

$$= \sum_{j=1}^{k+1} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap S_{k+1}^c)$$

$$\geq m^*(S_{k+1} \cap E) + m^*(E \setminus S_{k+1})$$

↑
subadditiivisuus

$\Rightarrow S_{k+1} \in \mathcal{M}$ ja viimeistä edellinen vaihe implikoi väitteen epäyhtälön. ///

16.9.2011

Jatketaan $\square$ todistusta

$$m^*(E) \geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap B_j) + m^*(E \setminus S_k)$$

$$\geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap B_j) + m^*(E \setminus A^-)$$

↑
monot.
 $S_k \subset A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

$k \rightarrow \infty$
↓
 ∞
tässä käytetään apuräitteen vahvempaa muotoa

$$m^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \setminus A) \quad (*)$$

$$\geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$

↑
Subadd

$\Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ Lebesgue mitallinen.

(iii) Valitaan $E=A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ edellisessä kaavassa (*)

$$m^*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap B_j) + m^*(A \setminus A) \\ = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j). \quad \square$$

A_j it pistevieraita
 $B_j = A_j$

Esimerkki

(i) A mitallinen $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ mitallinen

(ii) Cantorin joukko:

$$m^*(C_k) = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

pistevierait
välit

Kunhan
n-väli mitallinen

$$C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} J_{kj} \Rightarrow C_k \text{ mitallinen}$$

Seuraus $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia
 $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ mitallinen

Tod

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c \right)^c$$

$$= \mathbb{R}^n \setminus \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)$$

$$\stackrel{\text{De Morgan}}{=} \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A_i)}_{\substack{(i) \\ \in \mathcal{M}}}}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ (ii)}} \Rightarrow \text{mitallinen.}$$

□

Esimerkki Cantorin joukko

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \text{ mitallinen}$$

(Kunhan n -väli mitallinen)

Määritelmä (σ -algebra) tai yleisemmin joukon X osajoukkoja

Kokoelma Γ $\mathbb{R}^n$ 'n osajoukkoja $\downarrow$
 σ -algebra, jos

(i) $\emptyset \in \Gamma$

(ii) $A \in \Gamma \Rightarrow A^c \in \Gamma$

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \Gamma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma.$

(47)

HUOMAA Edellisen lauseen perusteella mitalliset joukot, $\mathcal{M}$, muodostavat σ -algebran.

Lause Olkoon $m: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$,
 $m(A) := m^*(A)$, $A \in \mathcal{M}$.

Tällöin m on
mitta Lebesgue mitallisten
joukkojen σ -algebralla eli

$$\begin{aligned} (i) \quad & m(\emptyset) = 0 \\ (ii) \quad & A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \\ \Rightarrow \quad & m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \end{aligned}$$

HUOMAA Mitan erottaa ulkomitasta
täysadditiivisuus (ii).

m toteuttaa alun toiveet.

Onko epämitallisia joukkoja?

$\Rightarrow$ on ∇
0

Esim Määrittellään luokka

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

(Esim. $\sqrt{2} \sim \sqrt{2} + q$, kun $q \in \mathbb{Q}$)

Valitaan kustakin luokasta
yksi edustaja $\in [0,1]$ joukkoon A .

HUOMAA Tässä käytetään ns.
valinta-aksiomaa.

Joukko A on epämitallinen.

Tod Vastaoletus: A on Leb.
mitallinen.

Merkitään jokaisella $r \in \mathbb{Q}$

$$A+r = \{x+r : x \in A\}$$

$\Rightarrow A+r$ mitallinen

vo & siirto

Joukot $A+r$ pistevieraita eli

$$A+r \cap A+s = \emptyset, \text{ kun } r, s \in \mathbb{Q}, r \neq s, (1)$$

Syy jos olisi

$$y \in A+r \cap A+s$$

$$\Rightarrow y = x+r = z+s, \text{ joillakin } x, z \in A.$$

$$\Rightarrow x-z = s-r \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x \sim z \Rightarrow x=z \Rightarrow s=r$$

määrittelmä kustakin luokasta vain 1 A:ssa $\Rightarrow (1) \text{ tosi.}$

Lisäksi

$$[0,1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A+r$$

(2)

Syy jos $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \exists y \in A \text{ s.e. } x \sim y$$

Muuten x :n luokka puuttisi

$$\Rightarrow r = x - y \in \mathbb{Q}.$$

Toisalta

$$x, y \in [0, 1] \Rightarrow r = x - y \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow x = y + r, \text{ missä } r \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow x \in A + r.$$

$$m^*\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A + r\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m^*(A + r)$$

