

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ on satunnaismuuttuja
koska summa säilyttää mitallisuuden.
(S. 51)

$$\Lambda := \left\{ \omega : \frac{\# \text{kruuna}}{\# \text{heitot}} = \frac{\# \text{heads}}{\# \text{tosses}} \rightarrow \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \right\} \cap$$

$$\left\{ \omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \right\} \in \tilde{\mathcal{Q}}, \text{ koska}$$

$\frac{1}{n}, \liminf, \limsup$ säilyttää mitallisuuden
(S. 52), joten ainakin
tapahtuma Λ on järkevä.

Satunnaismuuttujien generoimat σ -algebrat

Määritelmä

Olkoon $(X_i)_{i \in I}$ joukko
($X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$)

Satunnaismuuttujia. Tällöin

$$\sigma((X_i)_{i \in I})$$

on pienin σ -algebra

Ω lla s.e. jokainen

satm X_i on $\sigma((X_i)_{i \in I})$ -mitallinen.

Sis

$$\sigma((X_i)_{i \in I})$$

$$= \sigma(\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in B\}, i \in I, B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}).$$

Esim Ed. kolikonheittoesimerkissä
(s. 52) pätee selvästi:

$$\mathcal{A} = \sigma((X_i)_{i \in \mathbb{N}}).$$

HUOMAUTUS (i) Joskus σ -algebroiden
sijaan annetaan vain satm jotka
generoivat σ -algebran. Silloin
tarkoitetaan yllä olevaa.

(ii) Monesti on yksinkertaisempaa ajatella sopivaa generoivaa joukkoa.

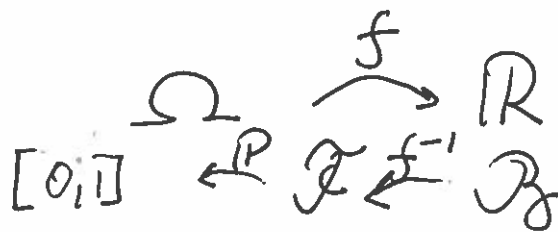
Esim. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}((X_i)_{i=1}^n)$ on

sopiva systeemi, joka generoi $\mathcal{G}((X_i)_{i \in \mathbb{N}})$.

Todennäköisyysjakauma ja kertymäfunktio

T_n -jakaumaan törmättiin jo edellä kolikonheittojen yhteydessä:

$$\begin{aligned} P(\text{"yksikrauna"}) &= P(\{\omega : f(\omega) = 1\}) \\ &= P(f^{-1}(\{1\})). \end{aligned}$$



Määritelmä Todennäköisyysjakauma (law)
on kuvaus $L_f: \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$,

$$L_f(B) = P(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Kertymäfunktio: $F_f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$,

$$\begin{aligned} F_f(c) &= L_f((-\infty, c]) = P(f^{-1}((-\infty, c])) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in (-\infty, c]\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq c\}). \end{aligned}$$

HUOMAA

- (i) $L_f: \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ on f -mitta.
- (ii) $\mathcal{G} = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ on π -systemi ja $\mathcal{E}(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$.

Lasku

$$F_f(c) = P(f^{-1}((-\infty, c]))$$

" $F_f: \mathcal{G} \rightarrow [0,1]$ " määrittelee yksikäsitteisesti L_f :n.

Muista: Voi olla vain yksi mitta jonka arvot π -syst. määrätty.

Lause Olkoon $F_f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$.

- (i) $x \leq y \Rightarrow F_f(x) \leq F_f(y)$ (ei-vähenevä)
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F_f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x) = 0$
- (iii) F_f on ylhäältä puoli jatkuva
(eli oikealta jatkuva ID fct:lle.)

