

Lause Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, jatkuva.
 f abs. jatkuva
 $\Rightarrow$

f kuvaa nollamittaiset joukot
nollamittaisiksi.

Muistutus Cantorin fkt:lle

$m(C) = 0$
ei käsitellä, $\rightarrow$ s. 160
Määritelmä

mutta $f(C) = [0, 1]$.

28.10.2011, 1. osan Toppu

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jos

$$V_f(a, b) = \sup \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \infty,$$

missä $\sup$ otetaan yli kaikkien
jakojen

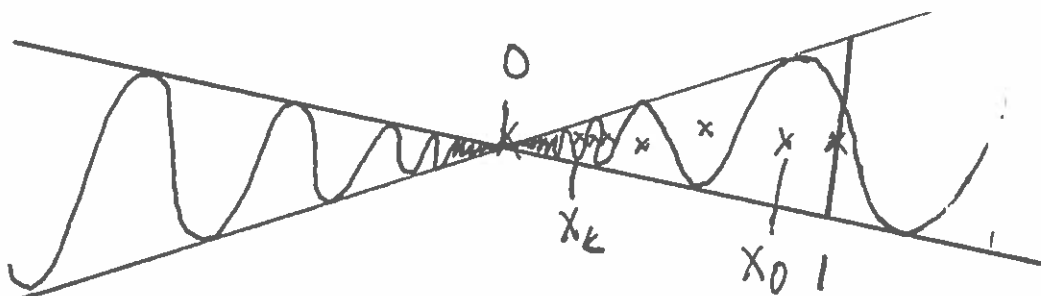
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b,$$

noin f on rajoitetusti
heilahteleva. Merkitään

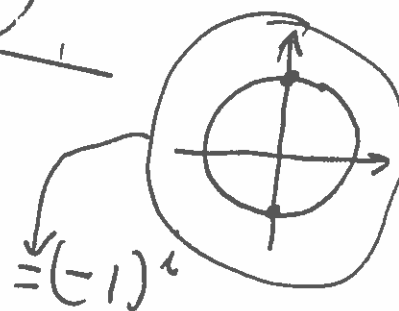
$f \in BV$ (= Bounded variation)

Esim Jatkuva fktio f s.e. $f \notin BV$.

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



f on jatkuva.



$$x_i = \frac{1}{(i+\frac{1}{2})\pi} \Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{(i+\frac{1}{2})\pi} \sin((i+\frac{1}{2})\pi) \\ = \frac{(-1)^i}{(i+\frac{1}{2})\pi}$$

$$\frac{(i-\frac{1}{2})\pi + (i+\frac{1}{2})\pi}{(i-\frac{1}{2})\pi (i+\frac{1}{2})\pi}$$

$$\Rightarrow |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{1}{(i+\frac{1}{2})\pi} + \frac{1}{(i-\frac{1}{2})\pi} > \frac{2}{i\pi}$$

$$\Rightarrow V_f(a,b) \geq |f(x_k) - f(0)| + |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \\ + \dots + |f(x_0) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_0)|$$

$$\geq \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1}) - f(x_i)| \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Esim. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ei vähenevä.

$$\Rightarrow V_f(a, b) = f(b) - f(a) \Rightarrow f \in BV.$$

$\Rightarrow$ Cantorin funktio $\in BV$ vaikka ei abs. jatkuva.

Lause $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ abs. jva.

$\Rightarrow \exists$ kasvavat φ, ψ s.e.

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Tod Apuväite: $\varphi(x) := V_f(a, x)$

on (i) kasvava ja (ii) rajoitettu fktio.

Syy [i] kasvavuus selvä suoraaan määritelmästä.

Olkoon $\varepsilon = 1$ jolloin $\exists \delta > 0$ s.e.

$$\sum_{i=0}^k |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^k |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon. (1)$$

Valitaan $n > 0$ s.e.

