

Huomautus "Dominoitu konvergenssi"
viittaa siihen, että g dominoi
kaikkia f_i .

Esimerkki Oletus integroituvasta
majorantista ei ole turha.

Syy $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = i \chi_{]0, 1/i]}(x)$
 $i = 1, 2, \dots$

$$\int_{\mathbb{R}} f_i dx = i \cdot \frac{1}{i} = 1, \text{ mutta}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{eli}$$



$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{i \rightarrow \infty} f_i dx = 0.$$

$$\neq 1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_i dx.$$

Tod DOM:

$$\int |f_i| \leq \int g < \infty \text{ ja } f_i \in L' \Leftrightarrow f_i \in L'$$

$$|f_i| \leq g \in L' \text{ m.k.} \Rightarrow f_i \in L'(\mathbb{R}^n)$$

$$g \geq \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i| = |f| \text{ m.k.} \Rightarrow f \in L'(\mathbb{R}^n)$$

Samoin,
D-mittäinen
joukko ei vaikuta

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g dx = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i \rightarrow \infty} (f_i + g) dx$$

$$\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i + g dx$$

↑ Fatou
 $f_i + g \geq 0$ m.k.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx + \cancel{\int_{\mathbb{R}^n} g dx} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx + \cancel{\int_{\mathbb{R}^n} g dx} \quad (1)$$

Samoin

$$\int_{\mathbb{R}^n} g - f dx = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i \rightarrow \infty} (g - f_i) dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} g dx + \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} -f_i dx$$

↑ Fatou
 $(g - f_i) \geq 0$ m.k.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow -\int_{\mathbb{R}^n} f dx &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} -f_i dx \\
 &= \liminf_{i \rightarrow \infty} -\int_{\mathbb{R}^n} f_i dx \\
 &= -\limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx. \quad (2)$$

(1) (2)
 $\Rightarrow$

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

$$\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx.$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx \quad \square$$

$\uparrow$

$\limsup \geq \liminf$
 a.i.n.g.

HUOMAUTUS Pätee myös

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| dx \rightarrow 0.$$

HT

(121)

Seuraus Olkoon $m(A) < \infty$, $A \in \mathcal{M}$,
 $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ mitallisia, ja

(i) $|f_i| \leq M$ m.k. $x \in A$

(ii) $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ m.k. $x \in A$.

$$\Rightarrow \int_A f dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i dx.$$

Syy $M \in L^1(A)$ ja DOM todistus
 $\int_A M dx = m(A)M < \infty$ pätee yhtäläillä
joukossa A .
(Fatou, MON
Samoin)

Seuraavaksi integraalin "absoluuttinen
jatkuvuus." Nimitystä ei perustella
tarkemmin,

Lause Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tällöin

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.e.

$$m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| dx < \varepsilon.$$

Tod Valitaan jono $E_i \in \mathcal{M}, i=1,2,\dots$ s.e.
 $m(E_i) \leq 2^{-i}.$

Olkoon

$$B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i.$$

$$\Rightarrow B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m(B_k) &\stackrel{\text{Subadd}}{\leq} \sum_{i=k}^{\infty} m(E_i) = \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} \\ &= 2^{1-k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \chi_{B_k} \rightarrow 0 \quad m.k.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{B_k} dx$$

LEMMA: $x_{B_k} f \leq f \in L^1$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f x_{B_k} dx = \int_{\mathbb{R}^n} 0 dx = 0.$$

$$\Rightarrow \exists B_k \text{ s.e. } \int_{B_k} f dx < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{E_k} f dx < \varepsilon \quad \bigcup^{\infty}$$

ainut ehto E_k ille oli että

$$m(E_k) < 2^{-k} \quad \square$$

Parametrissa riippuvat integraalit

Esimerkki: $f:]0,1[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = yx^2$

Osoitetaan

$$\int_{]0,1[} \frac{d}{dy} f(x,y) dx = \frac{d}{dy} \int_{]0,1[} f(x,y) dx.$$

$$\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \frac{(y+h)x^2 - yx^2}{h}$$

$$= \frac{hx^2}{h} = x^2 \leq 1, \text{ kun } x \in]0,1[. \quad (124)$$

$$\Rightarrow \int_{]0,1[} \frac{d}{dy} f(x,y) dx.$$

$$= \int_{]0,1[} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{]0,1[} \underbrace{\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}}_{\leq 1} dx$$

DOM
Seuraks $m([0,1]) \leq 1$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{]0,1[} f(x,y+h) dx - \int_{]0,1[} f(x,y) dx}{h}$$

$$= \frac{d}{dy} \int_{]0,1[} f(x,y) dx.$$

Itse asiassa

$$\int_{]0,1[} \frac{d}{dy} f dx = \int_{]0,1[} x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{d}{dy} \int_{]0,1[} f dx = \frac{d}{dy} \int_{]0,1[} y x^2 dx = \frac{d}{dy} y \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Samalla idealla saadaan:

Lemma (Differentiointilemma)

Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{M}$ ja
 $J \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Olkoon
fktio $f: X \times J \rightarrow \mathbb{R}$ s.e.

