VAROITUS Vaikka integraali määritellään myöhemmin negatiivisille funktioille, positiivisuusoletus tarvitaan Leb. mon. konv. lauseessa.

Esim. $f_i = -\frac{1}{i}$, $f_i : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$

$f_i \nearrow f = 0$, mutta

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{i\to\infty} f_i\,dx$$

$$\neq \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_i\,dx$$

$$= \lim_{i\to\infty} -\infty = -\infty.$$

Pätee

$\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{i}dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i}dx = -\infty.$

Tähän palataan

Vastaesimerkkejä löytyy myös esim. $f : [0,1] \to [-\infty, \infty]$.

Seuraus Olkoot $f_i : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mitallisia. Tällöin
$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx.$$

Tod: HT $\square$

Tärkeä lause !

Lause (Fatoun lemma)

Olkoot $f_i : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mitallisia.
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i \to \infty} f_i \, dx \leq \liminf_{i \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx$$

Tod.

$$\liminf_{i \to \infty} f_i = \lim_{i \to \infty} \overbrace{\inf_{j \geq i} f_j}^{g_i}$$
$$= \lim_{i \to \infty} g_i \text{, missä}$$

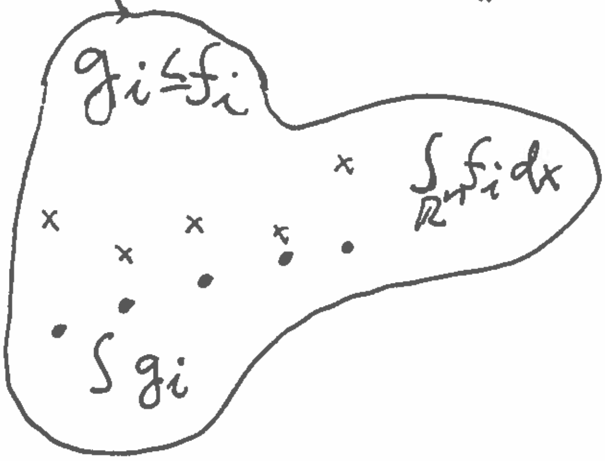
g_i on nouseva jono.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i\to\infty} f_i \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{i\to\infty} g_i \, dx$$

$$\underset{\text{MON}}{=} \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_i \, dx$$

$$\leq \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx$$



$\square$

HUOMAUTUS

(i) Positiivisuusoletus jälleen tarpeen $f_i : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, $f_i(x) = -\frac{1}{i}$

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{i\to\infty} \left(-\frac{1}{i}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0$$

$$\not\leq \quad \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{i}\right) = -\infty.$$

(ii) $\lim\limits_{i\to\infty} f_i \quad , \quad \lim\limits_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx$

ei välttämättä olemassa.

Jos kuitenkin

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

niin

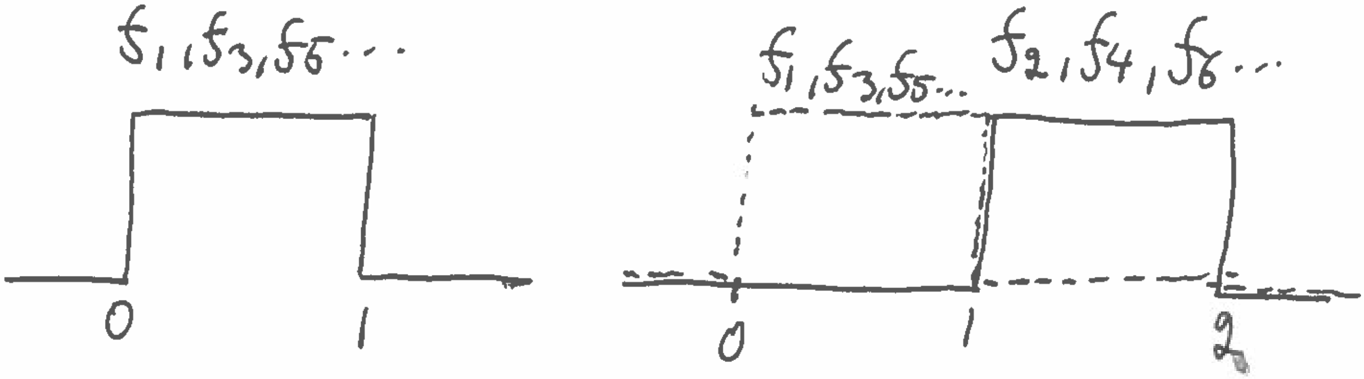
$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i\to\infty} f_i \, dx$$