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Aina voidaan lisätä pisteet

$$x_{ij} = a + j \frac{b-a}{n}, \quad j = 0, \dots, n$$

jakoon

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_{i_1} = x_3 & & x_{i_2} = x_8 & & x_{i_3} = x_{14} = b \\ | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot | & & & & & & \\ a = x_{i_0} = x_0 & & x_{i_2} = x_6 & & x_{i_4} = x_{10} & & n=5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{i=i_j+1}^{i_{j+1}} |f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{\substack{\text{kukin osaväli} \\ \text{summataan} \\ < \varepsilon = 1 \\ \cup}} \\ &\leq n \\ &\Rightarrow f \text{ rajoitettu.} // \end{aligned}$$

Asetetaan

$$f(x) = V_f(a, x) - \overbrace{(V_f(a, x) - f(x))}^{=: \psi(x)} \\ = \varphi(x) - \psi(x),$$

Myös $\psi(x) = V_f(a, x) - f(x)$

Kasvava; $x_2 > x_1$

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = V_f(a, x_2) - f(x_2)$$

$$- (V_f(a, x_1) - f(x_1))$$

Pätee
 $V_f(a, x_2)$
 $- V_f(a, x_1) = V_f(x_1, x_2)$
Ei tod.

$$= V_f(x_1, x_2) - (f(x_2) - f(x_1))$$

$$\geq |f(x_2) - f(x_1)| - (f(x_2) - f(x_1))$$

$$\geq 0.$$

□

Lause f abs. jva $\Rightarrow f \in BV$

Tod Ed. tod. f abs. jva.

$$\Rightarrow V_f(a, x) \stackrel{\uparrow}{=} V_f(a, b) \text{ rajoitettu}$$

val. $x=b$

(58.)

Kooste

(i) Jos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $a < c < b$,
niin $V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b)$ (HT)

(ii) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitetusti
heilahteleva $\Rightarrow f$ rajoitettu

(iii) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kasvava
 $\Rightarrow f$ raj. heilahteleva

(iv) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ raj. heilahteleva

$\Leftrightarrow$
 $\exists$ ei-vähenevät $\psi, \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.e.

$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) \quad \forall x \in [a, b].$

ei käsitellä

s. 154 - 159

L^p -avaruudet

Määritelmä Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$ mitallinen fktio. Tällöin $f \in L^p(A)$, $1 \leq p < \infty$ jos

$$\|f\|_p := \left(\int_A |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

HUOMAUTUS

- (i) $f \in L^1(A) \Leftrightarrow f$ integroitava $p=1$
- (ii) $f \in L^p(A) \Leftrightarrow |f|^p$ integroitava $1 \leq p < \infty$
- (iii) Jos $q \geq p \geq 1$ ja $m(A) < \infty$, niin

$$f \in L^q(A) \Rightarrow f \in L^p(A).$$

Syy Olkoon $f \in L^q(A)$.

$$\|f\|_p^p = \int_A |f|^p dx$$

Leb.
esitys-
lause

$$= \int_0^\infty p \lambda^{p-1} m(\{x \in A: |f(x)| > \lambda\}) dx$$

$$= \int_0^1 p \lambda^{p-1} m(\dots) dx + \int_1^\infty p \lambda^{p-1} m(\dots) dx$$

$(M, m(A) < \infty)$

$$\leq \int_0^1 p \lambda^{p-1} M dx$$

$$\leq M \int_0^1 \lambda^{p-1} dx = M$$

$$+ \frac{p}{q} \int_1^\infty q \lambda^{q-1} m(\dots) dx$$

$$\lambda^{p-1} \leq \lambda^{q-1},$$

kun $\lambda \geq 1$

$$\leq \frac{p}{q} \int_1^\infty q \lambda^{q-1} m(\{x \in A: |f(x)| > \lambda\}) dx + M < \infty$$

$< \infty$, koska $f \in L^q$

$$\Rightarrow f \in L^p(A).$$

VAROITUS Jos $m(A) = \infty$, edellinen ei päde: $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f \in L^p([1, \infty[), \quad p > 1 \quad \text{koska}$$

$$\|f\|_p^p = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^p dx = \int_1^\infty \frac{x^{1-p}}{1-p} = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p} < \infty$$

$$\|f\|_1 = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \int_1^\infty \ln x = \infty$$