(i) $x \mapsto f(x, y)$ integroituva $\forall y \in J$.

(ii) $y \mapsto f(x, y)$ derivoituva $\forall x \in X$, eli
 $\frac{d}{dy} f$ olemassa.

(iii) $\exists h: X \rightarrow [0, \infty]$ integroituva
s.e.

$$\left| \frac{d}{dy} f(x, y) \right| \leq h(x) \quad \forall (x, y) \in X \times J.$$

Tällöin

$$\frac{d}{dy} \int_X f(x, y) dx = \int_X \frac{d}{dy} f(x, y) dx,$$

ja siis molempien puolien derivaatat
olemassa, integroituvia jne.

Todistuksen ydin kohta:

$$\left| \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \right| = \left| \frac{d}{dy} f(x, y') \right| \leq h(x) \in L^1(X).$$

Väliarvolause
 $y' \in [y, y+h]$

& DOM

□

Riemann vs. Lebesgue IR:ssä

Muistutus

(i) Porrasfunktio $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ saa äärellisen määrän eri arvoja ja

$$\{x \in \mathbb{R} : u(x) = c\}$$

on joko tyhjä tai yhdiste äärellisen monesta välistä.

(ii) Porrasfunktio on yksinkertainen, joten

$$\underbrace{\int_a^b u dx}_{\text{Riemann}} = \underbrace{\int_{[a,b]} u dx}_{\text{Leb.}}$$

(iii) Riemannin ala- ja yläintegraali:

$$\text{ala} \int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b u dx : u \text{ porraskunktio} \right. \\ \left. u \leq f \right\}$$

$$\text{ylä} \int_a^b f = \inf \left\{ \int_a^b u dx : u \text{ porraskunktio} \right. \\ \left. u \geq f \right\}$$

$\int_{[a,b]} u dx$

Missä $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(iv) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann integroituva, jos

$$\text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f =: \int_a^b f dx$$

HUOMAUTUS Jos f on mitallinen

$$\Rightarrow \text{ala} \int_a^b f dx \leq \int_{[a,b]} f dx \leq \text{ylä} \int_a^b f dx.$$

porraskunktiot

$u \leq f$ ja

u siis yksinkertainen

$$\int_{[a,b]} u dx \leq \int_{[a,b]} f dx$$

20.10.2011

128.

Lause Jos rajoitettu funktio
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann integroitava
 $\Rightarrow f$ Leb. integroitava ja

$$\int_a^b f dx = \int_{[a, b]} f dx.$$

HUOMAUTUS Sanoo: Leb. integraali
 yleisempi kuin Riemann.

Tod: Edellisen huomautuksen
 perusteella riittää osoittaa:
 f Riemann intra $\Rightarrow f$ mitallinen.

Riemann integraalin määritelmä
 $\Rightarrow \exists$ jono porraskunktioita
 $u_k \geq 0, u_k \leq f$ s.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} u_k dx = \int_a^b f dx$$

$\uparrow$
 $\int_{[a, b]} u_k dx = \int_a^b u_k dx$

ja $\exists$ jono porraskunktiioita

$$V_k \geq 0, \quad V_k \geq f \quad \text{s.e.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} V_k dx = \text{ylä} \int_a^b f dx.$$

Voidaan olettaa että

u_k kasvava ja V_k vähenevä,

(jos näin ei ole, tutkitaan

$$\tilde{u}_k = \max(u_1, u_2, \dots, u_k) \quad \text{ja}$$

$$\tilde{V}_k = \min(V_1, V_2, \dots, V_k)$$

Olkoot

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k, \quad V = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k \quad (\text{mitallisia})$$

$$\text{ala} \int_a^b f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} u_k dx = \int_{[a,b]} u dx$$

edellä

MON

Voidaan olettaa että $\sum u_k \geq 0$ lisäämällä vakio

MON, laskeva versio

$$\text{ylä} \int_a^b f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} V_k dx = \int_{[a,b]} V dx.$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} v - u dx = \int_{[a,b]} v dx - \int_{[a,b]} u dx$$

$$= y(a) \int f - a(a) \int f = 0$$

$$\Rightarrow v - u = 0 \text{ m.k.}$$

$$\begin{array}{c} v - u \geq 0 \\ \uparrow \\ u \leq v \\ \uparrow \\ u_k \nearrow f \leq v_k \end{array}$$

$$\Rightarrow u = v = f \text{ m.k.}$$

$$\begin{array}{c} u_k \nearrow u, v_k \searrow v \\ u \leq f \leq v \\ \hline u = v \text{ m.k.} \end{array}$$

$$\Rightarrow f \text{ mitallinen.}$$

$$\begin{array}{c} u \text{ ja } v \\ \text{mitallisia, koska} \\ u_k \nearrow u, u_k \text{ mitallisia} \end{array}$$

Lause (Lebesgues ehto)

Rajoitettu funktio $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
on Riemann integroitava

$\Leftrightarrow f$ on jatkuva m.k. $x \in [a,b]$.

