

Johdatus stokastiikkaan, kevät 2012

Harjoitus 2

1. Olkoon $\mathbb{P}(A) = 1/3$ ja $\mathbb{P}(B) = 3/4$. Osoita, että aina $1/12 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/3$.
2. Olkoon $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i = a$. Osoita, että tällöin raja-arvo on olemassa ja $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$.
3. Olkoot $A, B \in \mathcal{F}$ riippumattomia tapahtumia. Osoita, että tällöin myös
 - (a) A^c ja B^c
 - (b) A^c ja Bovat riippumattomia tapahtumia.
4. Olkoot $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Oletetaan, että $\mathcal{G}$ koostuu joukoista, joille joko A tai A^c sisältää äärellisen monta elementtiä.
 - (a) Osoita, että $\mathcal{G}$ on algebra.
 - (b) Onko $\mathcal{G}$ myös σ -algebra.
5. Olkoon $\mathcal{B}$ Borelin σ -algebra $\mathbb{R}$:llä ja
$$\mathcal{G} = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}.$$
Osoita, että $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$.
6. Olkoon $\mathcal{F}$ σ -algebra ja $(A_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$. Osoita, että
$$\liminf A_i, \limsup A_i \in \mathcal{F} \text{ ja } \liminf A_i \subset \limsup A_i.$$
7. Osoita, että jos $A \cap B = \emptyset$, niin A ja B ovat riippumattomia vain, jos $\mathbb{P}(A) = 0$ tai $\mathbb{P}(B) = 0$.
8. Heitetään kahta kolikkoa. Määrittele Ω . Mikä on sopiva ensimmäisen heiton määräämä σ -algebra (joka siis sisältää esim tapahtuman ”ensimmäinen heitto kruuna”) ja tällä σ -algebralla määritelty todennäköisyysmitta. Laske ehdollinen todennäköisyys sille, että molemmat kolikonheitot antavat kruunan, jos tiedetään että ensimmäinen heitto oli kruuna.