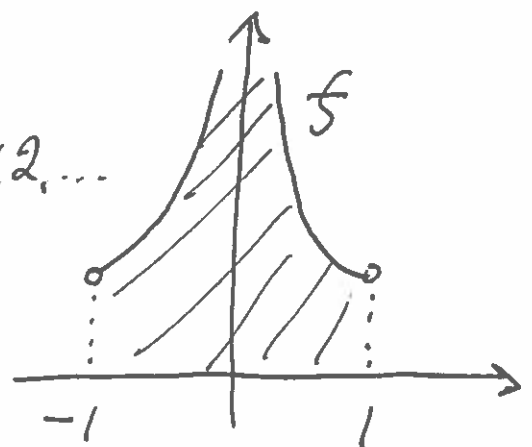
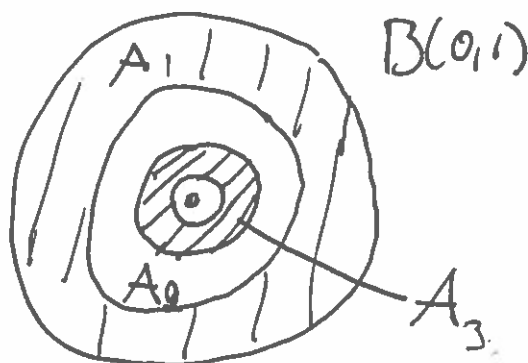
$$\Rightarrow f \notin L^1([1, \infty[).$$

Esimerkki:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty], \quad f(x) = |x|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\boxed{A = B(0, 1)}, \quad B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

$$A_i = B(0, 2^{i+1}) \setminus B(0, 2^i), \quad i=1, 2, \dots$$



$$x \in A_i \Rightarrow |x| \geq \bar{2}^i \quad \text{ja} \quad |x| \leq \bar{2}^{i+1}$$

$$\Rightarrow |x|^{-\frac{\eta p}{2}} \leq 2^{\frac{\eta p i}{2}} \quad \text{ja} \quad |x|^{-\frac{\eta p}{2}} \geq 2^{\frac{\eta p (i-1)}{2}} \quad (1)$$

$$\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{\eta p}{2}} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} |x|^{-\frac{\eta p}{2}} dx$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} 2^{\frac{\eta p i}{2}} dx = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{\frac{\eta p i}{2}} m(A_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B(0, \bar{2}^{i+1})) 2^{\frac{\eta p i}{2}}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{(-i+1)n} 2^{\frac{\eta p i}{2}} = \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-in+n+\frac{\eta p i}{2}}$$

$$\omega_n = m(B(0,1)) = \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{ni(\frac{p}{2}-1)+n} < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L^p(A), \text{ kun } p < 2.$$

$$\text{Kun } n(\frac{p}{2}-1) < 0 \\ \Leftrightarrow p < 2$$

$$\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{\eta p}{2}} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} |x|^{-\frac{\eta p}{2}} dx$$

$$\stackrel{(1)}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) 2^{\frac{\eta p (i-1)}{2}}$$

$$= \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} \bar{2}^{-in} (2^n - 1) 2^{\frac{n}{p}(i-1)}$$

$$\begin{aligned} m(A_i) &= m(B(0, \bar{2}^{i+1}) \setminus B(0, \bar{2}^i)) \\ &= m(B(0, \bar{2}^{i+1})) - m(B(0, \bar{2}^i)) \\ &= \omega_n (2^{\frac{(i+1)n}{2}} - 2^{\frac{in}{2}}) = \omega_n \bar{2}^{-in} (2^n - 1) \end{aligned}$$

$$= \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{\frac{in}{2}(p-1)} \bar{2}^{-\frac{in}{2}} (2^n - 1) = \infty$$

$\Rightarrow f \notin L^p(B(0,1))$ jos $p \geq 2$.

$$\begin{aligned} n\left(\frac{p-1}{2}\right) &\geq 0 \\ p &\geq 2 \end{aligned}$$