$A + r$ pisteveikot (1) ja mitallisia

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{symmetris-} \\ \text{invarianssi}}}{=} \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{jos } m^*(A) = 0 \\ \infty, & \text{jos } m^*(A) > 0 \end{cases}$$

Toisalta

(2)

$$0 < 1 = m^*([0, 1]) \leq m^*\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A + r\right)$$

$$\leq m^*([-1, 2]) = 3 < \infty$$

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A + r \subset [-1, 2], \text{ koska } A \subset [0, 1]$$

(45)

$\Rightarrow A$ epämitallinen. $\square$

HUOMAUTUS Vastaavia olemassa
useammassakin ulottuvuudessa.

Seuraavaksi: I mitallinen

Lemma Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ Leb. mitallinen
 $\Leftrightarrow$

$$m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A)$$

$\forall$ avoimilla n -väleillä I . (Siiis riittää
tutkia n -väleillä
 m, v, E sijasta)

Tod " $\Rightarrow$ " $E = I$ ja

$$m^*(E) = m^*(E \setminus A) + m^*(E \cap A).$$

" $\Leftarrow$ " Valitaan $I_1, I_2, \dots$ s.e.

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{ja} \quad \varepsilon + m^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)$$

$$\Rightarrow m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$

$$\leq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap A\right) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \setminus A\right)$$

$\uparrow$
monot

$$= m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap A)\right) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \setminus A)\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} (m^*(I_i \cap A) + m^*(I_i \setminus A))$$

Subadd

$$m^*(I) = v(I)$$

$$\stackrel{\text{Oletus}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)$$

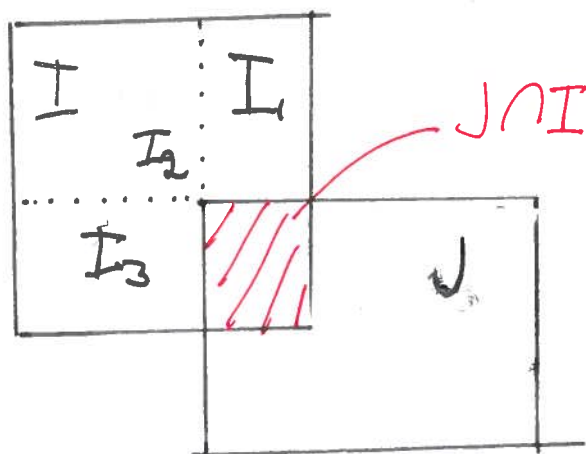
Koska toinen
suunta subadditiivisuudesta

$$\leq m^*(E) + \varepsilon \Rightarrow A \text{ mitallinen} \quad \square$$

Lause Jokainen n -väli $J \subset \mathbb{R}^n$
on Leb. mitallinen

Tod Käytetään ed. lemmaa.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ η -väli.



22.9.2011

47.

Tällöin

$I \cap J$ on n -väli

$$I \setminus J = \bigcup_{i=1}^k I_i, \text{ missä}$$

välit sisuksiltaan pistevieraita
(välit valitaan tarpeen mukaan
avoimiksi, puolivoimiksi, suljetuiksi)

$$m^*(I) \stackrel{\leq}{=} \text{Subadditiivisuus}$$

$$m^*(I \cap J) + m^*(I \setminus J)$$

$$= m^*(I \cap J) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^k I_i\right)$$

$$I \setminus J = \bigcup_{i=1}^k I_i$$

$$\stackrel{\leq}{=} m^*(I \cap J) + \sum_{i=1}^k m^*(I_i)$$

$$= V(I \cap J) + \sum_{i=1}^k V(I_i)$$

$$m^*(I) = V(I)$$

oikealle väleille

$$V(I) =$$

$$m^*(I) \Rightarrow$$

ed. lemma

mitall. $\square$

lasku

vrt. luvu

(48.)

Esimerkki (i) Cantorin joukko

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left([0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{2^{j-1}} I_{ji} \right)$$

mitallinen

(ii) Avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow U \text{ mitallinen}$$

Jokainen
avoin joukko
voidaan lausua
numer.yhdisteen a
avoinista
 n -väleistä

(iii) $S \subset \mathbb{R}^n$ suljettu

$$S = (S^c)^c = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus S)}_{\text{avoin}}$$

$\Rightarrow S$ mitallinen.

