

Johdatus stokastiikkaan

Johdanto

- Stokastisia malleja käytetään esim. taloudessa (optioiden hinnoittelu, Black-Scholesin osit, diff. yhtälö), lääketieteessä (esim. kudosten kuvaaminen) ja fysiikassa (esim. kvanttifysiikka).
- Moderni stokastiikka perustuu mittateorialle (jota opiskellaan myös kurssilla Mitta- ja integrointiteoria)
- Mittateorian kehittäjiä: Lebesgue, Borel, Radon...
- Mittateorian soveltaminen stokastiikkaan Kolmogorov 1930-luvulla
- Levý, Hunt, Doob...

Esim (i) Mallinnetaan satunnaisuuden käsitettä. Nopanheitto:

Otosavaruus $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

Kukin Ω :n piste on alkeistapaus
esim $1 \in \Omega$.

Ω :n osajoukkoa, esim

$A = \{1, 2, 3\} \subset \Omega$ kutsutaan
tapauhmaksi. Tässä tapauksessa

on luonnollista ottaa
todennäköisyysfunktio f
joka kertoo kuinka todennäköi-
sesti alkeistapaus $\omega \in \Omega$
sattuu. Nyt

$$f(1) = f(2) = \dots = f(6) = \frac{1}{6}$$

on järkevää jos noppa kunnollinen.

$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$ on luonnollinen

vaatimus; "Kaikkien tapausten t_n on 1".

$$P(A) = P(\{1, 2, 3\})$$

$$= P(\text{"nopanheitossa saadaan 1, 2 tai 3"})$$

$$= \sum_{\omega \in \{1, 2, 3\}} f(\omega) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

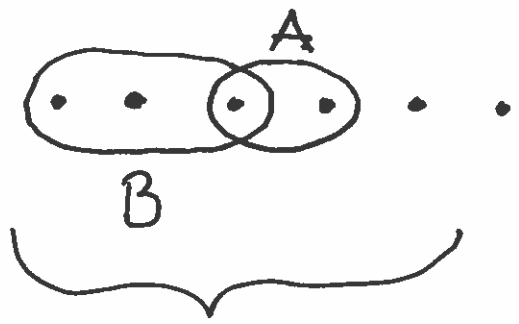
Tämä on tapahtuman A todennäköisyys (joka saatiin laskemalla alkeistapausten t_n yhteen)

Ehdollinen todennäköisyys:

$$P(A | B) = P(\text{"A ehdolla B"})$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"Rajoitetaan otosavaruus B:n ja
normeerataan mitti yhdeksi!"



Esimerkiksi meille annettu tieto 1, 2, 3 ^{sattu} nopanheitossa. Millä todennäköisyydellä luku oli 3 tai 4?

$$P(\{3, 4\} | \{1, 2, 3\}) = \frac{P(\{3, 4\} \cap \{1, 2, 3\})}{P(\{1, 2, 3\})}$$

$$= \frac{P(\{3\})}{P(\{1, 2, 3\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Ylinumeroituvan otosavaruuden
tapauksessa y.o. lähestyminen
johtaa ongelmiin ∇
0

Odotusarvo (nopanheittotapaukselle,
HUOMAA: Yleisesti ω voi olla
muutakin kuin luku esim.
vektori)

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \omega = \sum_{i=1,2,\dots,6} P(i) i \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) \\ &= \frac{21}{6} = 3 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

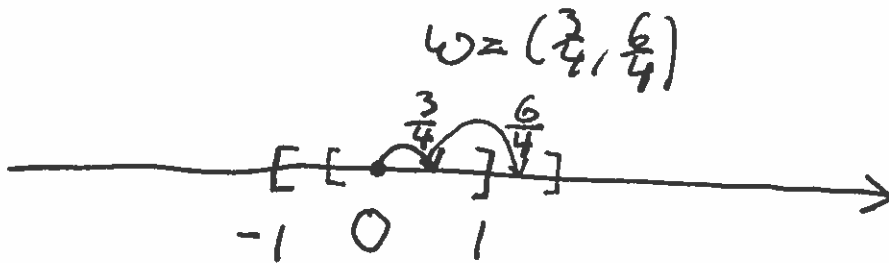
Ehdollinen odotusarvo (nopanheittolle)

