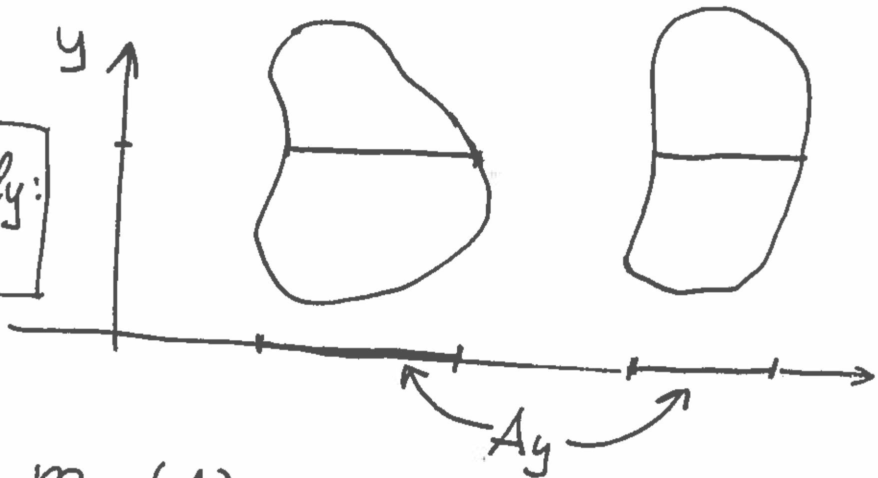
Esim (i) $m_2(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A \, dm_2$ miten dimensio

Fubini/Tonelli $= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,y)\,dx \right) dy$ $\mathbb{R}$:n Leb mitta

$= \int_{\mathbb{R}} m_1(A_y)\,dy$, missä

$A_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$ on A:n y-sektio.

Nimitys kaavalle $m_2(A) = \int_{\mathbb{R}} m(A_y)\,dy$: Cavalierin periaate



Erityisesti

$m_2(A) = 0 \Rightarrow m_1(A_y) = 0$ m.k. y

$m_2(A) < \infty \Rightarrow m_1(A_y) < \infty$ m.k. y.

(ii) $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$, $A \in \mathcal{M}_p$, $B \in \mathcal{M}_q$.
$n = p + q$

$\Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}_n$

ja $$m_n(A\times B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\times B}\, dm_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\chi_B(y)\, dm_n$$

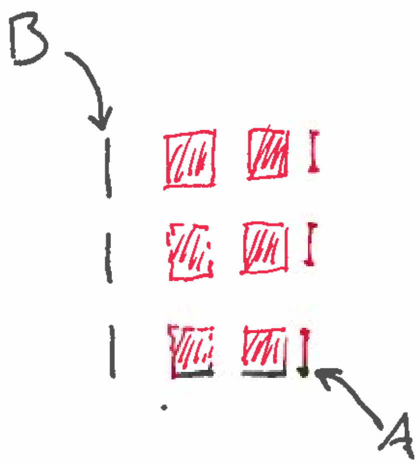
F/T

$\mathbb{R}^p$:n Leb. mitta

$$\overset{F/T}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \chi_A(x)\, \chi_B(y)\, dx \right) dy$$

$\mathbb{R}^q$:n Leb mitta

$$= \int_{\mathbb{R}^q} \chi_B(y)\, dy \int_{\mathbb{R}^p} \chi_A(x)\, dx$$



($A\times B \in \mathcal{M}_n$

<u>Syy</u> Approksimaatiolause:

F_A suljettu $\subset A \subset U_A$ avoin ja approksimoivat A:ta hyvin mitan mielessä.

Samoin B:lle. Pystyttäisiin toteamaan, että approksimaatio-ominaisuus periytyy A×B:lle tutkimalla joukkoja

$$F_A \times F_B \quad \text{ja} \quad U_A \times U_B .$$

Approksimaatio-ominaisuus karakterisoi mitalliset joukot.)

Fubinin/Tonellin lauseen todistuksen idea:

- Osoitetaan funktiolle $\chi_{A \times B}$

  ⋮
- Yleistetään — " — χ_M, $M \in \mathcal{M}$, $M \subset \mathbb{R}^n$.
- — " — yksink. fktiolle f_k.
- Otetaan kasvava jono $f_k \nearrow f$. MON antaa tuloksen mitalliselle.