(iv) Numeroituvat yhdisteet, komplementit, numer. leikkaukset avoimista ja suljetuista joukoista sekä samat operaatiot näin syntyville joukoille
 $\Rightarrow$ mitallisuus säilyy

Määritelmä (Borel joukot)

Borelin joukot ovat pienin σ -algebra joka sisältää avoimet joukot (merkitään $\mathcal{B}$).

HUOMAUTUS

(i) Avoimet, suljetut sekä näiden leikkaukset yhdisteet $\in \mathcal{B}$. numeroituvat

HUOMAA
Emme väitä
että kaikki
Borel joukot
sääteisen näin.

Syy σ -algebra oli määritelmänsä mukaan suljettu yhdisteen ja komplementin suhteen. Lisäksi $(\cup A_i)^c = \cap A_i^c$.

(ii) $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Syy $\mathcal{M}$ on σ -algebra, avoimet $\subset \mathcal{M}$.
 $\mathcal{B}$ oli pienin tällainen.

Esim

A ei mitallinen joukko $\subset \mathbb{R}$

$$F = A \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \in \mathbb{R}^n.$$

$$m^*(F) = 0 \Rightarrow F \text{ mitallinen}$$

↑
Samaan
tapaan kuin
laskareissa

Tuloavaruuksien tuloksista, seuraa
että $F \notin \mathcal{B}$.

Voidaan konstruoida myös $\mathbb{R}^n$
esimerkki $F \notin \mathcal{B}$ ja $F \in \mathcal{M}$.

HUOMAUTUS

Voidaan osoittaa että jos
 $M \in \mathcal{M}$, niin $\exists B$ ja N s.e.

$$\boxed{M = B \cup N} \text{ missä}$$

B, N pistevieraita

B on Borel ja

N nollamittainen

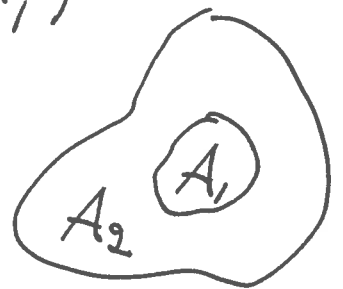
"Mitallinen joukko on
melkein (mitan mielessä)
Borel"

Lause

(i) $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ ja $A_1 \subset A_2$ ja
 $m(A_1) < \infty$

$$\Rightarrow m(A_2 \setminus A_1) = m(A_2) - m(A_1)$$

(ii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$
 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ niin

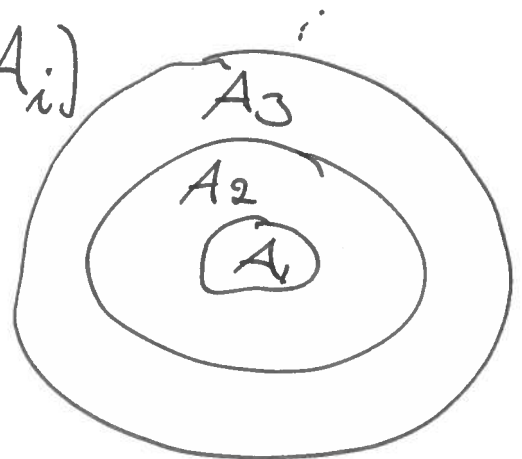


$$\Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$$

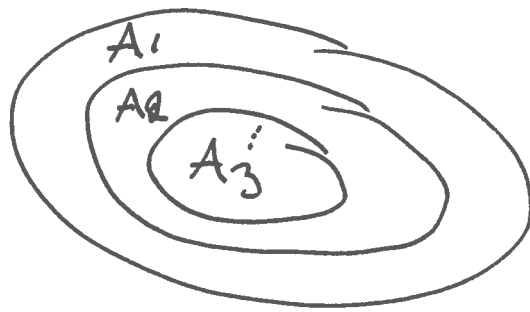
(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$

$A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ja

$\exists k_0$ s.e. $m(A_i) < \infty$ $i \geq k_0$



$$\Rightarrow m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$$



Tod (i)

$$A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup A_1, \in \mathcal{M}$$