Tod (i) $F_f(x) = P(f^{-1}(-\infty, x])$

$$\begin{aligned}
 &\leq P(f^{-1}(-\infty, y]) = F_f(y) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad y \geq x \\
 &\Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \\
 &\Rightarrow f^{-1}(-\infty, x] \subset f^{-1}(-\infty, y] \\
 &\quad \& P \text{ is monotonic}
 \end{aligned}$$

(ii) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{N}}} F_f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{N}}} P(f^{-1}(-\infty, x])$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(\bigcup_{x \in \mathbb{N}} f^{-1}(-\infty, x]\right) \\
 &\subset f^{-1}(-\infty, x] \subset f^{-1}(-\infty, x+1] \subset \dots \\
 &\quad \text{Mitän alhalla jatkuvuuslause}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(f^{-1}\left(\bigcup_{x \in \mathbb{N}} (-\infty, x]\right)\right) = P\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right) = 1 \\
 &\quad \bigcup f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup A_i)
 \end{aligned}$$

F_f ei-vähenevä joten pätee ilman $x \in \mathbb{N}$ oletustakin.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x) = 0$ samaan tapaan.

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_f(a + \frac{1}{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(f^{-1}((-\infty, a + \frac{1}{n}]))$$

$$= P(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, a + \frac{1}{n}]))$$

$$\dots \supset f^{-1}((-\infty, a + \frac{1}{n}]) \supset f^{-1}((-\infty, a + \frac{1}{n+1}]) \supset \dots$$

$$= P(f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{n}]))$$

$$= P(f^{-1}((-\infty, a])) = F_f(a).$$

F_f ei vähenevä $\Rightarrow$ pätee kun $x \rightarrow a+$. $\square$

HUOMAUTUS Jos f funktiolla $\dots$

F on edelliset ominaisuudet

(i) (ii) ja (iii), niin voidaan

määrittellä $L((-\infty, x]) = F(x)$.

Samoin kuin Leb. mittaa konstruoidessa voitaisiin määrittellä L seuraavaksi

algebralla ja käyttää Carathéodoryn laajennusta.

Johtopäätös $L_f \Leftrightarrow F_f.$

Riippumattomuus satunnaismuuttajien ja σ -algebroiden avulla

Määritelmä Osa- σ -algebrat

$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots \subset \mathcal{I}$ ovat riippumattomia jos ^{ainakin} $G_i \in \mathcal{G}_i$ ja $i_1, i_2, \dots, i_n$ ovat erillisiä pätee

$$P(G_{i_1} \cap \dots \cap G_{i_n}) = P(G_{i_1}) \dots P(G_{i_n}).$$

Määritelmä

Satunnaismuuttajat $f_1, f_2, \dots$ ovat riippumattomia jos

$\sigma(f_1), \sigma(f_2), \dots \subset \mathcal{F}$ ovat riippumattomia.

Esim Ääretön jono kolikonheittoja.

$$f_i(\omega) := X_i(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega_i = H \\ 0, & \omega_i = T \end{cases}$$

$$\sigma(f_1) = \{\emptyset, \Omega, \underbrace{\{\omega \in \Omega : \omega_1 = H\}, \{\omega \in \Omega : \omega_1 = T\}}_{=: \{\omega_1 = H\}}\}$$

$$\sigma(f_2) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_2 = H\}, \{\omega_2 = T\}\}$$

$$\begin{aligned} P(\{\omega_1 = H\} \cap \{\omega_2 = T\}) &= P(\{\omega : \omega_1 = H, \omega_2 = T\}) \\ &= P(\{\omega_1 = H\}) P(\{\omega_2 = H\}) \end{aligned}$$

kolikonheitot
riippumattomia

Samaan muille $\sigma(f_1)$ ja $\sigma(f_2)$:n tapahtumille

$\Rightarrow X_1, X_2$ riippumattomia.