$$\boxed{\leq \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx}$$

<u>Esimerkki</u>

$f_i : \mathbb{R} \to [0,\infty]$

$$f_i(x) = \begin{cases} \chi_{[0,1]}(x), & i \text{ pariton} \\ \chi_{]1,2]}(x), & i \text{ parillinen} \end{cases}$$



$$\liminf_{i\to\infty} f_i = 0 \,, \quad \int_{\mathbb{R}} f_i \, dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{i\to\infty} f_i \, dx$$

$$< \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_i \, dx = 1 .$$

aito epäyhtälö

Huomaa, että $\lim_{i\to\infty} f_i$ ei olemassa.

<u>Muistutus</u> Vastaava rajan otto (vrt. MON) ei toiminut Riemannin integraalille:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\} \,, \quad f_k(x) = \chi_{\bigcup_{i=1}^{k} \{q_i\}}(x) \,, \quad f_k : \mathbb{R} \to [0,\infty]$$

$$f : \mathbb{R} \to [0,\infty] \,, \quad f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

$$f_i \nearrow f$$

$\int_{\mathbb{R}} f_i \, dx = 0$, mutta $\int_{-\infty}^{\infty} f \, dx$ ei määritelty.

Integroituvat funktiot ja merkkiä vaihtavan funktion integraali

Muistutus

$$f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty], \quad f = f^+ - f^-$$

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = -\min(f, 0)$$

f mitallinen $\Leftrightarrow$ f^+, f^- mitallisia

Määritelmä Olkoon $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ mitallinen. Jos joko

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx < \infty \quad \text{tai} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx < \infty,$$

niin f:n Leb. integraali on

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx.$$

HUOMAA Oletuksen nojalla $\infty - \infty$ ei tapahdu

<u>Määritelmä</u> Olkoon $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ mitallinen.
f on integroituva, jos sekä

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx < \infty, \text{ että } \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx < \infty.$$

Merkitään $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $(\Leftrightarrow f^+, f^- \in L^1(\mathbb{R}^n))$.

<u>HUOMAUTUS</u> (i) Integraali määritelty kunhan jompikumpi $\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx, \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx < \infty$, siis f ei välttämättä integroituva.
Jos f integroituva

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < \infty.$$

(ii) Vastaavasti jos $A \in \mathcal{M}$, määritellään

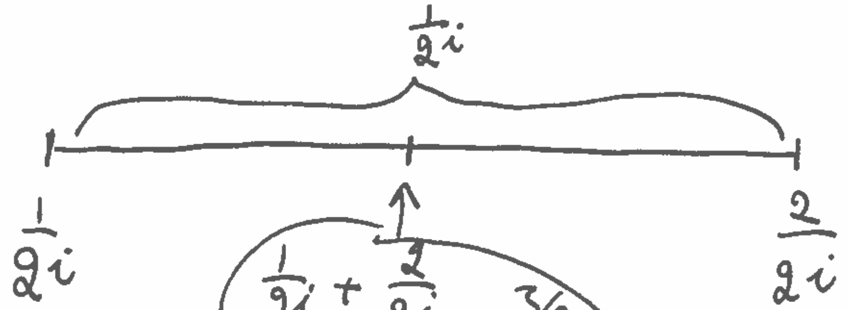
$$\int_A f dx = \int_A f^+ dx - \int_A f^- dx, \text{ ja}$$