Idea " $\Rightarrow$ "

Edellisen todistuksen porrastuksille:

$$u_k \nearrow f \quad \text{ja} \quad v_k \searrow f \quad \text{m.k.}$$

Porrastukset jatkuvia m.k.

$$N_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in [a,b] : u_k \text{ tai } v_k \text{ epäjatkua } x:ssä\}$$

$$\Rightarrow m(N_1) = 0.$$

$$N_2 = \{x \in [a,b] : \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) < f(x)\}$$

$$\cup \{x \in [a,b] : \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) > f(x)\}$$

$$m(N_2) = 0.$$

$$\Rightarrow m(N_1 \cup N_2) = 0$$

$$\text{Kun } x_0 \in [a,b] \setminus (N_1 \cup N_2)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x_0) = f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x_0)$$

ja jokainen u_k ja v_k
jatkuva pisteessä x_0 .

Lyhyt argumentti osoittaisi, että
jatkuvuus periytyy f :lle x_0 :ssa. 

" $\Leftarrow$ " On olemassa porrasfunktiot

$u_k \nearrow f$ ja $v_k \searrow f$ m.k.

Syy Jos f jatkuva,



$$u_k(x) = f(x_j) - \frac{1}{k},$$

kun $x \in]x_j, x_{j+1}]$
ja $x_{j+1} - x_j < \delta$.

Niin asia intuitiivisesti selvä:

Kun f jatkuva m.k. niin
voidaan rakentaa porrasfunktio
samoin kunhan leikataan epäjatku-
vuuspisteet pois.

$$\text{ala} \int_a^b f dx \geq \int_{[a,b]} u_k dx \rightarrow \int_{[a,b]} f dx$$

laskareista,
muista integrointuvuutta
ehto

MON laskareista, MON
lisäämällä vakio $\forall \epsilon \geq 0$

$$\int_{[a,b]} f dx \leftarrow \int_{[a,b]} v_k dx \geq y l_a^2 \int_a^b f dx$$

$$\Rightarrow \text{ala} \int_a^b f dx \geq y l_a^2 \int_a^b f dx.$$

$$\Rightarrow \text{ala} \int_a^b f dx = y l_a^2 \int_a^b f dx. \quad \square$$

Esimerkki $f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

f epäjatkuva joka pisteessä

$\Rightarrow$ ei Riemann-integroituva
(tiedettiin jo ennestään.)

On kuitenkin Leb. integroituva.

Leb. integroituvia fktioita

luomattavasti enemmän.

(Epäoleellisten integraalien yhteys)
Seuraus $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ (huomaa positiivisuus
 ja Riemann integroitava ja rajoittuneisuus-
 ehto on perustuminen.)
 Kaikilla suljetuilla väleillä $[a, b]$.
 Tällöin f Leb. integroitava

$$\Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i f dx \text{ olemassa ja äärellinen. } \int_{\mathbb{R}}$$

Lisäksi $\int_{\mathbb{R}} f dx = -\infty$.

Tod f Riemann intva
 $\Rightarrow f$ mitallinen.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i f dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[-i, i]} f dx$$

(lause edellä)

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-i, i]} f dx$$

$$\stackrel{\text{MON}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{i \rightarrow \infty} \chi_{[-i, i]} f dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f dx. \quad \square$$

HUOMAUTUS Jos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i |f| dx \text{ äärellinen}$$

niin yleistyy vaihtuva merkkiselle f .

Ehto tarpeen: Aikaisemmin todettu

$$\exists \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i f dx \not\Rightarrow \exists \int_{\mathbb{R}} f dx,$$

jos ehto ei voimassa.

Fubinin lause

Lause (Fubini/Tonelli)

Olkoon $n = p + q$, $p, q \in \mathbb{N}$ ja

$f : \overbrace{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q}^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$ (huomaa positii-
viteellinen, $f(x, y)$.
($\mathbb{R}^n$:ssä)

$\Rightarrow$ (i) $x \mapsto f(x, y)$ mitallinen $\mathbb{R}^p: \text{SSa}$
m. k. $y \in \mathbb{R}^q,$

(ii) $y \mapsto f(x, y)$ mitallinen $\mathbb{R}^q: \text{SSa}$
m. k. $x \in \mathbb{R}^p,$

(iii) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx$ mitallinen
 $\mathbb{R}^q: \text{SSa}$

(iv) $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$ mitallinen
 $\mathbb{R}^p: \text{SSa}.$

(V)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \underbrace{dm_n}_{\substack{\mathbb{R}^n: \gamma \\ \text{Lebesgue} \\ \text{mitta}}} = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} \underbrace{f(x, y)}_{\substack{\mathbb{R}^p: \gamma \\ \text{Leb.} \\ \text{mitta}}} \underbrace{dx}_{\substack{\mathbb{R}^p: \gamma \\ \text{Leb.} \\ \text{mitta}}} \underbrace{dy}_{\substack{\mathbb{R}^q: \gamma \\ \text{Leb.} \\ \text{mitta}}}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy dx.$$

21.10.2011