$$\begin{aligned} E(X | \{1,2,3\}) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega | \{1,2,3\}) \omega \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{P(\{\omega\} \cap \{1,2,3\})}{P(\{1,2,3\})} \omega \\ &= \sum_{\omega \in \{1,2,3\}} P(\{\omega\}) \omega \quad \bigg/ \quad P(\{1,2,3\}) \\ &= \frac{\frac{1}{6}(1+2+3)}{\frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

(ii) Kahden askeleen 1D satunnais-
kävely. Kun ollaan x :ssä,

alkupiste
0

seuraava piste valitaan
satunnaisesti (esim "joka piste
yhtä todennäköinen" eli arvotaan
tasajakaumasta) väliltä
 $[x-1, x+1]$.



Otosavaruus $\Omega = \mathbb{R}^2$ (esimerkiksi)

$$\Rightarrow w = (w_1, w_2).$$

Vastaavasti yhden askeleen
1D satunnaiskävely

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ eli } w = (w_1).$$

Tällöin kunkin yksittäisen
pisteen $\pm n$ $P(\{w\}) = 0$

Muutenhan

$$\sum_{\omega \in [-1,1]} P(\{\omega\}) = \infty, \text{ koska}$$

$[-1,1]$ ääretön (jopa ylinumeroituva)

Jos $P(\{\omega\}) = 0$, miten minkään tapahtuman t_n voi olla positiivinen?

HUOMAA Selvästikään alkeistapausten t_n yhteentulo ei johda mihinkään!

$\Rightarrow$ Täytyy integroida ja siihen tarvitaan mittateoriaa!

Ehdollinen todennäköisyys?

Toisen askeleen ^{paikan} odotusarvo, kun tiedetään, että 1. otettiin pisteeseen $\omega_1 = \frac{3}{4}$?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \nearrow \nearrow$$

$B = "w_1 = \frac{3}{4}"$ ja
edellä pääteltiin, että

$$P(B) = 0 \quad \nabla$$

Esim (i) Yhden kolikonheiton
otosavaruus $\Omega = \{H, T\} = \{0, 1\}$.

(ii) Kahden ——— $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
 $= \{00, 01, 10, 11\}$

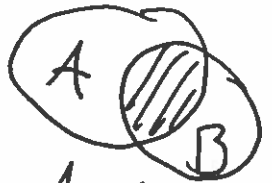
(iii) Lampun elinikä
 $\Omega = [0, \infty)$

Kertaus

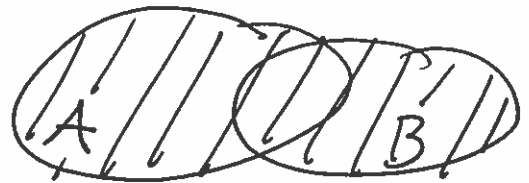
Joukon Ω osajoukot,
"potenssijoukko"

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A; A \subset \Omega\} = \underline{\underline{2^\Omega}}$$

Leikkaus: $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ja } \omega \in B\}$
"A ja B sattuu"



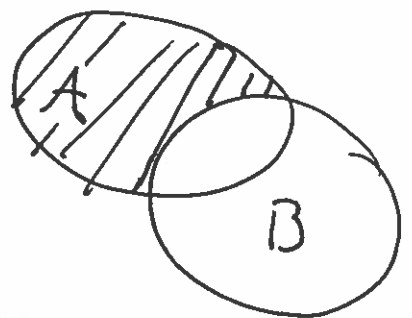
Yhdiste: $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ tai } \omega \in B\}$
"A tai B sattuu"



Joukkojen erotus

$$A \setminus B = \{\omega \in A : \omega \notin B\}$$

"A sattuu mutta B ei"