$$f \in L^1(A) \Leftrightarrow f^-, f^+ \in L^1(A).$$

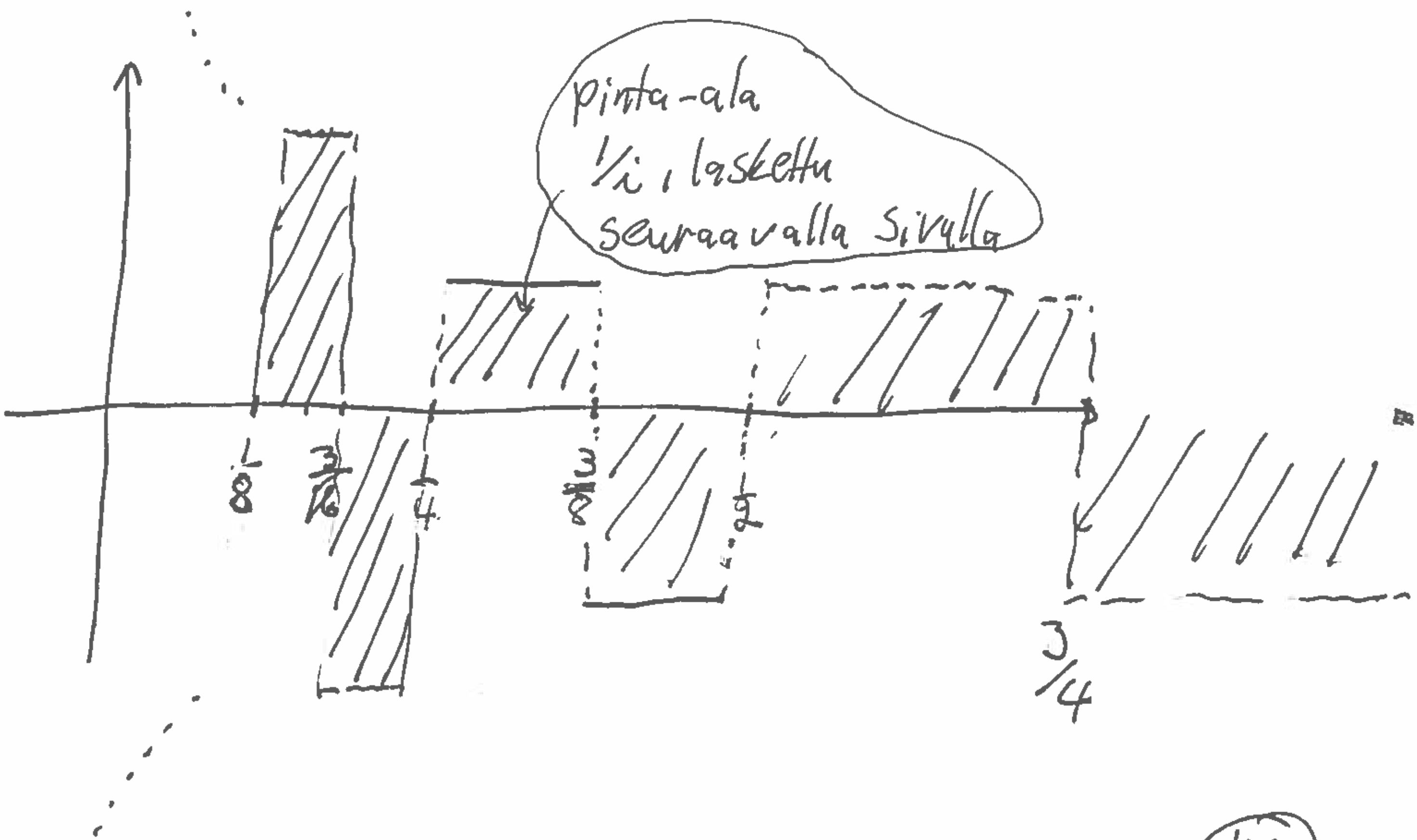
Esim (Funktio jolle Leb. int. ei määritelty)