Lause (Fubini)

Olkoon $n = p+q$, $p, q \in \mathbb{N}$,

$f: \underbrace{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q}_{\mathbb{R}^n} \to [-\infty, \infty]$ ja

ainakin yksi integraaleista äärellinen:

(*) $\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dm_n$, $\int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)| \, dx \, dy$, $\int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)| \, dy \, dx$

$\Rightarrow$ (i)-(iv) samat kuin Fubini/Tonellissa pätevät.

(v) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \, \underbrace{dm_n}_{\mathbb{R}^n\text{:n Leb. mitta}} = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \, \overbrace{dx}^{\mathbb{R}^p\text{:n Leb. mitta}} \, \underbrace{dy}_{\mathbb{R}^q\text{:n Leb. mitta}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \, dy \, dx$$

HUOMAUTUS (i) Integraalit (*) ovat Fubini/Tonellin perusteella samat.

(ii) Käytännössä siis tarkastetaan, että

$$\int_{\mathbb{R}^q}\int_{\mathbb{R}^p}|f(x,y)|\,dx\,dy<\infty,$$ jonka

jälkeen Fubini käytössä.

(iii) $$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,dx<\infty \iff f(x,y)\in L^1(\mathbb{R}^n),$$

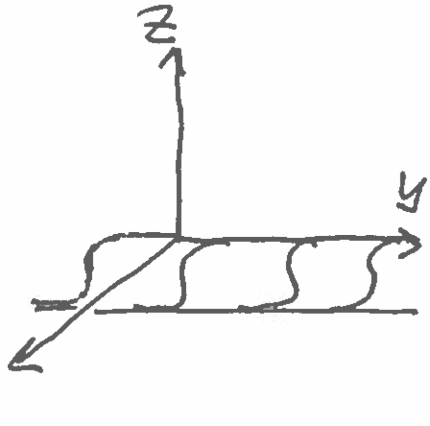
joten Fubini voitaisiin muotoilla:

$$f\in L^1(\mathbb{R}^n)\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f\,dm_n=\int_{\mathbb{R}^q}\int_{\mathbb{R}^p} f\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^q} f\,dy\,dx.$$

<u>Esimerkki / Varoitus</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,2\pi],\ y\in\mathbb{R}\\ 0, & \text{muuten}\end{cases}$$

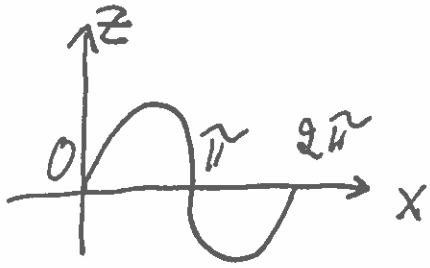
ei toteuta ehtoja.



$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{[0,2\pi]}\sin x\,dx\,dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}} 0\,dy=0$$



Toisaalta

$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\,dx$ ei määritelty,

koska $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sin x}_{\text{vakio y:n suhteen}}\,dy = \infty, & x \in\,]0,\pi[\\ \int_{\mathbb{R}} \sin x\,dy = -\infty, & x \in\,]\pi, 2\pi[\\ \int_{\mathbb{R}} 0\,dy = 0, & \text{muuten.} \end{cases}$

Näin ollen $\int_{\mathbb{R}} \dots dx$ johtaa $\infty - \infty$ tilanteeseen.

Huomaa: $\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{[0,2\pi]} |\sin x|\,dx}_{=\text{vakio}>0}\,dy = \infty.$

<u>Esim</u> $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in [-1,1]^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f mitallinen esim. suoraan määritelmästä.

Tällöin $\forall y \in [-1,1]$ pätee $(y \neq 0)$

$$\int_{[-1,1]} f(x,y)\,dx \underset{\text{Leb.}=\text{Riem.}}{=} \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

$$= y \int_{-1}^{1} x(x^2+y^2)^{-2}\,dx$$

$$= -y \Big/_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1} = -\frac{y}{2}\left((1+y^2)^{-1} - (1+y^2)^{-1}\right) = 0.$$

Vastaavasti

$$\int_{[-1,1]} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{yx}{(y^2+x^2)^2}\,dy = 0.$$

Kuitenkin $f \notin L^1([-1,1]^2)$, koska

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{yx}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{y}{2} \Big/_0^1 (x^2+y^2)^{-1}\,dy = -\int_0^1 \frac{y}{2}\left((1+y^2)^{-1} - \frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2y} - \frac{y}{2(1+y^2)}\,dy = \infty$$

$\int_0^1 \frac{1}{y}\,dy = \infty$

$\Rightarrow |f| \notin L^1 \Rightarrow f \notin L^1.$

Siis $y \mapsto f(x,y)$ ja $x \mapsto f(x,y)$ integroituvia

$\not\Rightarrow$ $(x,y) \mapsto f(x,y)$ integroituva.