Komplementti

$$A^c = \Omega \setminus A$$

$$(A^c)^c = (\Omega \setminus (\Omega \setminus A)) = A$$

Karakteristinen funktio

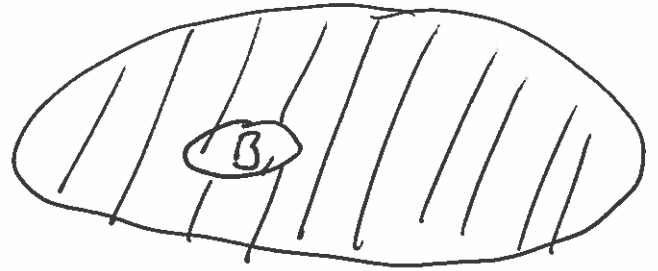
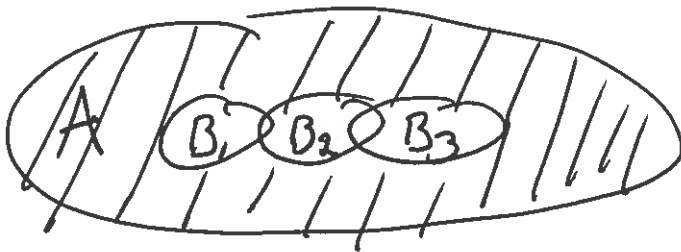
$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$



(tai toinen nimi:
indikaattorifunktio
 $\mathbb{I}_A(\omega) = \chi_A(\omega)$) (9)

De Morganin lait

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i)$$



Erityisesti

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right)^c &= \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus B_i) \\ &= \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c \end{aligned}$$

Samoin

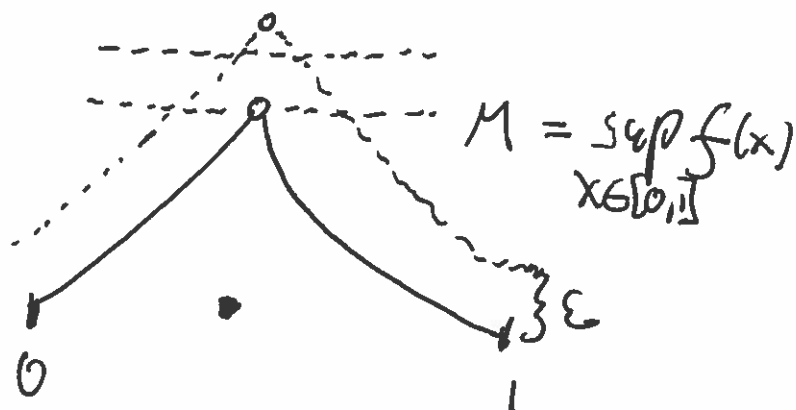
$$A \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i) \quad \text{ja}$$
$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c.$$

Sup ja inf

$$\sup_{x \in [0,1]} f(x) = \text{pienin } M \text{ s.e.} \\ f(x) \leq M \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) = \text{suurin } m \text{ s.e.} \\ f(x) \geq m \quad \forall x \in [0,1]$$

Esim



Huom Välttämättä ei päde

$$\sup_{x \in [0,1]} f(x) = f(y) \text{ millään } y \in [0,1]$$

(vrt. kuva).

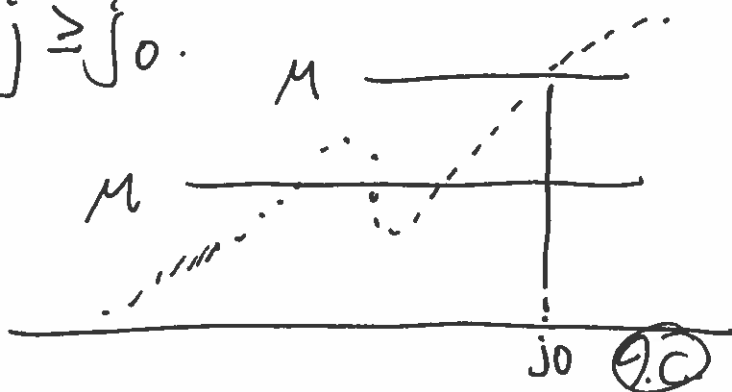
Tärkeä $\forall \epsilon > 0 \exists y \in [0,1] \text{ s.e.}$

$$\sup_{x \in [0,1]} f(x) \leq f(y) + \epsilon. \text{ (vrt. kuva)}$$

Jonot ja sarjat

$$(i) \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \infty \text{ jos } \forall M \in \mathbb{R} \exists j_0 \in \mathbb{N}$$