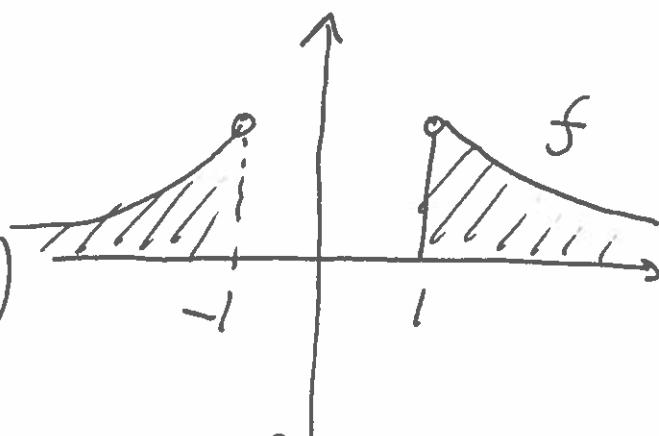
Sis tälle f

$$f \in L^p(B(0,1)) \Leftrightarrow 1 \leq p < 2$$

$$A = \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$$

$$A_i = B(0, 2^i) \setminus B(0, 2^{i-1})$$

$i=1, 2, \dots$



Samaan tapaan kuin edellä

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)) \Leftrightarrow p > 2$$

Periaate Mitä pienempi p sitä
pahempia lokaaleja singulariteetteja
 L^p -funktioilla voi olla.

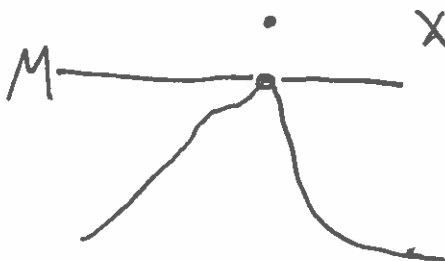
Toisaalta, mitä suurempi p
sitä enemmän L^p -funktio
voi olla levinnyt globaalisti.

$$\underline{\underline{L^\infty(A)}}$$

Määritelmä Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen
joukko ja $f: A \rightarrow [-\infty, \infty]$ mitallinen
fktio. Tällöin $f \in L^\infty(A)$, jos
on olemassa $M \in [0, \infty[$ s.e.
 $|f(x)| \leq M$ m.k. $x \in A$.

Jos $f \in L^\infty(A)$, niin

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf \{ M : |f(x)| \leq M \text{ m.k. } x \in A \} \\ &=: \operatorname{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| < \infty. \end{aligned}$$



Idea $\|f\|_\infty$ on supremum lukuan-
ottamatta 0-mittaista joukkoa.

Esim (i) $f = \chi_Q$

$$\|f\|_\infty = 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1.$$

(ii) $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$
 $\Rightarrow f \notin L^\infty(]0, 1[),$ vaikka
 $f(x) < \infty \quad \forall x \in]0, 1[.$

HUOMAUTUS $f \in L^\infty(A), \varepsilon > 0$

$\Rightarrow m(\{x \in A: |f(x)| \geq \|f\|_\infty + \varepsilon\}) = 0$ ja
 $m(\{x \in A: |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}) > 0.$

Lemma Jos $f \in L^\infty(A)$, niin
 $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ m.l., $x \in A.$

Tod HT.

HUOMAUTUS (i) Vaihtoehtoisia määriä.

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup\{\lambda \geq 0 : m(\{x \in A : f(x) \geq \lambda\}) > 0\} \\ &= \inf\{M \geq 0 : m(\{x \in A : f(x) > M\}) = 0\}\end{aligned}$$

Lause Olkoon $f \in L^r(A)$ jollakin $r < \infty$. Tällöin

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

Tod Olkoon $t \in [0, \|f\|_\infty[$, ja

$$D := \{x \in A : |f(x)| > t\}.$$

$\Rightarrow m(D) > 0$ $\|f\|_\infty$:n määritelmän perusteella.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left(\int_A |f|^p dx\right)^{1/p} &\geq (t^p m(D))^{1/p} \\ &= t m(D)^{1/p}\end{aligned}$$



Jos $0 < m(D) < \infty$,

$$\Rightarrow m(D)^{1/p} \rightarrow 1, p \rightarrow \infty.$$

Jos $m(D) = \infty$, $m(D)^{1/p} = \infty$ ja
 siis aina

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq +.$$

Päti: $0 \leq t < \|f\|_\infty$ ja t muuten
 mielivaltaisen

$$\Rightarrow \liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty. \quad (1)$$