Ei voida päätellä, että

$$\int_{[0,1]^2} f \, dm_2 = 0.$$

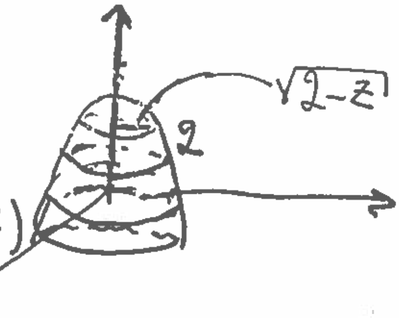
ei

Esim

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$$

$$-z + 2 \ge x^2 + y^2$$

mitta $= \pi(2-z)$



$$A_z = \begin{cases} \emptyset, & z < 0, \ z > 2 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - z \ge x^2 + y^2\}, & 0 \le z \le 2 \end{cases}$$

Cavalieri $\Rightarrow$ $m_3(A) = \int_{[-\infty,\infty]} m_2(A_z) \, dz$

$$= \int_0^2 \pi(2-z) \, dz = \pi(4-2) = 2\pi.$$

ei

Lause (Leb. int. esityslause)

Olkoon $f : A \to [0,\infty]$ mitallinen, $A \in \mathcal{M}$, $0 < p < \infty$.

$$\Rightarrow \int_A f^p \, dx = \int_{[0,\infty[} p \lambda^{p-1} m(\{x \in A : f > \lambda\}) \, d\lambda .$$

Tod VOE $f < \infty$ m.k.

$$\int_A f^p \, dx \overset{\text{0-jatko}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) f^p(x) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \int_0^{f(x)} \underbrace{p \lambda^{p-1}}_{\text{jatkuva}, \ \int_{[0,f(x)]} = \int_0^{f(x)}} d\lambda \, dx$$

VOE: $f < \infty$ m.k. koska muuten selvä.

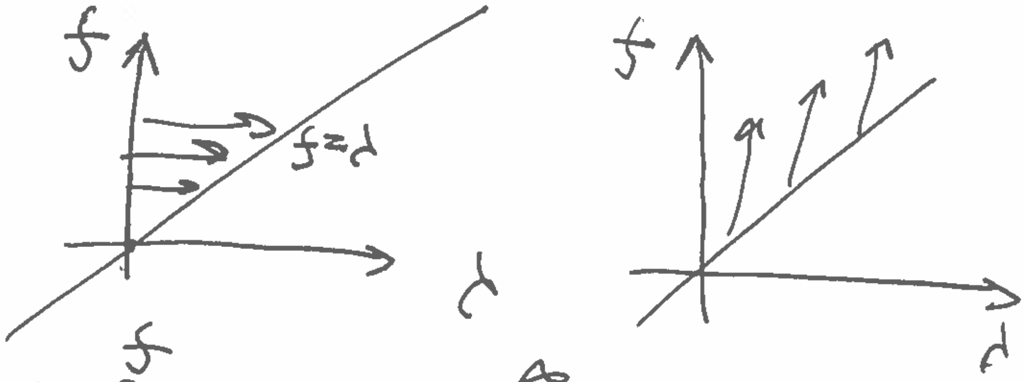
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \int_{\mathbb{R}} p \lambda^{p-1} \chi_{\{\lambda \in [0,\infty[: f(x) > \lambda\}}(\lambda) \, d\lambda \, dx$$

$$\overset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} p \lambda^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \chi_{\{\lambda \in [0,\infty[: f(x) > \lambda\}}(\lambda) \, dx \, d\lambda$$

$$= \int_{[0,\infty[} p \lambda^{p-1} m(\{x \in A : f(x) > \lambda\}) \, d\lambda \qquad \square$$

27.10.2011

Joskus seuraavasta kaavakuvasta voi olla iloa:



$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^f \dots \, d\lambda \, dx = \int_0^\infty \int_{\{f>\lambda\}} \dots \, dx$$

Absoluuttisesti jatkuvat fktiot

Analyysin peruslause

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(a) - f(b) = \int_a^b f'(x)\, dx$$

Päteekö yleisemmin?

$\Rightarrow$ Kyllä! Pätee absoluuttisesti jatkuville fktioille.

