>KYSYMYS</u> Mitä oikea puoli tarkoittaa?

<u>SUUNNITELMA</u> Määrittelemme integraalin

1° yksinkertaisille funktioille

u

2° $\mathcal{F}$-mitallisille $f \geq 0$

3° — " — joka voi vaihtaa merkkiä

Vaihe 1

Määritelmä

$u : \Omega \to [0, \infty)$ on yksinkertainen funktio jos se voidaan esittää

$$u = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}(\omega)\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(\omega)\alpha_i,$$

missä $\alpha_i \in (0, \infty)$ ja $A_i \in \mathcal{F}$ ovat pistevieraita.

Määritelmä

Yksinkertaisen funktion integraali on

$$\int_\Omega u \, d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)\alpha_i$$

Vaihe 2

f $\mathcal{F}$-mitallinen, $f \geq 0$

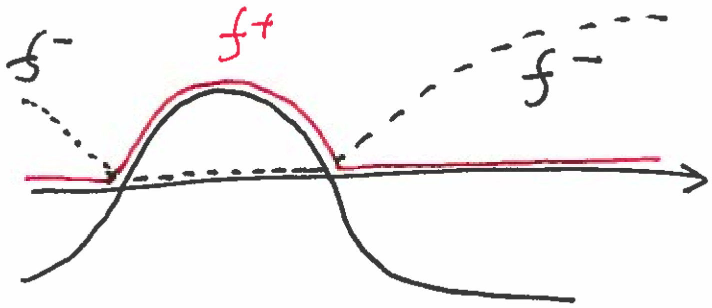
Määritelmä

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mathbb{P} = \sup\left\{ \int_\Omega u\, d\mathbb{P} : 0 \leq u \leq f \text{ ja } u \text{ yksinkertainen} \right\}$$

Vaihe 3

f $\mathcal{F}$-mitallinen ja voi vaihtaa merkkiä

$$f = f^+ - f^- = \max(f, 0) - (-\min(0, f))$$



Määritelmä

$$\int_\Omega f\,d\mathbb{P} = \int_\Omega f^+ d\mathbb{P} - \int_\Omega f^- d\mathbb{P} \quad , \text{ jos}$$

joko $\int_\Omega f^+ d\mathbb{P} < \infty$ tai $\int_\Omega f^- d\mathbb{P} < \infty$.

HUOMAA

Jos molemmat $= \infty$ saataisiin

$\int_\Omega f\,d\mathbb{P} = \infty - \infty$ mikä ei määritelty.

Nimitys $\int_\Omega f\,d\mathbb{P}$ on f:n Lebesguen integraali.

Määritelmä Jos sekä

$\int_\Omega f^+ d\mathbb{P} < \infty$ että $\int_\Omega f^- d\mathbb{P} < \infty$,

sanotaan, että f on integroituva.

Merkitään $f \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$.

Huomaa $|f| = f^+ + f^-$, joten

f integroituva $\Leftrightarrow \int_\Omega |f|\,d\mathbb{P} < \infty$.

<u>Esim</u> (ii) $\left([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \underset{\substack{\| \\ \mathbb{P}}}{m_1}\right)$

$u(\omega) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(\omega)$, missä

$\mathbb{Q}$ <u>rationaalipisteet</u>. (m_1 = Leb. 1D mitta = "joukon pituus")

u on yksinkertainen, koska $\mathbb{Q}\cap[0,1] \in \mathcal{B}([0,1])$.

Pätee $\mathbb{P}(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0$ (ei tod.)

$$\Rightarrow \int_\Omega u\, d\mathbb{P} \underset{\text{Vaihe 1}}{=} \sum_{i=1}^{1} \mathbb{P}(A_i)\alpha_i$$

$$= \mathbb{P}(\mathbb{Q}\cap[0,1])\cdot 1 = 0.$$

Tähän ei Riemannin integraali pysty!

(ii) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

$\mathbb{P}(\{i\}) = q_i \in [0,1]$ s.e.

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i = 1.$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ on integroituva

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |f(\{i\})| q_i < \infty.$$

Odotusarvo olemassa, jos

$$\sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ f(\{i\}) \geq 0}} f(\{i\}) q_i < \infty \quad \text{tai} \quad \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ f(\{i\}) \leq 0}} q_i |f(\{i\})| < \infty$$

ja $\mathbb{E}(f) = \int_{\Omega} f \, d\mathbb{P}$

$$= \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ f(\{i\}) \geq 0}} f(\{i\}) q_i - \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ f(\{i\}) < 0}} |f(\{i\})| q_i.$$

(iii) Nopanheitto

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$.

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^{6} i\,\chi_{\{i\}}(\omega)$$

on yksinkertainen fktio ja siis satunnaismuuttuja.

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{i\})\, i = \frac{1}{\cancel{6}} \frac{\cancel{6}\cdot 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Odotusarvon ominaisuuksia

Lause Olkoot $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia, joille $\mathbb{E}(g)$ ja $\mathbb{E}(f)$ määritelty.

$\Rightarrow$ (i) $\mathbb{E}(f + g) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g)$, kun $f, g \geq 0$.