HUOMAA Olisi voitu myös määritellä
 ekvivalentisti: satm $f_1, f_2, \dots$
 ovat riippumattomia jos

$$\begin{aligned} & P(f_{i_1}^{-1}(B_1) \cap f_{i_2}^{-1}(B_2) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(B_n)) \\ & (= P(f_{i_1} \in B_1, f_{i_2} \in B_2, \dots, f_{i_n} \in B_n)) \\ & = P(f_{i_1}^{-1}(B_1)) P(f_{i_2}^{-1}(B_2)) \dots P(f_{i_n}^{-1}(B_n)). \end{aligned}$$

$\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $\forall$ erillisillä $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$.
 Tämä nähdään seuraavaksi; $\square$

Olisi mukavampaa, jos satm
 riippumattomuus voitaisiin todeta
 helpommin kuin σ -algebroja

Käyttämällä: Π -systemit riittävät ∇
 $\emptyset$

Lemma Olkoot $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ ali- σ -algebroja,
 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ Π -systemejä s.e.

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{I}) \text{ ja } \mathcal{H} = \sigma(\mathcal{J}).$$

$\Rightarrow \mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ riippumattomia, jos $\mathcal{I}$ ja $\mathcal{J}$ ovat eli

$$P(I \cap J) = P(I)P(J) \quad \forall I \in \mathcal{I}, J \in \mathcal{J}.$$

Tod Olkoot $\mathcal{I}$ ja $\mathcal{J}$ riippumattomia.

Mitoilla $H \mapsto P(I \cap H)$ ja $H \mapsto P(I)P(H)$, (määritetty $(\Omega, \mathcal{H})$:lla, on sama

kokonaismassa $P(I)$ ja ne ovat) samat $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}$:lla.

$$\Rightarrow P(I \cap H) = P(I)P(H) \quad \forall I \in \mathcal{I} \quad \forall H \in \mathcal{J}$$

Molemmat puolet
määr mitan $(H: \mathcal{J} \text{ systeemi})$
Samat π -syst:illa $\mathcal{J}$

Muista; samuus
 π -syst. riitti
yksikäsit.

$$\Rightarrow P(I \cap H) = P(I) P(H) \quad \forall I \in \mathcal{G} \\ \forall H \in \mathcal{H} \quad \square$$

Molemmat puolet määr. Mitän I:n suhteen $\mathcal{G}$ illä.
Samat $\mathcal{H}$ -syst $\mathcal{I}$ illä
 $\Rightarrow$ samat $\mathcal{E}(\mathcal{I}) = \mathcal{G}$ illä.

Syy $\{f^{-1}(-\infty, a]; a \in \mathbb{R}\}$ on $\mathcal{H}$ -systeemi joka generoi $\mathcal{E}(f)$:n. Ei tod.

Seuraus f ja g ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jos

$$P(f^{-1}(-\infty, a] \cap g^{-1}(-\infty, b]) = P(f^{-1}(-\infty, a]) \cdot P(g^{-1}(-\infty, b]) \\ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

MERKINTÄ Usein käytetään isoja kirjaimia satunnaismuuttujille:

$$X := X(\omega) := f(\omega) \quad \text{ja} \quad Y := Y(\omega) := g(\omega).$$

Ylläoleva tulos:

$$P(X \leq x; Y \leq y) = P(X \leq x) P(Y \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Vastaavasti voidaan todistaa:

Lause Satunnaismuuttujat

$f_1 = X_1, f_2 = X_2, \dots$ riippumattomia

jos

$$P(f_1^{-1}(-\infty, a_1] \cap \dots \cap f_n^{-1}(-\infty, a_n]) \\ = P(f_1^{-1}(-\infty, a_1]) \cdot \dots \cdot P(f_n^{-1}(-\infty, a_n]).$$

El: $f_1 = X_1, f_2 = X_2, \dots$

$$P(X_1 \leq a_1; X_2 \leq a_2; \dots; X_n \leq a_n) \\ = P(X_1 \leq a_1) \dots P(X_n \leq a_n) \quad * \\ = F_{X_1}(a_1) \dots F_{X_n}(a_n)$$

Palataan vielä apinaesimerkkiin.

~~Apina~~ ^{Välikemmys} Apina näpyttelee kirjoituskonetta.