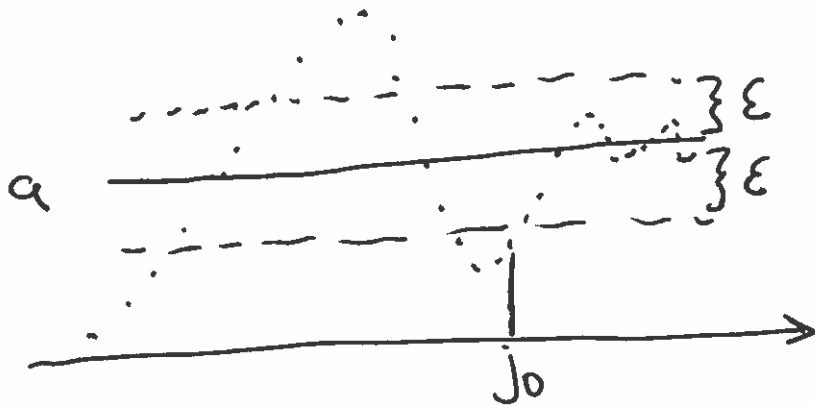
$$\text{s.e. } x_j > M \text{ kun } j \geq j_0.$$



$$(ii) \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a \quad \text{jos}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ s. e.}$$

$$|a - x_j| < \varepsilon, \text{ kun } j > j_0.$$



Sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k a_i$$

Lause

$$a_{ij} \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Ääretön yhdiste ja leikkaus

$$\bigcup_{i \in I} E_i = \{\omega : \omega \in E_i \text{ jollakin } i \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} E_i = \{\omega : \omega \in E_i \text{ kaikilla } i \in I\}$$

I voi olla myös ylinumeroituva!

Todennäköisyysavarauudet

Määritelmä

Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kutsutaan todennäköisyys- tai mitta-avaruudeksi,
 $\mathcal{F}$ on taphtumien muodostama
 σ -algebra ja

$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ on tn-mitta, joka
kertoo kuinka tn:n taphtuma on.

Kysymys

Miksi P määritellään $\mathcal{F}$:llä
eikä 2^Ω :lla? Selviää kohta!

Määritelmä Joukkofunktio

$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ on todennäköisyys-
mitta, jos

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ ja
 $A_i \cap A_j = \emptyset$ kun $i \neq j$ eli
joukot pistevieraita

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(täysadditiivisuus)

HUOMAA (iii) sanoo, että erillisten
tapahtumien tn voidaan ei välttämättä
laskea yhteen. Jos $P(\Omega) = 1$ puhutaan
mitasta, esim. Lebesguen mitta.

Määritelmä $\mathcal{A}$ on σ -algebra, jos

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Esim

(i) $\{\emptyset, \Omega\}$ muodostaa σ -algebran
(pienin)

(ii) 2^Ω — " — (suurin)

(iii) $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

(iv) $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Esim.

$\{\{1\}, \{2, 3\}, \emptyset, \{1, 2, 3\}\}$ ja

$2^\Omega = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset, \{1, 2, 3\}\}$
ovat σ -algebroita.

Esimerkki $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \emptyset, \{1, 2, 3\}\}$

$P(\emptyset) = 0$, $P(A) = \frac{1}{2}$ kun $A \neq \Omega, \emptyset$

$P(\Omega) = 1$.

$$A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{2, 3\}$$

$$\left. \begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= 1 \\ P(A_1) + P(A_2) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ ok}$$

$\Rightarrow P$ on todennäköisyyshmitta
 σ -algebralla $\mathcal{I}$.