Toisaalta

$$\left(\int_A |f|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_A |f|^r |f|^{p-r} dx \right)^{1/p}$$

Voidaan olettaa $p > r$, koska $p \rightarrow \infty$

$$\leq \|f\|_\infty^{1 - \frac{r}{p}} \left(\int_A |f|^r dx \right)^{1/p}$$

$$|f| \leq \|f\|_\infty \text{ m.k.}$$

$$= \|f\|_\infty^{1 - \frac{r}{p}} \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \xrightarrow{\uparrow} \|f\|_\infty \quad (2)$$

$$\|f\|_r < \infty \Rightarrow \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \rightarrow 1, p \rightarrow \infty \quad (168.)$$

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \stackrel{(2)}{\leq} \|f\|_\infty \stackrel{(1)}{\leq} \liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p. \quad \square$$

Tämä motivoi merkinnän $\|f\|_\infty$. (3.11.2011)

Ongelma L^p ja L^∞ eivät
normiavaruuksia:

$$\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f = 0 \quad (\text{vaikka } f = 0 \text{ m.k.})$$

Korjataan ongelma samaistamalla
fktiot jotka m.k. samoja.

Määritelmä Määritellään
ekvivalenssirelaatio asettamalla

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ m.k. } A\text{'ssa.}$$

Merkitään fktion $f \in L^p(A)$
määrittämään ekviv. luokkaa

$$[f] = \{g \in L^p(A) : g \sim f\}$$

$$\tilde{L}^p(A) = \{[f] : f \in L^p(A)\}$$

normilla

$$\|[\zeta]\|_p = \|\zeta\|_p.$$

Luokan funktioit
Samat m.k

Prop. $\| [f] \|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0],$

missa $[0] = \{f \in L^p(A) : f \sim 0\}$, ja

Saadat normiaVaruus:

(i) $\| [f] \|_p \geq 0 \quad \forall [f] \in \tilde{L}^p(A)$

(ii) $\| [f] \|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$

(iii) $\| \lambda [f] \|_p = |\lambda| \| [f] \|_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $\| (\int_A |\lambda f|^p dx)^{1/p} \| = |\lambda| \| (\int_A |f|^p dx)^{1/p} \|$

$$(iv) \quad \| [f] + [g] \|_p \leq \| [f] \|_p + \| [g] \|_p$$

(iv) todistetaan kohta.)

Sopimus Emme merkitse $\tilde{L}^p(A)$ ja $[f]$,
vaan $L^p(A)$ ja f . Käytännössä tark.
Kuitenkin ^{että} samaistamme fktiot,
jotka yhtyvät melkein kaikkialla.

Lause (Hölderin epäyhtälö)

$f, g: A \rightarrow [0, \infty]$ mitallisia,
 $p > 1$ ja $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

$$\Rightarrow \int_A f g dx \leq \left(\int_A f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A g^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q)$$

Lemma (Youngin epäyhtälö)

$$a, b \geq 0, \quad p > 1$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

missä q on p :n Hölder-konjugaatti

$$\text{eli } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}.$$

HUOMAA

$$p=2 \Rightarrow q=2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \right)$$