Määritelmä (Abs. jatkuvuus)

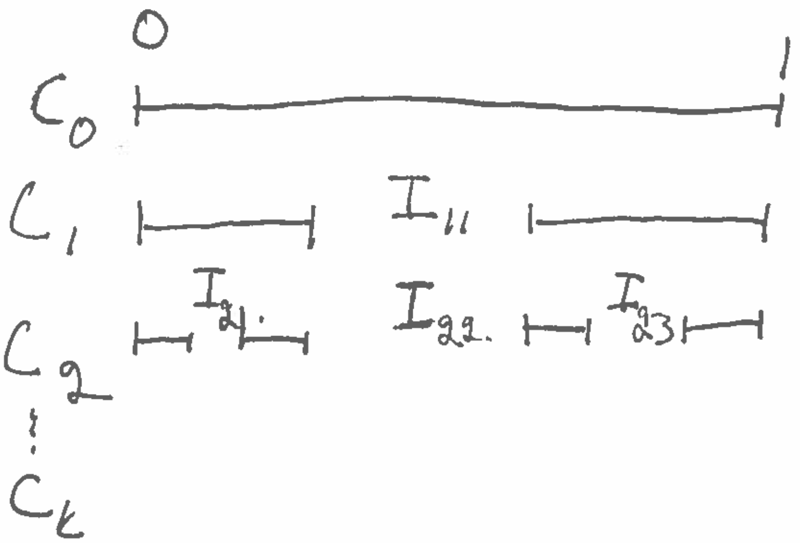
Funktio $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, jos $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.e.

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon, \quad \text{kun}$$

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{k} \,]a_j, b_j[\Big) = \sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta, \quad \text{missä}$$

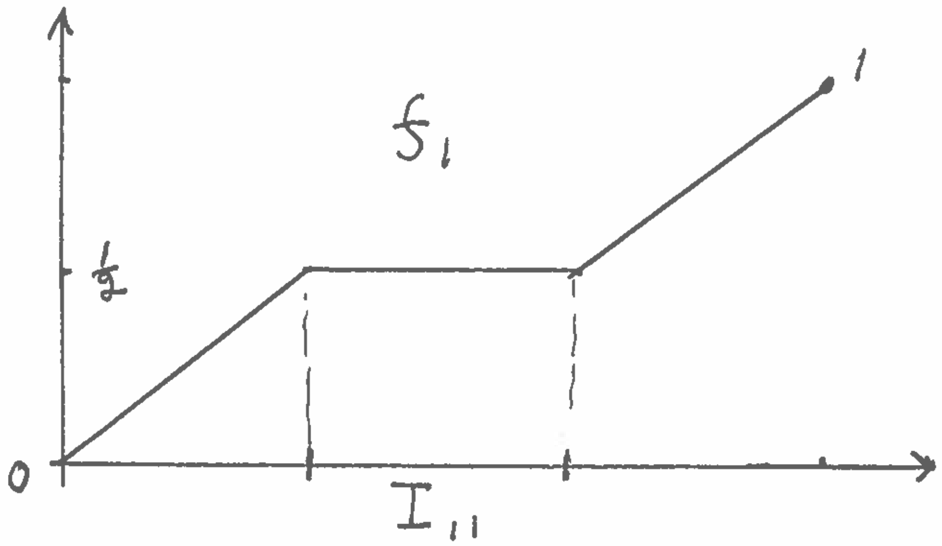
$]a_j, b_j[$ $j = 1, 2, \ldots, k$ ovat pareittain pistevieraita välejä.

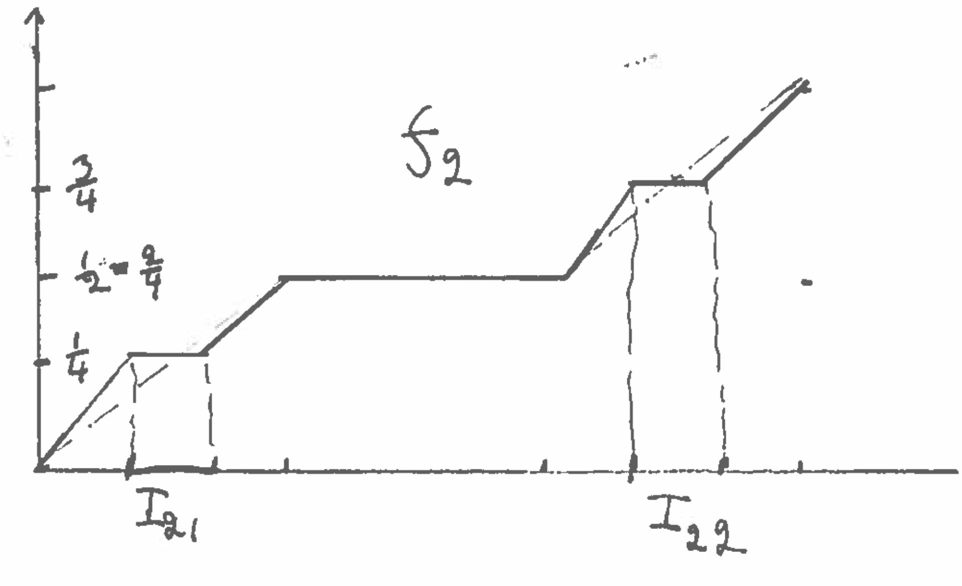
Esimerkki (Cantorin funktio, Ei absoluuttisesti jva fktio, Devil's staircase)