VAROITUS

$$\mathcal{I}' = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \\ \{1, 2, 3\}, \emptyset \} \text{ ja}$$

määritellään P kuten edellä.

$$A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{2\}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2} \neq P(A_1) + P(A_2) = 1$$

P ei ole tn mitta σ -algebralla
 $\mathcal{I}'$.

Vastaus 5.10 kysymykseen

1. $\mathcal{I}$ on sovittava tilanteeseen.

Esim. edellä $(\mathcal{I}, \mathcal{P})$ sopii tilanteeseen, jossa tiedetään $\{2,3\}$ sattuu $\pm n$ $\frac{1}{2}$, mutta ei tiedetä millä $\pm n$ $\{2\}$ tai $\{3\}$ sattuu erikseen.

Mitä suurempi $\mathcal{I}$, sitä enemmän tiedämme tilanteesta.

2. Lebesguen mitta $\mathbb{R}^2$:ssa on pinta-alan yleistys, merkitään m :

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(B(0,1))} = \frac{m(A)}{\pi \cdot 1^2} = \frac{m(A)}{\pi}$$

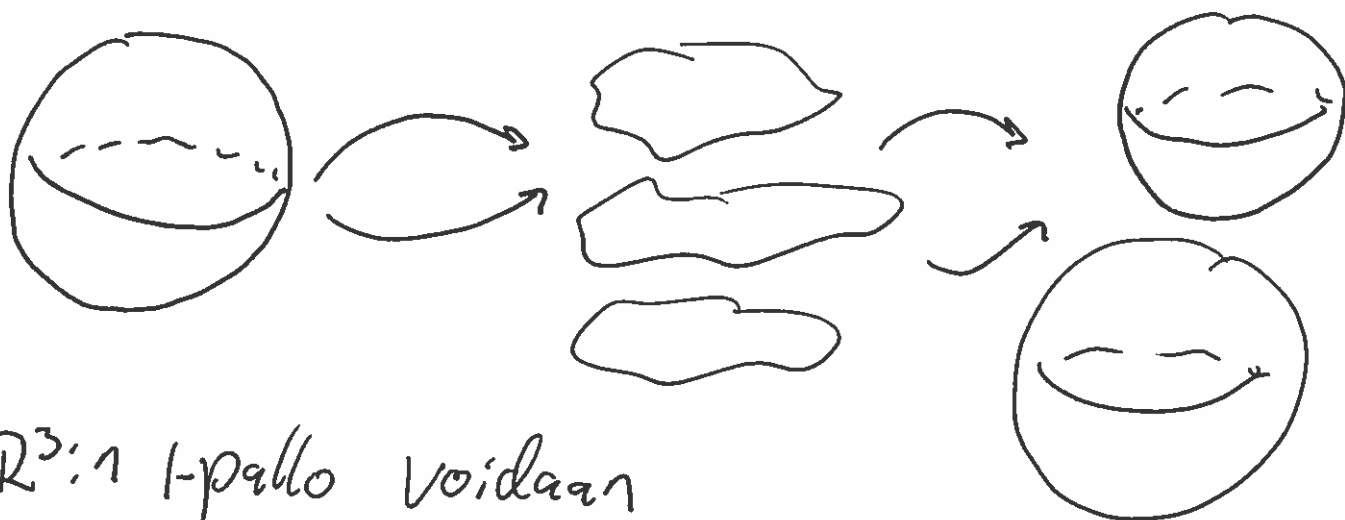
on $\pm n$ mitta, kun

$\mathcal{I}$ on nk. Leb. mitalliset

joukot. Täysadditiivisuutta ei

saada voimaan kaikilla osajoukoilla ∇ (14.)

Leib. mitalle pätee nk. Banach-Tarskin "paradoksi":



$\mathbb{R}^3$: 1 1-pallo voidaan
jakea pisteriiväisiin joukkoihin
ja koota kierroilla ja siirroilla kahdeksi
1-palloksi.