$$f(0)=0 \quad , \quad x \in \left]\frac{1}{2^i}, \frac{2}{2^i}\right] \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{i+1}}{i} & , x \in \left]\dfrac{1}{2^i}, \dfrac{3}{2^{i+1}}\right] \\ -\dfrac{2^{i+1}}{i} & , x \in \left]\dfrac{3}{2^{i+1}}, \dfrac{2}{2^i}\right] \end{cases}$$



$$\frac{\frac{1}{2^i} + \frac{2}{2^i}}{2} = \frac{3/2}{2^i}$$



$$\int_{[0,1]} f^+ \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^{i+1}}}{i} \cdot \frac{1}{\cancel{2^{i+1}}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

Vastaavasti $\int_{[0,1]} f^- \, dx = \infty$.

Kuitenkin epäoleellinen (Riemannin) integraali

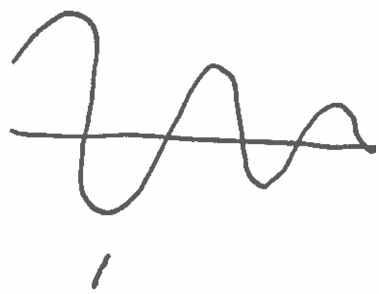
$$\int_0^1 f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx = 0$$

Vastakkain meno, ks. kuva

13.10.2011

Samoin Fourierin analyysissa tärkeä integraali

$$\lim_{y \to \infty} \int_0^y \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$



Vastakkainmeno, kompleksianalyysiotu

mutta $\frac{\sin(x)}{x}$:in Leb. integraali

$\int_{[0,\infty[} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ ei määritelty,

ja $\frac{\sin x}{x}$ ei Leb. integroituva.

Lemma $f:\mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ mitallinen.
Seuraavat yhtäpitäviä:

(i) f integroituva

(ii) On olemassa integroituvat $u \geq 0$, $v \geq 0$ s.e. $f = u - v$

(iii) On olemassa integroituva g s.e. $|f| \leq g$.

(iv) $|f|$ on integroituva

Tod $\boxed{i} \Rightarrow \boxed{ii}$: Valitse $u = f^+$ ja $v = f^-$.

$\boxed{ii} \Rightarrow \boxed{iii}$: Valitse $g = u + v$,
jolloin g integroituva ja
$(\int g\,dx \leq \int u\,dx + \int v\,dx < \infty)$

$|f| = |u - v| \leq u + v = g$

$\boxed{iii} \Rightarrow \boxed{iv}$ (1) $|f| \overset{\uparrow}{=} f^+ + f^-$ mitallinen, ja

Summa mitallisista

$|f|^+ = |f|$

(2) $$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx < \infty$$

$g \geq |f|$ oletus

$|f|^- = 0$

(3) $$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^- dx = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \, dx = 0.$$

$\boxed{iv} \Rightarrow \boxed{i}$ (1) f mitallinen (oletus)

(2) $$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < \infty$$

(3) $$\int_{\mathbb{R}^n} f^- dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Esim

Kuitenkaan $f = \frac{\sin x}{x}$ ei Leb. integroituva:

$$\int_{[0,\infty[} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[(k-1)\pi, k\pi[} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[0,\pi[} \left| \frac{\sin x}{k\pi} \right| dx$$

sinin jaksollisuus

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{[0,\pi[} \sin x \, dx$$

$$= \int_{[0,\pi[} \sin x \, dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} = \infty.$$

$\Rightarrow$ f ei integroituva.

HUOMAUTUS Olkoon $u, v \geq 0$ s.e.

$f = u - v$, kuten edellä kohdassa

(ii), u, v integroituvia.

$$\Rightarrow f = u - v = f^+ - f^-$$

$$\Rightarrow v + f^+ = u + f^-$$ integroituvia positiivisia

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} v + f^+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} u + f^- dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} v\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx.$$

positiivisen funktion int. lineaarisuus

Lause (Integraalin lineaarisuus)

Olkoot $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tällöin $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $f+g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$ sekä

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f+g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx$.