Olkoon $C_k = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^k-1} I_{ki}$

kuten Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon konstruktiossa (indeksointi nyt eri)





$f_k(0) = 0 \quad , \quad f_k(1) = 1$

$f_k(x) = \frac{i}{2^k} \; , \; x \in I_{ki} \; , \; i = 1, \dots, 2^k - 1.$

Muualla f_k lineaarinen.

$\Rightarrow f_k \in C([0,1])$ on kasvava ja

$\Rightarrow |f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^k} \quad \forall\, x \in [0,1]$

$\Rightarrow |f_k(x) - f_{k+m}(x)| < \sum_{j=k}^{k+m-1} \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall\, x \in [0,1]$

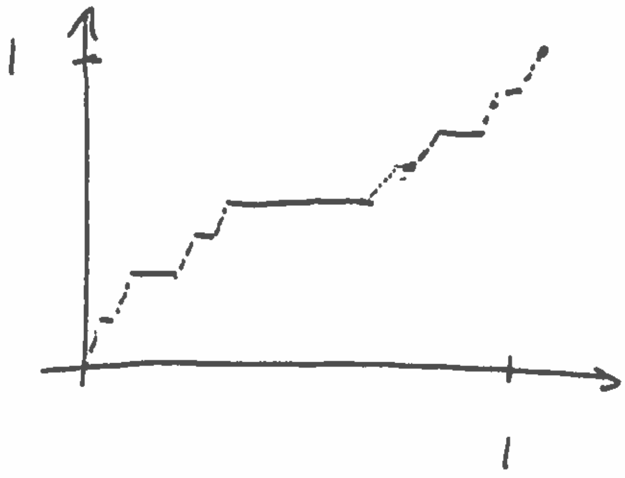
$\Rightarrow (f_k)$ on Cauchyn jono täydellisessä avaruudessa $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$,

missä $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

$\Rightarrow \exists f \in C([0,1])$ s.e.

$\|f_k - f\|_\infty \to 0, \; k \to \infty.$

($f_k \to f$ tasaisesti välillä $[0,1]$



Huomaa: f on vakio joukossa

I_{ki} ts.

Kaikki muutokset joukossa C:
$f(C) = [0,1]$.

Voidaan (ks. kuva)
$\forall \delta > 0$ valita välit $\underbrace{]a_i, b_i[}_{= J_{ki}}$ s.e.

$m\left(\bigcup_{j=1}^{k}]a_j, b_j[\right) < \delta$ ja

todistettiin Cantorin-$\frac{1}{3}$ yhteydessä

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| = 1.$$

$\Rightarrow f$ ei abs. jva.

Kuitenkin f on

(i) jatkuva

(ii) ei-vähenevä

(iii) $f([0,1]) = [0,1]$ jopa $f(C) = [0,1]$

$m(C) = 0$.

Asettamalla

$$g(x) = f(x) + x$$

$$g : [0,1] \to [0,2]$$

Saadaan fktio g joka on

(i) Aidosti kasvava

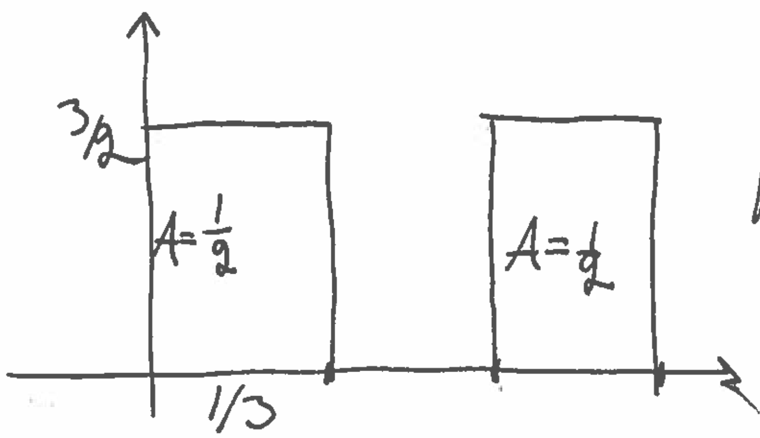
(ii) Bijektio

(iii) Ei abs. jatkuva.