$H =$ "apina tuottaa äärettömän monta
kpl Kalevalaa"

$H_k =$ "_____ ainakin k kpl —"

$H_{m,k} =$ "_____ —" aikaa
 m mennessä"

$H^{(m)} =$ "_____ äärettömän monta kpl
jaksolla $[m+1, \infty)$ "

Oletus: Apinan käytös riippumaton
jaksolla $[1, m]$ jaksosta $[m+1, \infty)$

$$\Rightarrow P(H_{m,k} \cap H^{(m)}) = P(H_{m,k}) P(H^{(m)})$$

* HUOMAA/ESIM

Olkoot $p_f, p_g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Riemann-integroituvia funktioita s.e.

$$\int_{\mathbb{R}} p_f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} p_g(x) dx = 1 \quad \text{ja}$$

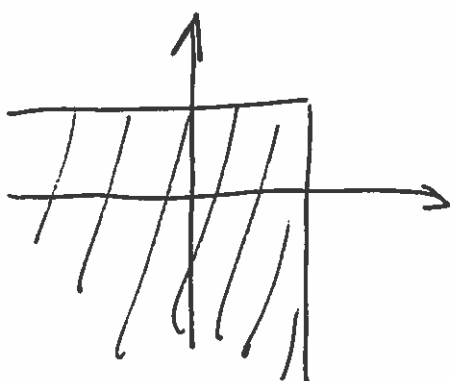
$$F_f(x) = \int_{-\infty}^x p_f(y) dy \quad \text{ja} \quad F_g(x) = \int_{-\infty}^x p_g(y) dy$$

$$F_{(f,g)}(x,y) := P(\{f \leq x\} \cap \{g \leq y\})$$

ed. lause $\stackrel{=}{\uparrow}$ $F_f(x) F_g(y)$

$$= \int_{-\infty}^x p_f(z) dz \int_{-\infty}^y p_g(s) ds$$

$$= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_f(z) p_g(s) ds dz$$



Selvåst:

$$H^{(m)} = H \quad \forall m.$$

$$\Rightarrow P(H_{m,k} \cap H) = P(H_{m,k})P(H) \quad (1)$$

Påte:

$$H_{m,k} \subset H_{m+1,k} \subset \dots \subset H_k \quad \text{ja}$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} H_{m,k} = H_k \quad \text{ja} \quad (2)$$

$$\dots \subset H_{m,k} \cap H \subset H_{m+1,k} \cap H \subset \dots$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} H_{m,k} \cap H = H_k \cap H = H$$

$\uparrow$
 $H_k \supset H$

(1) $\Rightarrow$
 (2)
 & reje-aro

$$P(H_k \cap H) = P(H_k)P(H) \quad (3)$$

$\leftarrow \frac{P(H_k \cap H)}{P(H)}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(H_k) \stackrel{P(H_k \supset H_{k+1})}{=} P(H)$$

$$(3) \Rightarrow P(H) = P(H)P(H)$$

(67)

$$\Rightarrow P(H) = 0 \text{ tai } 1.$$

Tämä on esimerkki nk 0-1 laista.

Olkoon kunkin näppäimen $\pm n$ ε .

$E_1 =$ "apina tuottaa Kalevalan, jossa
 N kirjainta heti eli ajassa
 $[1, N]$ "

$E_2 =$ " — " — $[N+1, 2N]$ "

$\vdots$

$$P(E_1) = \varepsilon^N = P(E_2) = P(E_3) = \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \infty$$

BC2
riippumattomia

$\Rightarrow$

$$P(\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i) = 1$$

$$\Rightarrow P(H) = 1 \quad \forall \quad 0$$

Miten konstruoida riippumattomia satunnaismuuttujia?

Sisä annettu $P_i: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$
 $i=1,2,\dots$

Konstruo;

$$f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{s.e.}$$

$$L_{f_i} = P_i.$$

Hyödynnetään ääretöntä tulovarainta:

2.2.2012

Lause Olkoot $P_i: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$
 $i=1,2,\dots$ n mittaaja ja

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \mathbb{R}\} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R} \\ = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}. \quad \text{Määrittele}$$

Satunnaismuuttajat (projektiio)

$$X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_i(\omega) = \omega_i$$