Todistus. $\boxed{i}$

$\lambda \geq 0$:

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \lambda f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)^- dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} \lambda f^- dx$$

$(\lambda f)^+ = \lambda f^+$
$(\lambda f)^- = \lambda f^-$

$$= \lambda \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx}_{<\infty} - \lambda \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f^- dx}_{<\infty}$$

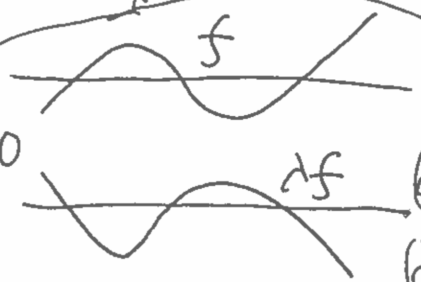
tod. positiivisille

$$= \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx \right) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

$\lambda < 0$: $$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)^- dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} -\lambda f^- dx - \int_{\mathbb{R}^n} -\lambda f^+ dx$$

$\lambda < 0$



$(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$

$(\lambda f)^- = -\lambda f^+$

$$= \overbrace{-\lambda \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx}^{<\infty} - \overbrace{(-\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx}^{<\infty}$$

$-\lambda \geq 0$

$f^-, f^+ \geq 0$

$$= \lambda \left(-\int_{\mathbb{R}^n} f^- dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx \right)$$

$$= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

$\boxed{ii}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - f^- + g^+ - g^- dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f^+ + g^+ - (f^- + g^-) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f^+ + g^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- + g^- \, dx$$

$f = u - v$, $u, v \geq 0$
$\Rightarrow \int f\,dx = \int u\,dx - \int v\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx + \int_{\mathbb{R}^n} g^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx - \int_{\mathbb{R}^n} g^- dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx + \int_{\mathbb{R}^n} g^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} g^- dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx. \quad \square$$

<u>HUOMAA</u> $f+g$:ssä voi olla $\infty - \infty$, mutta vain 0-mittaisessa joukossa $\Rightarrow$ ei haittaa.

<u>Lause</u> Olkoot $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $f \leq g$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

(i) $$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx.$$

(ii) $$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx.$$

Tod

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{f>g\}} f\,dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{f>g\}} f^+dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{f>g\}} f^-dx$$

$m(\{f>g\})=0$, koska $f<g$ m.k.

$$\le \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{f>g\}} g^+dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{f>g\}} g^-dx$$

$f\le g$ $\mathbb{R}^n\setminus\{f>g\}$:ssa

$\Rightarrow f^+\le g^+$

$f^-\ge g^-$

$$= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{f>g\}} g\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx.$$

$m(\{f>g\})=0$

ii $\quad \left|\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx\right| = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx, & \int f\,dx \ge 0 \\ -\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx, & \int f\,dx < 0 \end{cases}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx \quad \text{ja}$$

$f\le|f|$

(i)

$$-\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \underset{\text{ed. lause}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} -f\,dx \underset{\substack{-f \le |f| \\ \& \text{(ii)}}}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx$$

$\square$

Lause $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$, pistevieraita, asetetaan $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, ja $f \in L^1(A)$.

$$\Longrightarrow \int_A f\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f\,dx$$

Tod

$$\int_A f\,dx = \int_A f^+\,dx - \int_A f^-\,dx$$

$$\underset{\text{tunnettu positiivisille}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^+\,dx - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^+\,dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f^+\,dx$$

$$- \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f^-\,dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f^+ dx - \int_{A_i} f^- dx$$

Raja-arvot olemassa

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f dx. \qquad \square$$

Seuraavaksi tärkeä Lebesguen dominoidun konvergenssin lause!

<u>Lause</u> (Leb. dom. konv., DOM)
Olkoot $f_i : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ mitallisia ja

(i) $|f_i| \le g$ m.k $x \in \mathbb{R}^n$, missä g integroituva

(ii) $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{i\to\infty} f_i dx$$

$$= \boxed{\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx} < \infty.$$

14. 10. 2011