$A_2 \setminus A_1$ ja A_1 pistevieraita
 $A_2 \setminus A_1$ ja A_1 mitallisia

$$\Rightarrow m(A_2) = m(A_2 \setminus A_1 \cup A_1)$$

$$= m(A_2 \setminus A_1) + m(A_1)$$

+ äys add

$$\Rightarrow m(A_2 \setminus A_1) = m(A_2) - \underbrace{m(A_1)}_{< \infty}$$

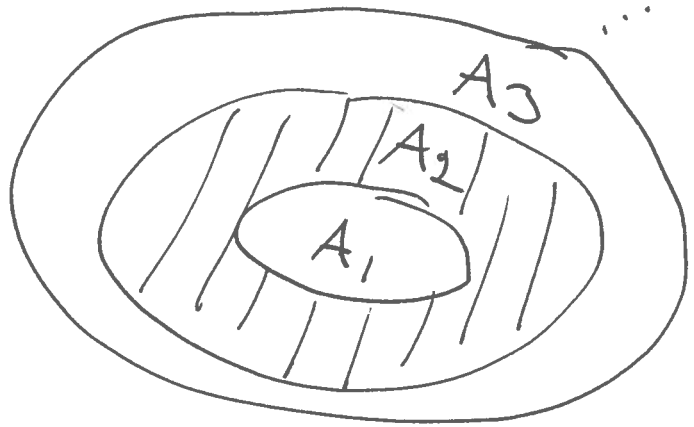
(ii) Voidaan olettaa

$m(A_i) < \infty \quad \forall i$, koska
 muuten selvästi:

$$\infty = \infty.$$

Kinjoitetaan yhdiste pistevieraina
joukkoina

A_1
 $A_2 \setminus A_1$
 $A_3 \setminus A_2$
 $\vdots$



$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = m\left(A_1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)\right)$$

$$= m(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{i+1} \setminus A_i)$$

↑
 täysadd.
 (pisteveeras,
 mitallisuus)

$$\stackrel{(i)}{=} m(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_{i+1}) - m(A_i))$$

$A_i \subset A_{i+1}$

$$= m(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (m(A_{i+1}) - m(A_i))$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} m(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} (m(A_{k+1}) - m(A_1))$$

↑
 teleskooppi

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_{k+1}) \Rightarrow \text{värite.}$$

(iii)

Tutkimalla tarvittaessa joukkoja $A_i \cap A_k$, voidaan olettaa

$$m(A_1) < \infty.$$



$$A_{i+1} \subset A_i \Rightarrow A_1 \setminus A_i \subset A_1 \setminus A_{i+1}$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1 \setminus A_i\right) \stackrel{= \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_1 \setminus A_i)}{\downarrow} \lim_{i \rightarrow \infty} (m(A_1) - m(A_i))$$

(i) (ii)

$$= m(A_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m(A_1) - m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)\right)$$

$$\stackrel{\text{De Morgan}}{=} m(A_1) - m\left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$= m(A_1) - (m(A_1) - m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right))$$

$$= m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right). \quad \square$$

Esimerkki (Cantor- $\frac{1}{3}$)

$$m(C) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(C_k) = 0.$$

Esimerkki 1

$m(A_i) < \infty$ oletus tarpeen (iii): ssä

$A_i =]\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[\times \mathbb{R}$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ mitallisia

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = m(\{0\} \times \mathbb{R}) = 0$$

ed.
laskarit

$$m(A_i) = \infty, \text{ joten}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = \infty$$

Lause (Approksimaatiolause)

$A \subset \mathbb{R}^n$. Seuraavat yhtäpitäviä

(i) $A \in \mathcal{M}$

(ii) Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin $G \supset A$ s.e.

$$m^*(G \setminus A) < \varepsilon$$

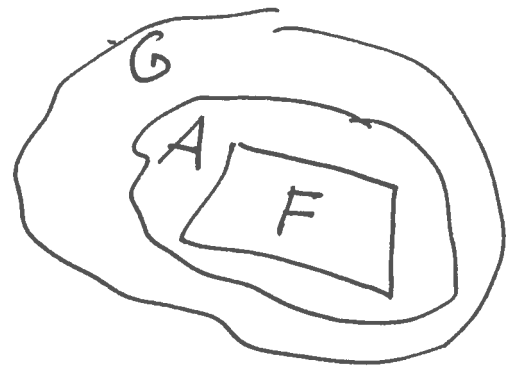
(iii) Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa suljettu $F \subset A$ s.e.

$$m^*(A \setminus F) < \varepsilon$$

Tod Todistetaan
esimerkkinä

$$\boxed{(i)} \Rightarrow \boxed{(ii)} \text{ kun}$$

$$m^*(A) < \infty.$$



Valitaan avoimet välit s.e.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(I_i) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Tällöin

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

on etsitty joukko, sillä

$$m^*(G \setminus A) = m^*(G) - m^*(A)$$

$\uparrow$

$$\begin{array}{l} A \subset G \\ m \text{ itallisia} \\ m^*(A) < \infty \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\leq m^*(A) + \varepsilon - m^*(A) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Muita kohtia ei todisteta. $\square$

23.9.2011