(ii) Jos $c \in \mathbb{R}$, niin $\mathbb{E}(cf)$ olemassa ja

$$\mathbb{E}(cf) = c\,\mathbb{E}(f).$$

(iii) $f, g \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, $a, b \in \mathbb{R}$, niin $af + bg \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ ja

$$\mathbb{E}(af + bg) = a\,\mathbb{E}(f) + b\,\mathbb{E}(g)$$

(iv) $$f \leq g \Rightarrow \mathbb{E}(f) \leq \mathbb{E}(g).$$

(v) Erikoistapaus (iv):sta

$$|\mathbb{E}(f)| \leq \mathbb{E}(|f|)$$

<u>Syy</u> $$|\mathbb{E}(f)| \overset{(iv)}{\leq} |\mathbb{E}(|f|)| = \mathbb{E}(|f|).$$

<u>Muistutus</u> Jos ominaisuus pätee joukossa A s.e. $\mathbb{P}(A) = 1$ sanotaan että ominaisuus pätee <u>melkein varmasti</u>. (m.v.)

Lause Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja. Tällöin

(i) $f = 0$ m.v $\Rightarrow \mathbb{E}(f) = 0$

(ii) $f \geq 0$ ja $\mathbb{E}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ m.v.

(iii) $f = g$ m.v ja $\mathbb{E}(f)$ olemassa

$\Rightarrow g$ satunnaismuuttuja (= mitallinen) ja $\mathbb{E}(f) = \mathbb{E}(g)$.

SANOO 0-mittainen muutos ei vaikuta integraaliin

Suppenemislauseita

Lause (Lebesguen monotonisen konv. lause, MON)

Olkoon $f_i : \Omega \to [0, \infty)$ jono satunnaismuuttujia siten, että $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ ja

$$\lim_{i \to \infty} f_i = f \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}(f_i) = \mathbb{E}(\lim_{i\to\infty} f_i) = \mathbb{E}(f).$$

HUOMAA $f_i \geq 0$

VAROITUS Ei päde näillä oletuksilla laskevalle jonolle. Ota

$$((0,1], \mathcal{B}((0,1]), m), \quad m = \text{Leb. mitta} = \text{"pituus"},$$

$$f_i : (0,1] \to [0,\infty)$$

$$f_i(\omega) = \frac{1}{\omega} \chi_{(0,\frac{1}{i}]}, \quad i = 1,2,\ldots$$

$$\mathbb{E}(f_i) = \overbrace{\int_{(0,1]} f_i(\omega)\, dm}^{\text{Leb. integraali}} = \overbrace{\int_0^{1/i} \frac{1}{\omega}\, dx}^{\text{Riemann-integraali}}$$

tähän palataan myöhemmin

$$= \ln\left(\tfrac{1}{i}\right) - \ln 0 = +\infty, \text{ mutta}$$

f_i on laskeva ja

$$\lim_{i\to\infty} f_i = 0 \quad \text{eli}$$

$$\mathbb{E}(\lim_{i\to 0} f_i) = \mathbb{E}(0) = 0 \neq \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}(f_i) = \infty.$$

<u>Lause</u> (Fatoun lemma)

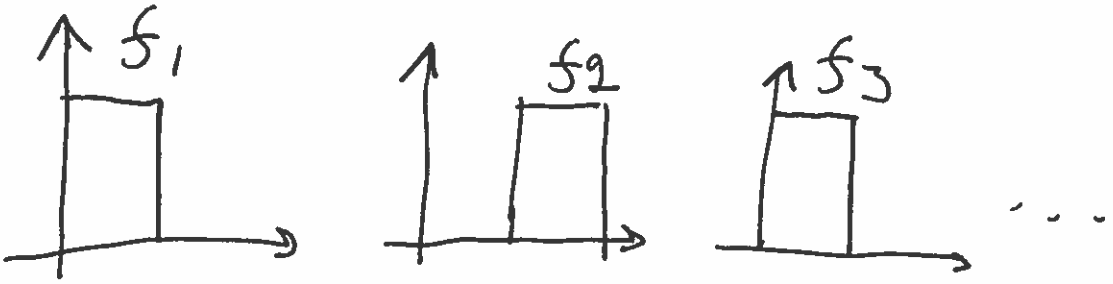
Olkoot $f_i : \Omega \to [0,\infty)$ satunnaismuuttujia.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(\liminf_{i\to\infty} f_i) \leq \liminf_{i\to\infty} \mathbb{E}(f_i).$$

<u>Esim</u> (i) $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$

$f : [0,1] \to [0,\infty)$, $i = 1,2,\ldots$

$$f_i(\omega) = \begin{cases} \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(\omega), & i \text{ pariton} \\ \chi_{(\frac{1}{2},1]}(\omega), & i \text{ parillinen} \end{cases}$$



$$\liminf_{i\to\infty} f_i \equiv 0.$$

$$\mathbb{E}(\liminf_{i\to\infty} f_i) = \mathbb{E}(0) = 0.$$

$$\liminf_{i\to\infty} \mathbb{E}(f_i) = \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$, joten

$$\mathbb{E}\Big(\liminf_{i\to\infty} f_i\Big) \leq \liminf_{i\to\infty} \mathbb{E}(f_i)$$ pätee

(tietenkin, koska Fatoun lemma pätee).

(ii) Huomaa taas $f_i \geq 0$:

$$((0,1],\ \mathcal{B}(0,1],\ m)$$

$$f_i : (0,1] \to (-\infty, 0]$$

$$f_i(\omega) = -\frac{1}{\omega}\,\chi_{(0,\frac{1}{i}]}(\omega)$$

$$\liminf_{i\to\infty} f_i \equiv 0$$, joten

$$0 = \mathbb{E}\Big(\overbrace{\liminf_{i\to\infty} f_i}^{\equiv 0}\Big) \not\leq \liminf_{i\to\infty} \mathbb{E}(f_i) \overset{\text{vrt s. 87 esim}}{=} -\infty.$$

9.2.2012