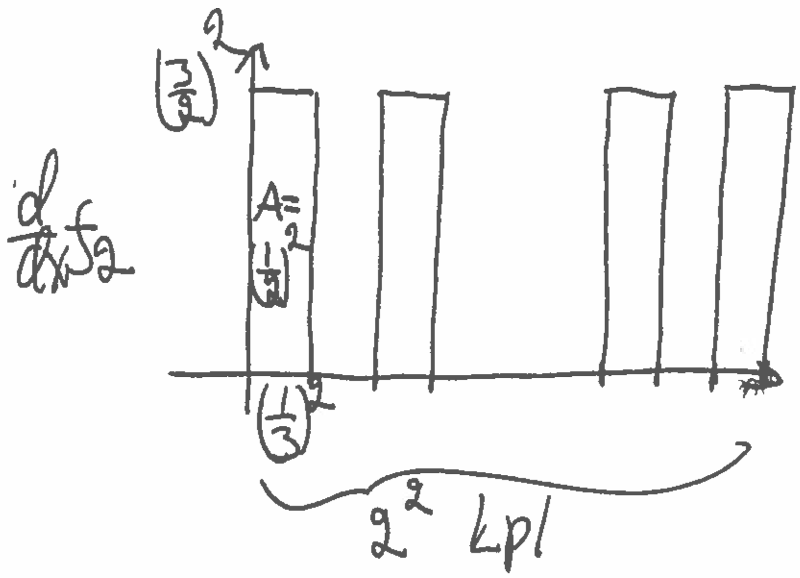
ei

Huomautus (ilman yksityiskohtia)

$\frac{d}{dx} f$,



Kokonaisala=1



Kokonaisala = 1.

$\lrcorner$ ei

Lause Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

f absoluuttisesti jva

$$\Longleftrightarrow$$

f m.k. $x \in]a,b[$ derivoituva,

$f' \in L^1([a,b])$ ja

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(y)\,dy \quad \forall x \in [a,b].$$

Tod "$\Leftarrow$" Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $f' \in L^1([a,b])$, pätee $\exists \delta > 0$

$$\underset{E \subset [a,b]}{m(E) < \delta} \Rightarrow \int_E |f'|\,dx < \varepsilon \qquad (1)$$

tod. aik.

Valitaan sitten $]a_i, b_j[$, $j=1,2,\ldots,k$ pistevieraita osavälejä s.e.

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{k}]a_j, b_j[\right) = \sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| \underset{\text{Oletus}}{=} \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{[a_j, b_j]} f'(y)\,dy \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{[a_j,b_j]} |f'(y)|\,dy = \int_{\bigcup_{j=1}^{k} [a_j, b_j]} |f'|\,dx \underset{(1)}{<} \varepsilon.$$

$$E := \bigcup_{j=1}^{k} [a_j, b_j]$$

Toista suuntaa emme todista. □

<u>Esim</u> (Cantorin funktio)

Olkoon f cantorin fktio.
Selvästi $f'(x) = 0$, $x \in [0,1] \setminus C$
eli $f' = 0$ m.k.

$$1 = f(1) - f(0) \neq \int_{[0,1]} f'(x)\,dx = 0.$$

$\Rightarrow$ Ei toteutu jälkimmäistä ehtoa.

Lause Olkoon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

f abs. jatkuva

$\Longleftrightarrow$

f kuvaa nollamittaiset joukot nollamittaisiksi.

Muistutus Cantorin fktiolle

$m(C)=0$, mutta $f(C)=[0,1]$.

Määritelmä 28.10.2011, 1. osan Loppu

Olkoon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Jos

$$V_f(a,b) = \sup \sum_{j=1}^{k} |f(x_j)-f(x_{j-1})| < \infty,$$

missä sup otetaan yli kaikkien jakojen

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_k=b,$$

niin f on *rajoitetusti heilahteleva*. Merkitään

$f \in BV$ (= Bounded variation)