$$1 < p < 2 \Rightarrow q > 2$$

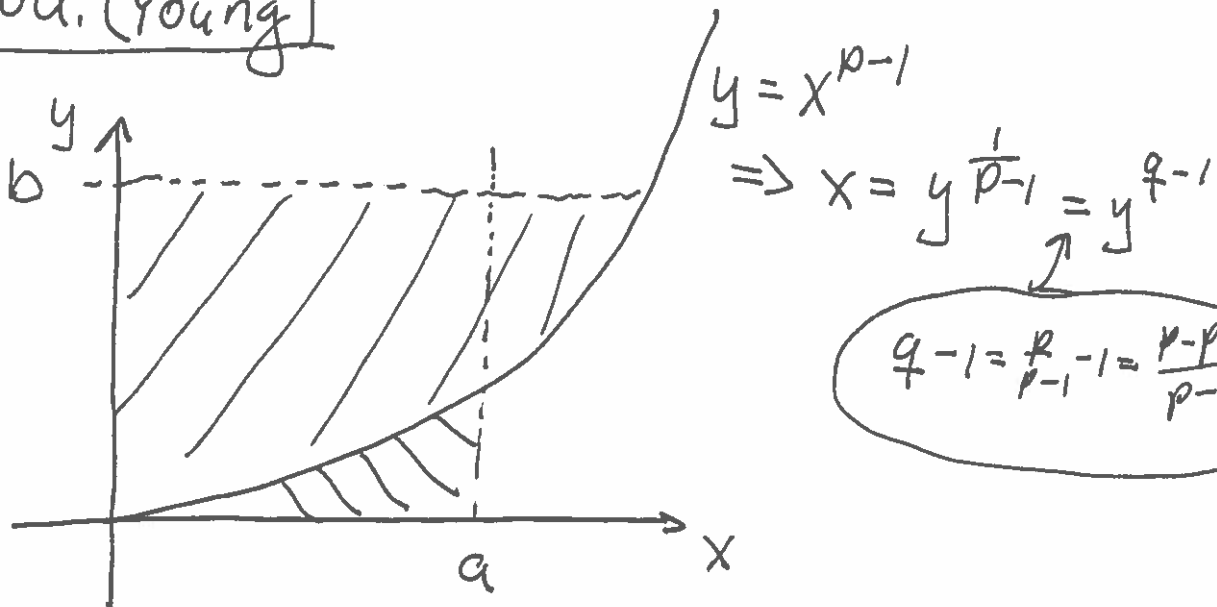
$$p > 2 \Rightarrow 1 < q < 2$$

Asetetaan myös

$$p=1 \Rightarrow q=\infty$$

$$p=\infty \Rightarrow q=1.$$

Tod. (Young)



$$q-1 = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{p-p+1}{p-1} = \frac{1}{p-1}$$

$$\begin{aligned} ab &\leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy \\ \text{(kuva)} &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square \end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälön todistus

$$\boxed{\|f\|_p = 0} \Rightarrow f = 0 \text{ m.k.} \Rightarrow fg = 0 \text{ m.k.} \Rightarrow \text{ok.}$$

$$\boxed{\|g\|_q = 0} \Rightarrow g = 0 \text{ m.k.} \Rightarrow fg = 0 \text{ m.k.} \Rightarrow \text{ok.}$$

$$\boxed{\|f\|_p > 0, \|g\|_q > 0}$$

$$\text{Jos } \|f\|_p = \infty \text{ tai } \|g\|_q = \infty \Rightarrow \text{ok}$$

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad \tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$$

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_A fg \, dx$$

$$\leq \int_A \tilde{f} \tilde{g} \, dx \leq \frac{1}{p} \int_A \tilde{f}^p \, dx + \frac{1}{q} \int_A \tilde{g}^q \, dx$$

$$= \frac{1}{p} \frac{\overbrace{\int_A \tilde{f}^p \, dx}^{=1}}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\overbrace{\int_A \tilde{g}^q \, dx}^{=1}}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$\Rightarrow \int_A fg \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Tapaus $p = \infty$:

$$\int_A fg dx \leq \|f\|_\infty \int_A g dx \leq \|f\|_\infty \|g\|_1,$$

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ m.e.}$$

Tapaus $q = \infty$ samoin. $\square$

VAROITUS $f, g \in L^p(A) \not\Rightarrow fg \in L^p(A)$.

Syy: $A =]0, 1[$, $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, g = f. \quad f, g \in L^1(A)$$

$$fg(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \notin L^1(A).$$

HUOMAA

$p = q = 2$ Hölderistä

Saadetaan

$$\int_A fg dx = \left(\int_A f^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_A g^2 dx \right)^{1/2}$$

Schwarzin ey.

Seuraus $m(A) < \infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Tällöin $f \in L^p(A) \Rightarrow f \in L^q(A)$.

