Johdatus stokastiikkaan, kevät 2012
Harjoitus 6

1. Olkoon f satunnaismuuttuja tavallisessa nopanheitossa siten että
$$f(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \text{ pariton} \\ 2, & \omega \text{ parillinen.} \end{cases}$$
Laske odotusarvo $\mathbb{E}(f)$.
2. Heitetään kerran kolikkoa. Olkoot satunnaismuuttujat f ja g määritelty
$$f(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \text{ kruuna} \\ 0, & \omega \text{ klaava,} \end{cases} \qquad g(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \text{ kruuna} \\ 1, & \omega \text{ klaava.} \end{cases}$$
Ovatko satunnaismuuttujat riippumattomia? Perustele.
3. Päteekö Lebesguen monotonisen konvergenssin lause seuraavilla oletuksilla:
   (a) $f_i \geq 0$ on laskeva jono satunnaismuuttujia.
   (b) $f_i \leq 0$ on laskeva jono satunnaismuuttujia.
4. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ((0,1], \mathcal{B}(0,1], m)$ ja
$$f_i : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_i(\omega) = \frac{i+1}{i\omega^{1/2}}.$$
Laske $\lim_{i\to\infty} \mathbb{E}(f_i)$. Vihje: DOM.
5. Osoita, että jos $f \geq 0$ ja $\mathbb{E}(f) = 0$, niin $f = 0$ melkein varmasti. Vihje: Pätee (miksi?)
$$\mathbb{P}(\{f > \lambda\}) \leq \mathbb{E}(f)/\lambda, \qquad \lambda > 0.$$
6. Totea, että
$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$