On siis olemassa niin monimutkaisia
joukkoja, että niille ei voida määrätä
järkevästi pinta-alaa.

Nimitys $\mathcal{I}$:n joukkoja kutsutaan
 $\mathcal{I}$ -mitallisiksi.

Mitallisille
joukoille ei tapahdu ylläolevan
kaltaisia kummallisuksia.

Määritelmä (algebra)

$$(i) \phi, \Omega \in \mathcal{A}$$

$$(ii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$(iii) A_1 \text{ ja } A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$$

HUOMAA Algebralle myös

$$A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}$$

σ -algebralle yhdiste voi olla numeroituvasti ääretön.

Monesti on helpompi määritellä σ -algebralla ja laajentaa se mitaksi σ -algebralla.

Esim (Algebra joka ei ole σ -algebra)

$$\mathcal{G} = \{ A \subset \mathbb{R} : A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \}$$

missä $-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \infty$.

Lisäksi $(a, \infty] := (a, \infty)$ ja
 $(a, a] = \emptyset$.

$\mathcal{G}$ on algebra (HT), mutta ei
 σ -algebra, koska

$(0, 1 - \frac{1}{i}] \in \mathcal{G}$, mutta

$$(0, 1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (0, 1 - \frac{1}{i}] \notin \mathcal{G}$$

Määritelmä

Pienintä σ -algebraa,
 joka sis. annetun joukko-
 kokouksen $\mathcal{G}$ kutsutaan $\mathcal{G}$:n
 generoimaksi
 σ -algebraksi.
 Merk. $\sigma(\mathcal{G})$

Lause Olkoot $\{\mathcal{Q}_j\}_{j \in J}$ σ -algebroja
 $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} \mathcal{Q}_j$ on σ -algebra

Esim. Borel
 Onko hyvin
 määrit.

Tod $\emptyset, \Omega \in \mathcal{Q}_j \quad \forall j \in J$

$$\Rightarrow \emptyset, \Omega \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{Q}_j$$

$$A_1, A_2, \dots \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{Q}_j$$

$$\Rightarrow A_1, A_2, \dots \in \mathcal{Q}_j \quad \forall j \in J$$

$\mathcal{Q}_j$ σ -alg

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{Q}_j \quad \forall j \in J$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \notin \bigcap_{j \in J} \mathcal{I}_j. \quad A \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{I}_j \Rightarrow A \in \mathcal{I}_j \nexists j$$

$$\Rightarrow A^c \notin \mathcal{I}_j \nexists j \in J$$

$$\Rightarrow A^c \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{I}_j \quad \square$$

Lause Olkoon $\mathcal{G}$ kokoelman $\mathcal{V}$ joukkoja.
 $\Rightarrow \exists$ pienin σ -algebra johon $\mathcal{G}$ kuuluu.

Tod Edellisen lauseen perusteella

$$\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap \{ \mathcal{I} : \mathcal{I} \text{ } \sigma\text{-alg. s.e. } \mathcal{G} \subset \mathcal{I} \}$$

on σ -algebra. Selvästi se

on pienin, koska

leikkaus otetaan kaikkien

tällaisten σ -alg. yli; $\square$

Tärkeä erikoistapaus:

Määritelmä Pienintä σ -algebraa,

joka sisältää avoimet joukot

kutsutaan Borelin σ -algebraksi.

Esim $\Omega = \mathbb{R}$, jolloin avoimet

(18)

joukot ok.)

HUOMAA Borelin σ -alg., jota
merkitään $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\text{avoimet joukot})$
olemassa edellisen lauseen
perusteella.

Lause Olkoot $\mathcal{B}$ Borelin
 σ -algebra $\mathbb{R}$:llä ja

$$\mathcal{G} = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{G}).$$

Tod: HT.

12.1.2012

Esim (i) Olkoon $x_0 \in \Omega = \mathbb{R}^n$

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases} \quad \text{ja}$$

$$\mathcal{Q} = 2^\Omega$$