Tod

$$\int_A f^p dx \leq \left(\int_A f^{\frac{q}{p}} \cdot p dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_A 1^{\frac{q}{q-p}} dx \right)^{\frac{q-p}{q}}$$

Hölder;

$$\frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{\frac{q}{q-p}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{q}{q-p}} = \frac{q-p}{q}$$

$$= \left(\int_A f^q dx \right)^{\frac{p}{q}} m(A)^{\frac{q-p}{q}}$$

Saatiin jopa estimaatti. $\square$

Lause (Minkowskin epäyhtälö)

Olkoon $p \geq 1$, $f, g \in L^p(A)$.

$\Rightarrow f+g \in L^p(A)$ ja

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Tod

$p=1$

trivialinen
A-ey

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\Rightarrow \int_A |f(x) + g(x)| dx \leq \int_A |f(x)| dx + \int_A |g(x)| dx$$

$\Rightarrow$ ok. (175)

$$\boxed{p = \infty}$$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\leq \|f(x)\|_{\infty} + \|g(x)\|_{\infty} \quad \text{m.k.}$$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \|f(x)\|_{\infty} \\ \text{m.k., samoin} \\ &g \text{ille.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Väite.

$$\boxed{1 \leq p < \infty}$$

Aina pätee $a, b \geq 0$; k.e.:

$$\begin{aligned} (a+b)^p &\leq (2 \max(a, b))^p \leq 2^p \max(a^p, b^p) \\ &\leq 2^p (a^p + b^p) \end{aligned}$$

Jos $\|f+g\|_p = 0$
 $\Rightarrow$ Väite ok.
 Olkoon $\|f+g\|_p > 0$

$$\Rightarrow \int_A |f(x) + g(x)|^p dx \leq 2^p \int_A |f(x)|^p + |g(x)|^p dx$$

$$\Rightarrow f+g \in L^p(A).$$

Lisäksi

$$|f+g|^p = |f+g| |f+g|^{p-1}$$

$$\leq \underbrace{|f|}_{\Delta\text{-eq}} |f+g|^{p-1} + |g| |f+g|^{p-1}$$

$$\Rightarrow \int_A |f+g|^p dx \leq \int_A |f| |f+g|^{p-1} dx$$

$$+ \int_A |g| |f+g|^{p-1} dx$$

$$\leq \left(\int_A |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_A |f+g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

↑
Hölder

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{p}{p} = 1 \right) + \left(\int_A |g|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_A |f+g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Jaetaan $\left(\int_A |f+g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} : \|g\|_p^{\frac{p-1}{p}} \neq 0, \infty$.

$$\Rightarrow \left(\int_A |f+g|^p dx \right)^{\frac{p}{p} - \frac{p-1}{p}} \leq \left(\int_A |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_A |g|^p dx \right)^{1/p}$$

□

Muistutus $(L^p(A), \|\cdot\|_p)$ on

normiarvaruus.

Jono (f_i) , $f_i \in L^p(A)$, $i=1,2,\dots$
Suppenee $L^p(A)$:ssa kohti
 funktiota $f \in L^p(A)$ jos
 $\forall \varepsilon > 0 \exists i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\|f - f_i\|_p < \varepsilon \text{ kun } i \geq i_\varepsilon.$$

Jono (f_i) on Cauchyn
 jono $L^p(A)$:ssa jos
 $\forall \varepsilon > 0 \exists i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\|f_i - f_j\|_p \leq \varepsilon \text{ kun } i, j \geq i_\varepsilon.$$

HUOMAA

Jos $f_i \rightarrow f$ $L^p(A)$:ssa, niin
 (f_i) on Cauchyn jono.

Syy

$$\|f_i - f_j\|_p = \|f_i - f + f - f_j\|_p$$

$$\stackrel{\uparrow}{\leq} \|f_i - f\|_p + \|f - f_j\|_p < \varepsilon$$

(Minkowski)

kun i, j riittävän suuria.

Lause (Riesz-Fisher 1907)

Jos (f_i) on Cauchyn jono

$L^p(A)$:ssa, $1 \leq p \leq \infty$, niin $\exists f \in L^p(A)$
s. e. $f_i \rightarrow f$ $L^p(A)$:ssa.

Muistutus Tällöin sanotaan, että

$L^p(A)$ on täydellinen normiaavaruus
eli Banachin avaruus.

4.11.2011